Musterlösung

Komplexe Analysis und Integraltransformationen

17.02.2020

Aufgabe 1

1.1

Verschiedene Zeitfunktionen können die gleiche Laplace-Transformierte besitzen.	☑ Richtig	☐ Falsch
Die Laplace-Transformation konvergiert in ganz $\mathbb{C}$.	☐ Richtig	☑ Falsch
Die Abbildung $x(t) = 3t + 1$ ist linear.	☐ Richtig	☑ Falsch
Die Anwendung der gewöhnlichen und der verallgemeinerten Differentiationsregel auf stetige Zeitfunktionen ergeben verschiedene Ergebnisse.	☐ Richtig	☑ Falsch

1.2

Zunächst werden die Maschen- und Knotengleichungen aufgestellt:

$$u_E(t) = u_L(t) + u_A(t) \tag{1}$$
$$u_R(t) = u_C(t) = u_A(t) \tag{2}$$
$$i_E(t) = i_R(t) + i_C(t) \tag{3}$$

Aufstellen der Bauteilbeziehungen ergibt:

$$u_A(t) = Ri_R(t) \tag{4}$$
$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_E(t)}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$
$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i_C(t)\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

Einsetzen der Bauteilbeziehungen ergibt:

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_A(t)}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$
$$u_L(t) = L\left(\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_A(t)}{\mathrm{d}t} + C\frac{\mathrm{d}^2u_A(t)}{\mathrm{d}t^2}\right) \tag{8}$$
$$u_E(t) = u_A(t) + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_A(t)}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_A(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{9}$$
$$\tag{10}$$

Einsetzen der Bauteilwerte liefert:

$$u_E(t) = u_A(t) + \frac{1}{5}\frac{\mathrm{d}u_A(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{10}\frac{\mathrm{d}^2u_A(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{11}$$
$$10u_E(t) = 10u_A(t) + 2\frac{\mathrm{d}u_A(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2u_A(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{12}$$

Beim Übergang in den Laplace-Bereich müssen die nicht-verschwindenden Anfangswerte berücksichtigt werden:

$$10U_E(s) = 10U_A(s) + 2\left(sU_A(s) - u_A(-0)\right) + s^2U_A(s) - su_A(-0) \tag{13}$$

Umformen liefert:

$$\left(s^2+2s+10\right)U_A(s) = 10U_E(s) + (2s+4) \tag{14}$$

Auflösen nach der Ausgangsgröße ergibt:

$$U_A(s) = \frac{10U_E(s)}{s^2+2s+10} + \frac{2s+4}{s^2+2s+10} \tag{15}$$

Für die Eingangsgröße gilt $U_E(s) = \frac{1}{s}$. Einsetzen in (15) liefert:

$$U_A(s) = \frac{10}{s\left(s^2+2s+10\right)} + \frac{2s+4}{s^2+2s+10} \tag{16}$$

Um die beiden Brüche zusammenfassen zu können wird eine Partialbruchzerlegung des ersten Bruchs durchgeführt:

$$\frac{A}{s} + \frac{B+Cs}{s^2+2s+10} \Rightarrow As^2+2As+10A+Bs+Cs^2 = 10 \Rightarrow A=1, B=-2, C=-1 \tag{17}$$

Damit ergibt sich eine Darstellung, die auf bekannte Korrespondenzen zurückgeführt werden kann:

$$U_A(s) = \frac{1}{s} - \frac{2+s}{s^2+2s+10} + \frac{2s+4}{s^2+2s+10} = \frac{1}{s} + \frac{s+2}{s^2+2s+10} = \frac{1}{s} + \frac{s+2}{(s+1)^2+9} \tag{18}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+9} = \frac{1}{s} + \frac{(s+1)}{(s+1)^2+9} + \frac{1}{3}\frac{3}{(s+1)^2+9} \tag{19}$$

