Klausuraufgaben

Komplexe Analysis und Integraltransformationen

17.02.2020

Die folgenden Seiten enthalten die Aufgaben der Klausur. Bitte vergewissern Sie sich, dass sowohl die Aufgabenblätter als auch die Lösungsblätter vollständig sind.
Die Aufgabenblätter umfassen 5 Seiten.

Die Lösungen sowie der vollständige Lösungsweg sind ausschließlich in die dafür vorgesehenen Lösungsblätter einzutragen. Lösungen werden nur bewertet, sofern sie vollständig und wohlbegründet sind. Achsenbeschriftungen in Diagrammen sowie Orientierungen von Kurven sind Teil einer vollständigen Lösung. Bitte verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibgerät und keine Rotstifte.

Bitte tragen Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf dem ersten Lösungsblatt ein und geben Sie am Ende der Prüfung alle Lösungsblätter ab.

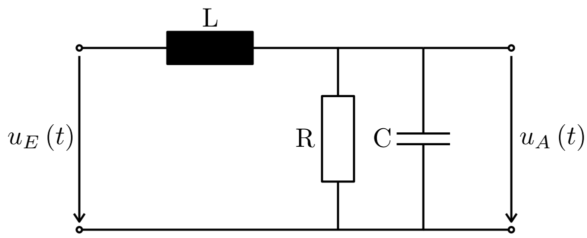
Aufgabe 1

1.1 Geben Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind:

Verschiedene Zeitfunktionen können die gleiche Laplace-Transformierte besitzen.	☐Richtig ☐Falsch
Die Laplace-Transformation konvergiert in ganz $\mathbb{C}$.	☐Richtig ☐Falsch
Die Abbildung $x(t) = 3t + 1$ ist linear.	☐Richtig ☐Falsch
Die Anwendung der gewöhnlichen und der verallgemeinerten Differentiationsregel auf stetige Zeitfunktionen ergeben verschiedene Ergebnisse.	☐Richtig ☐Falsch

Tragen Sie hierfür Ihre Antworten in die Tabelle in den Lösungsblättern ein. Korrekt angekreuzte Antworten resultieren in der Vergabe eines Punkts, falsch angekreuzte in der Vergabe eines Minuspunkts; wird keine Auswahl getroffen, werden keine Punkte vergeben. In der gesamten Teilaufgabe können minimal 0 Punkte erzielt werden.

1.2 Betrachten Sie das folgende elektrische Netzwerk:



Der Kondensator ist zum Zeitpunkt $t = 0$ geladen, womit sich $u_C(-0) = 2$ ergibt. Bestimmen Sie den Verlauf der Ausgangsspannung $u_A(t)$, wenn $u_E(t) = \sigma(t)$ gilt. Die Bauteilwerte $L = 1$, $R = 5$, und $C = 0,1$ sind bereits normiert und können direkt eingesetzt werden.

1.3 Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des in Teilaufgabe 1.2 vorgestellten elektrischen Netzwerks. Nutzen Sie die angegebenen Bauteilwerte.

1.4 Im Folgenden werden drei Übertragungsfunktionen $G_i(s)$ mit $i \in \{1, 2, 3\}$ betrachtet:

$$G_1(s) = \frac{s^2 + s - 6}{s(s^2 - 4)} \tag{1}$$

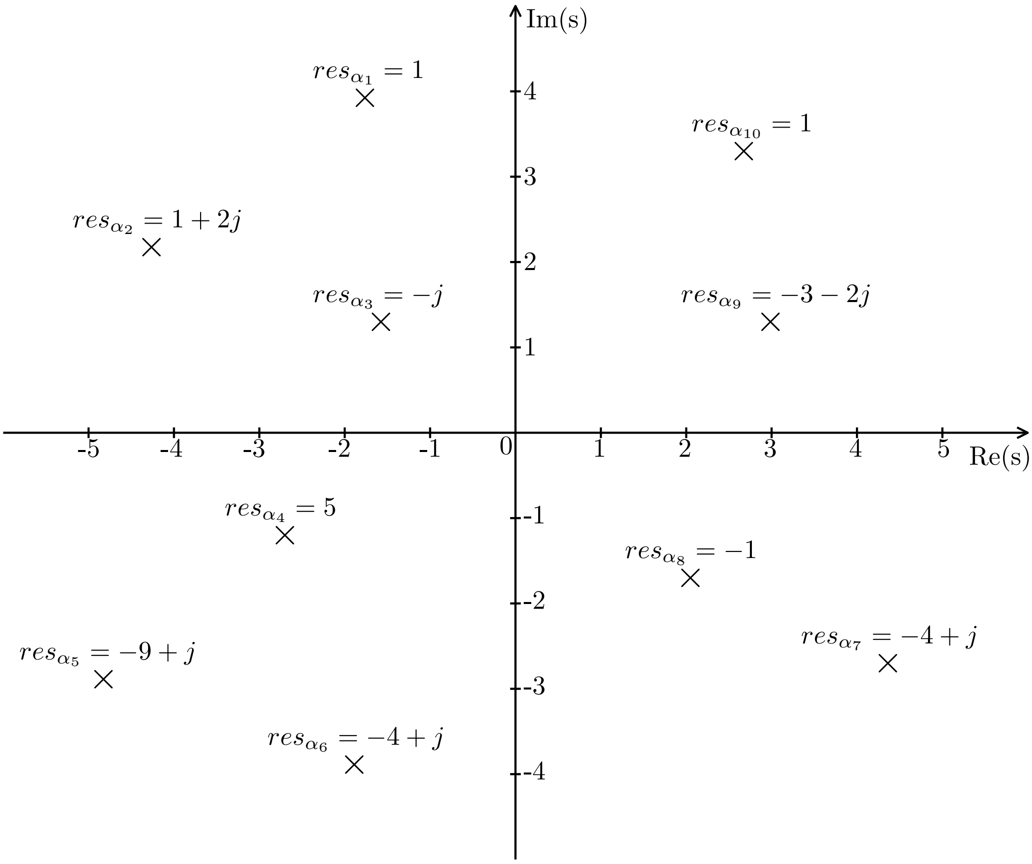
$$G_2(s) = \frac{4(s-2)}{4s^2 + 9} \tag{2}$$