Rücktransformation mit der Korrespondenztabelle ergibt:

$$u_A(t) = \sigma(t) + \frac{1}{3}e^{-t}\sin(3t) + e^{-t}\cos(3t) \tag{20}$$

1.3

Zur Bestimmung der Übertragungsfunktion kann (15) herangezogen werden. Es muss lediglich der zusätzliche Summand entfernt werden, der den Einfluss der Anfangswerte abbildet. Abgesehen davon ist der Weg zur Übertragungsfunktion identisch zur vorigen Teilaufgabe:

$$G(s) = \frac{U_A(s)}{U_E(s)} = \frac{10}{s^2+2s+10} \tag{21}$$

1.4

Um den Endwertsatz anzuwenden muss der Endwert der betrachteten Größe existieren. Hierfür muss zunächst der prinzipielle Verlauf der Größe bestimmt werden. Dazu kann die Partialbruchzerlegung von $G_1(s)$ herangezogen werden, die zunächst eine Faktorisierung von Zähler und

Nenner erfordert:

$$s^2+s-6=\left(s+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{24}{4}\stackrel{!}{=}0 \Rightarrow s_1=-\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}\Rightarrow s_{1,1}=2, s_{1,2}=-3 \tag{22}$$

$$s^2-4=0\Rightarrow s^2=4\Rightarrow s_2=\pm 2 \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

Also gilt:

$$G_1(s)=\frac{1}{s}\frac{(s-2)(s+3)}{(s+2)(s-2)}=\frac{1}{s}\frac{s+3}{s+2} \tag{25}$$

Die Sprungantwort ergibt sich folglich zu:

$$\frac{1}{s}G_1(s)=\frac{1}{s^2}\frac{s+3}{s+2} \tag{26}$$

Damit hat die Partialbruchzerlegung prinzipiell die folgende Form:

$$\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{s+2} \tag{27}$$

Der Term As^{-2} korrespondiert mit der Zeitfunktion At, die für $t\to\infty$ über alle Schranken wächst. Dementsprechend existiert der Grenzwert der Sprungantwort nicht und der Endwertsatz ist nicht anwendbar.
Die zweite Sprungantwort kann wie folgt dargestellt werden:

$$\frac{1}{s}G_2(s)=\frac{1}{s}\frac{4(s-2)}{4s^2+9}=\frac{s-2}{s\left(s^2+\frac{9}{4}\right)} \tag{28}$$

Somit ergibt sich folgende prinzipielle Partialbruchzerlegung:

$$\frac{s-2}{s\left(s^2+\frac{9}{4}\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+\frac{9}{4}} \tag{29}$$

Der Term $\frac{Bs+C}{s^2+\frac{9}{4}}$ korrespondiert mit einer trigonometrischen Zeitfunktion. Daher existiert der Grenzwert der Sprungantwort erneut nicht und der Endwertsatz kann nicht angewendet werden.
Die dritte Sprungantwort ergibt sich wie folgt:

$$\frac{1}{s}G_3(s)=\frac{1}{s}\frac{4(s-2)}{4s^2+16s+7} \tag{30}$$

Erneut müssen die Nullstellen des Polynoms für eine Faktorisierung bestimmt werden:

$$s^2+4s+\frac{7}{4}\stackrel{!}{=}0\Rightarrow (s+2)-\frac{16}{4}+\frac{7}{4}\stackrel{!}{=}0\Rightarrow s_1=-2+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2},\quad s_2=-2-\frac{3}{2}=-\frac{7}{2} \tag{31}$$

Womit sich die folgende prinzipielle Partialbruchzerlegung ergibt:

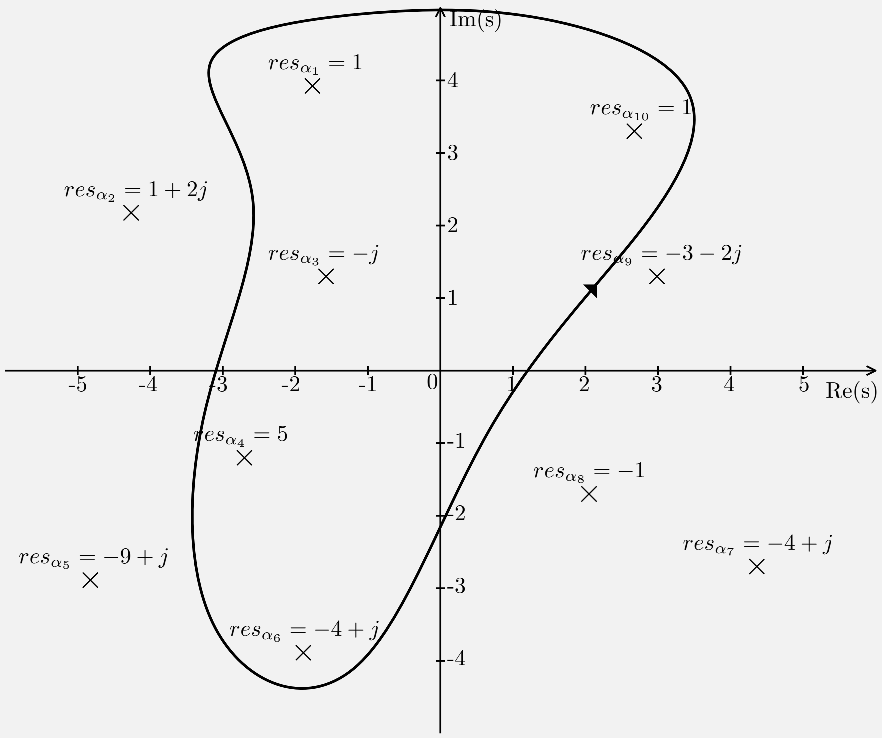
$$\frac{1}{s}G_3(s)=\frac{1}{s}\frac{4(s-2)}{\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{7}{2}\right)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+\frac{1}{2}}+\frac{C}{s+\frac{7}{2}} \tag{32}$$

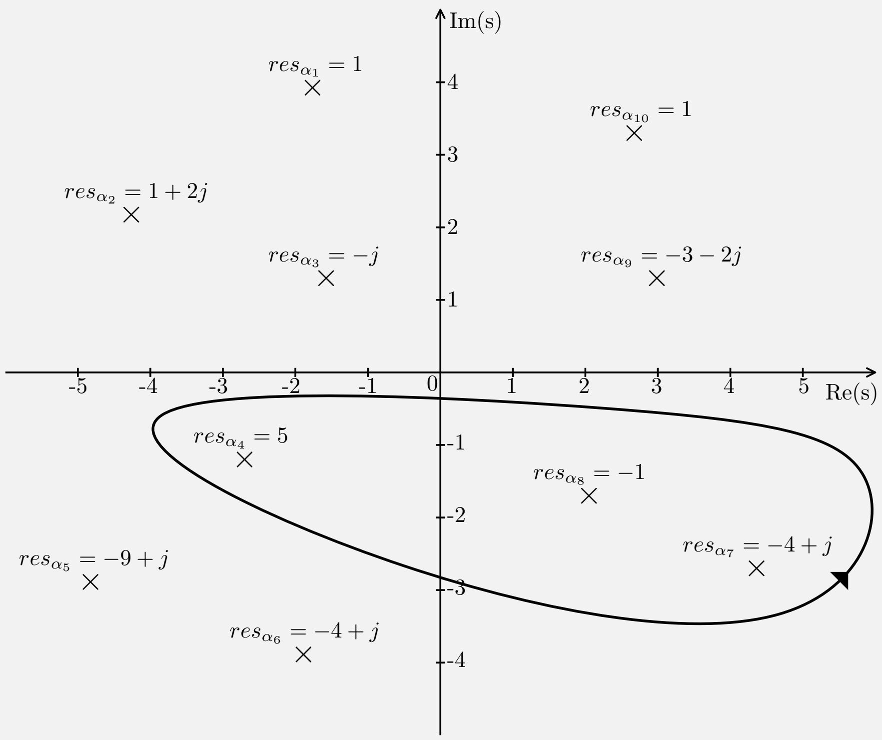
Da alle Terme mit abklingenden Funktionen korrespondieren, existiert der Endwert und kann wie folgt mit dem Endwertsatz berechnet werden :