$$G_3(s) = \frac{4(s-2)}{4s^2 + 16s + 7} \tag{3}$$

Untersuchen Sie, ob der Endwert der Sprungantwort des jeweiligen Systems $G_i(s)$ mithilfe des Endwertsatzes bestimmt werden kann. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Berechnen Sie den Endwert der Sprungantworten in den Fällen, in denen der Endwertsatz angewendet werden kann.

Aufgabe 2

2.1 Betrachten Sie die Polstellen α_k und zugehörigen Residuen res_{α_k} einer Funktion $G(s)$:



Zeichnen Sie drei Kurven C_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$ so in die Diagramme auf den Lösungsblättern ein, dass Folgendes gilt:

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{C_1} G(s)\,\mathrm{ds} = 3, \quad \frac{1}{2\pi j}\oint_{C_2} G(s)\,\mathrm{ds} = j, \quad \oint_{C_3} G(s)\,\mathrm{ds} = -4\pi j \tag{4}$$

2.2 Betrachten Sie nun die folgende meromorphe Funktion:

$$F(s) = \frac{1}{\cosh(s)} \tag{5}$$

Bestimmen Sie alle Pole von $F(s)$ und geben Sie jeweils deren Vielfachheit an.
Hinweis: Es gilt $\cosh(s) = \frac{1}{2}(e^s + e^{-s})$.

2.3 Berechnen Sie die Residuen zu den Polen von $F(s)$.

2.4 Bestimmen Sie die ersten beiden von Null verschiedenen Glieder der Laurent-Reihe von $F(s)$ um $s = j\frac{\pi}{2}$. *Hinweis: Es gilt* $\cosh(a + b) = \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b)$

2.5 Wie lautet die Partialbruchzerlegung von $F(s)$?

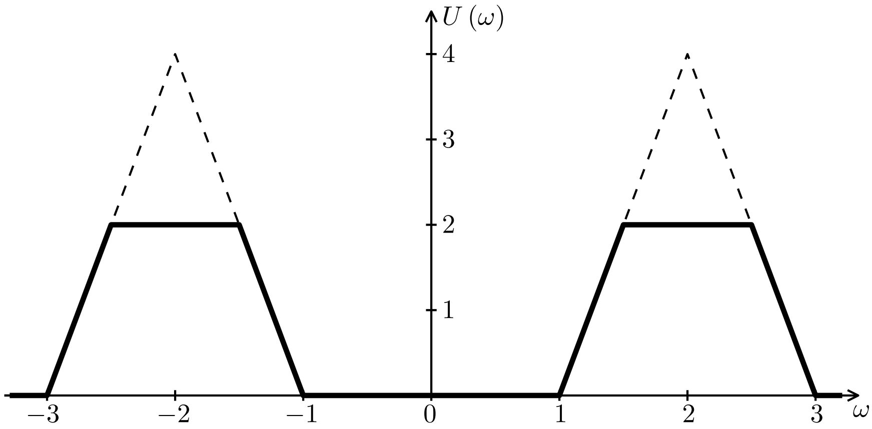
Aufgabe 3

3.1 Skizzieren Sie $F_1(\omega) = \mathcal{F}\{\delta(t)\}$ im Bereich $[-3\pi, 3\pi]$ in das Diagramm auf den Lösungsblättern.

3.2 Skizzieren Sie $F_2(\omega) = \mathcal{F}\{r_1(t)\}$ im Bereich $[-3\pi, 3\pi]$ in das Diagramm auf den Lösungsblättern. *Hinweis: Es gilt* $F_2(0) = 2$.

3.3 Skizzieren Sie nun $F_3(\omega) = \mathcal{F}\{r_1(t) * \delta(t)\}$ im Bereich $[-3\pi, 3\pi]$ in das Diagramm auf den Lösungsblättern.