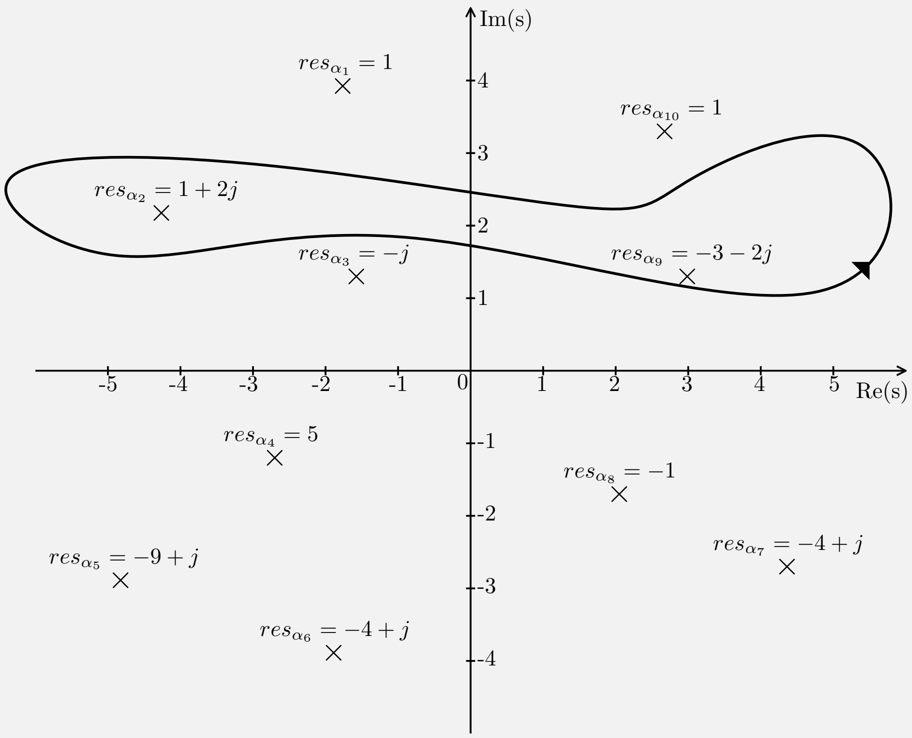
$$\lim_{t\to\infty}g_3(t)=\lim_{s\to 0}s\frac{1}{s}G_3(s)=\lim_{s\to 0}\frac{4(s-2)}{4s^2+16s+7}=-\frac{2}{\frac{7}{4}}=-\frac{8}{7} \tag{33}$$

Aufgabe 2

2.1


Im(s)
Re(s)
$res_{\alpha_1} = 1$
$res_{\alpha_2} = 1 + 2j$
$res_{\alpha_3} = -j$
$res_{\alpha_4} = 5$
$res_{\alpha_5} = -9 + j$
$res_{\alpha_6} = -4 + j$
$res_{\alpha_7} = -4 + j$
$res_{\alpha_8} = -1$
$res_{\alpha_9} = -3 - 2j$
$res_{\alpha_{10}} = 1$


Im(s)
Re(s)
$res_{\alpha_1} = 1$
$res_{\alpha_2} = 1 + 2j$
$res_{\alpha_3} = -j$
$res_{\alpha_4} = 5$
$res_{\alpha_5} = -9 + j$
$res_{\alpha_6} = -4 + j$
$res_{\alpha_7} = -4 + j$
$res_{\alpha_8} = -1$
$res_{\alpha_9} = -3 - 2j$
$res_{\alpha_{10}} = 1$



2.2

Mit dem Hinweis gilt:

$$F(s) = \frac{1}{\cosh(s)} = \frac{2}{e^s + e^{-s}} = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{34}$$

Für Polstellen muss gelten:

$$e^s + e^{-s} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow e^s \left(1 + e^{-2s}\right) \overset{!}{=} 0 \tag{35}$$

Da e^s keine Nullstelle besitzt muss der zweite Faktor untersucht werden:

$$1 + e^{-2s} \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow e^{-2s} \overset{!}{=} -1 \tag{36}$$

Mit $s = \delta + j\omega$ folgt $\delta = 1$ sowie:

$$e^{-2j\omega} \overset{!}{=} -1 \tag{37}$$

Und damit:

$$-2\omega_k = -(2k+1)\pi \to \omega_k = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_k = j(2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{38}$$

Es handelt sich bei allen Polstellen um einfache Polstellen.

2.3

Da es sich um einfache Polstellen handelt, können die Residuen wie folgt bestimmt werden:

$$res_{\alpha_k} F(s) = \left. \frac{P(s)}{\frac{\mathrm{d}Q(s)}{\mathrm{d}s}} \right|_{s=\alpha_k} \tag{39}$$

Einsetzen ergibt:

$$res_{\alpha_k} F(s) = \frac{1}{\sinh(\alpha_k)} = \frac{2}{e^{\alpha_k} - e^{-\alpha_k}} = \frac{1}{j\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-j}{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right)} \tag{40}$$

Auswerten der Sinusfunktion liefert:

$$res_{\alpha_k} F(s) = \frac{1}{\sinh(\alpha_k)} = -j(-1)^k = (-1)^{k+1} j \tag{41}$$

2.4

Für die Laurent-Entwicklung gilt Folgendes, da es sich bei $j\frac{\pi}{2}$ um eine Polstelle handelt:

$$F(s) = \sum_{i=-1}^{\infty} a_i \left(s - j\frac{\pi}{2}\right) \tag{42}$$

Zunächst wird der Nenner von $F\left(s - j\frac{\pi}{2}\right) + j\frac{\pi}{2}$ betrachtet:

$$\cosh(s) = \cosh\left(\left(s - j\frac{\pi}{2}\right) + j\frac{\pi}{2}\right) \tag{43}$$

Mit dem Hinweis gilt:

$$\cosh\left(\left(s - j\frac{\pi}{2}\right) + j\frac{\pi}{2}\right) = \cosh\left(s - j\frac{\pi}{2}\right)\cosh\left(j\frac{\pi}{2}\right) + \sinh\left(s - j\frac{\pi}{2}\right)\sinh\left(j\frac{\pi}{2}\right) \tag{44}$$

Es gilt:

$$\cosh\left(j\frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{45}$$

$$\sinh\left(j\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2}(j - (-j)) = j \tag{46}$$

Eingesetzt ergibt sich also:

$$\cosh\left(\left(s - j\frac{\pi}{2}\right) + j\frac{\pi}{2}\right) = j\sinh\left(s - j\frac{\pi}{2}\right) \tag{47}$$

Somit gilt für $F(s)$:

$$F(s) = \frac{1}{j\sinh\left(s - j\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-2j}{e^{s-j\frac{\pi}{2}} - e^{-\left(s-j\frac{\pi}{2}\right)}} \tag{48}$$

Einsetzen der Reihendarstellung der Exponentialfunktionen ergibt:

$$F(s) = \frac{-j}{\left(s - j\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(s - j\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(s - j\frac{\pi}{2}\right)^5 + \ldots} \tag{49}$$

Ausklammern der Polstelle liefert:

$$F\left(s\right)=\frac{-j}{s-j\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\frac{1}{3!}\left(s-j\frac{\pi}{2}\right)^{2}+\frac{1}{5!}\left(s-j\frac{\pi}{2}\right)^{4}+...}\tag{50}$$