3.4 An einem Ohmschen Widerstand mit $R = 2\Omega$ liege die Spannung $u(t)$ an, deren Fourier-Transformierte $U(\omega)$ in der folgenden Abbildung dargestellt ist:



Ermitteln Sie die im Widerstand für $t \in (-\infty, \infty)$ umgesetzte Energie ohne $u(t)$ zu berechnen.

3.5 Berechnen Sie nun die Zeitfunktion $u(t)$. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich.

3.6 Die Spannung $u(t)$ entsteht als Ausgangssignal eines linearen Filters, wenn am Eingang ein Eingangssignal $v(t)$ mit der Fourier-Transformierten $V(\omega) = r_4(\omega)$ angelegt wird:

Wie lautet das Ausgangssignal $\tilde{u}(t)$, wenn am Eingang dieses Filters $\tilde{v}(t) = \sin\left(\frac{6}{5}t\right)$ angelegt wird?

Aufgabe 4

4.1 Gegeben sei folgende Differenzengleichung mit verschwindenen Anfangswerten, die das Übertragungsverhalten eines zeitdiskreten Systems beschreibt:

$$y_{k-3} + 3y_{k-2} + y_{k-1} + 5y_k + u_{k-3} - 2u_{k-2} + u_{k-1} = 0 \tag{6}$$

Bei y_k handelt es sich um die Werte der Ausgangsfolge des Systems, bei u_k um die Werte der Eingangsfolge. Bestimmen Sie die z-Übertragungsfunktion $G_z(z)$ in einer Darstellung ohne z^{-n}.

4.2 Betrachten Sie nun die Eingangsfolge $(u_k) = (k)$. Bestimmen Sie die z-Transformierte der Ausgangsfolge des Systems, wenn (u_k) am Eingang angelegt wird.

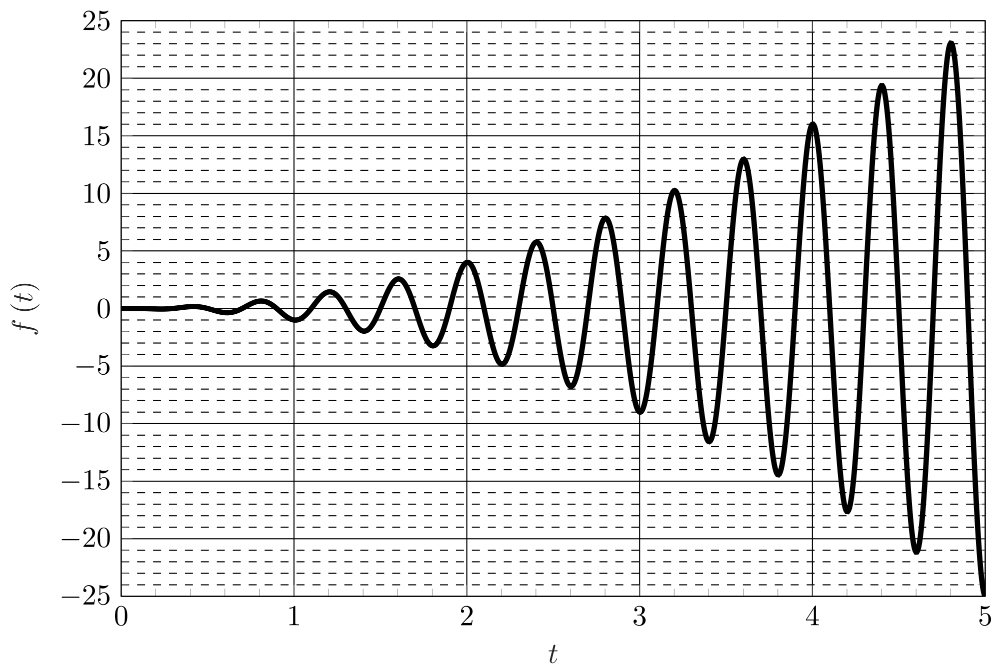
4.3 Gegeben sei nun die folgende z-Transformierte $F_z(z)$:

$$F_z(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2} \tag{7}$$

Bestimmen Sie das erste Folgenglied der mit $F_z(z)$ korrespondierenden Zeitfolge (f_k) unter Verwendung der Taylor-Koeffizienten-Formel.

4.4 Bestimmen Sie nun die Folge (f_k) zur z-Transformierten (7) in geschlossener Form, also **nicht** durch Angabe der Folgenglieder.

4.5 Betrachten Sie die folgende aufklingende Schwingung $f(t)$ mit konstanter Frequenz für $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$:



Bestimmen Sie die z-Transformierte der Zahlenfolge, die sich durch Abtastung der Funktion an den Stellen $t = k$ mit $k \in \mathbb{N}$ ergibt. Sie können davon ausgehen, dass für $t < 0$ $f(t) = 0$ gilt. Eine Angabe in geschlossener Reihenform ist ausreichend.

4.6 Ist die z-Transformation einer Funktion $f(t)$ wie in der vorigen Teilaufgabe eindeutig? Belegen Sie Ihre Aussage.