Nun ist der hintere Term holomorph in $j\frac{\pi}{2}$ und kann somit in eine Potenzreihe entwickelt werden. Hierfür ergibt sich folgender Ansatz:

$$\sum_{i=-1}^{\infty}a_{i}\left(s-j\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{3!}\left(s-j\frac{\pi}{2}\right)^{2}+\frac{1}{5!}\left(s-j\frac{\pi}{2}\right)^{4}+...}\tag{51}$$

Multiplizieren mit dem Nenner ergibt:

$$1=\left(a_{0}+a_{1}\left(s-j\frac{\pi}{2}\right)+a_{1}\left(s-j\frac{\pi}{2}\right)^{2}+...\right)\left(1+\frac{1}{3!}\left(s-j\frac{\pi}{2}\right)^{2}+\frac{1}{5!}\left(s-j\frac{\pi}{2}\right)^{4}+...\right)\tag{52}$$

Mit dieser Darstellung kann nach dem Ausmultiplizieren ein Koeffizientenvergleich durchgeführt werden:

$$1=a_{0}\tag{53}$$

$$0=a_{1}\tag{54}$$

$$0=a_{2}+\frac{1}{3!}a_{0}\Rightarrow a_{2}=-\frac{1}{6}a_{0}=-\frac{1}{6}\tag{55}$$

Insgesamt ergibt sich also für die Laurent-Entwicklung:

$$F\left(s\right)=\frac{-j}{s-j\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{6}\left(s-j\frac{\pi}{2}\right)^{2}\pm...\right)=-j\frac{1}{s-j\frac{\pi}{2}}+\frac{j}{6}\left(s-j\frac{\pi}{2}\right)\pm...\tag{56}$$

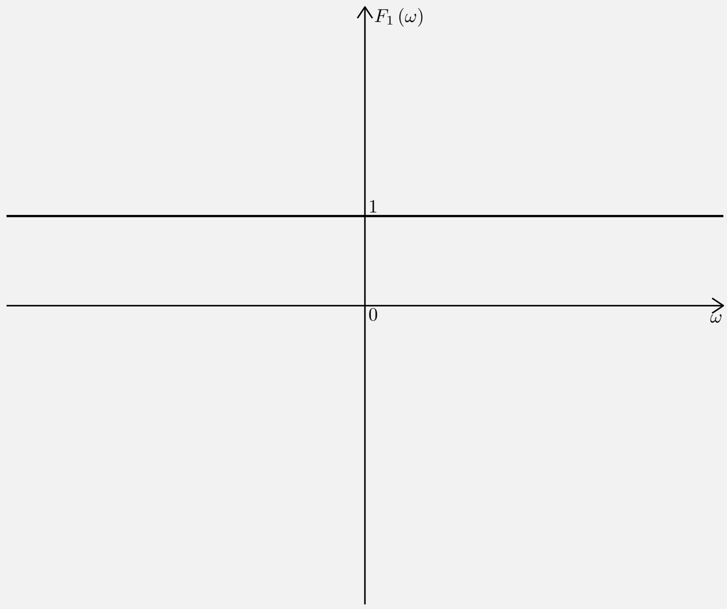
2.5

Die Partialbruchzerlegung ergibt sich als Summe der Hauptteile aller Laurent-Entwicklungen um die Polstellen α_k.
Da nur einfache Pole vorliegen, haben alle Hauptteile $H_k\left(s\right)$ genau ein Glied :

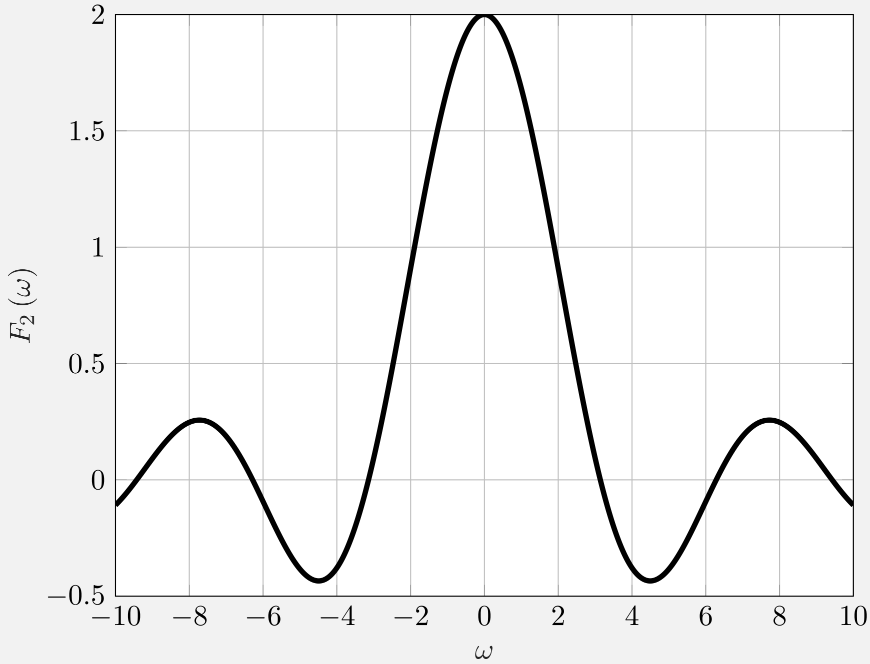
$$F\left(s\right)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}H_{k}\left(s\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k+1}j}{s-j\left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}}\tag{57}$$

Aufgabe 3

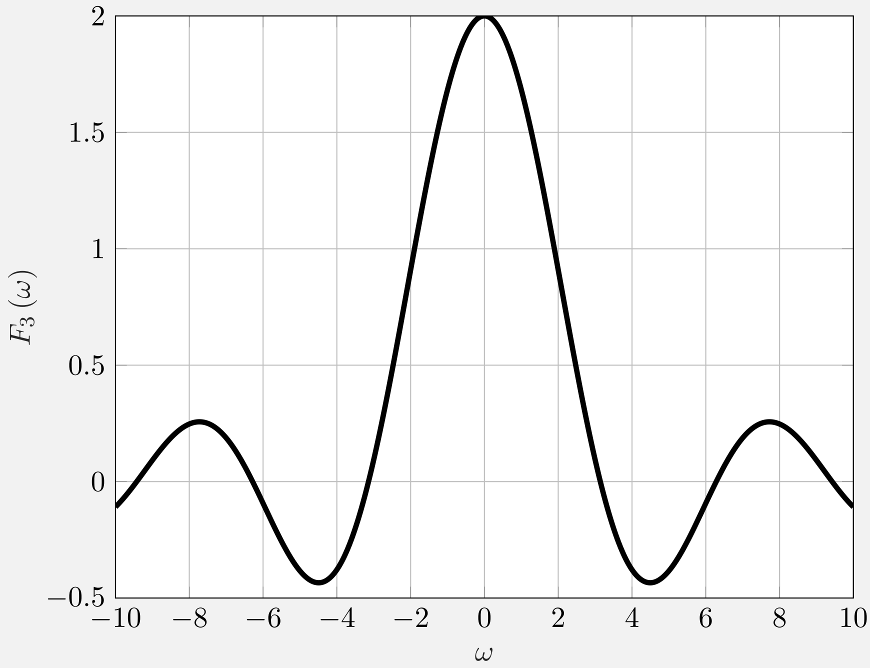
3.1



3.2



3.3



3.4

Für die im Widerstand umgesetzte Energie gilt mit dem Satz von Parseval:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2(t)}{R} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega \tag{58}$$

Durch Ausnutzen der Symmetrie des Spektrums ergibt sich:

$$E = \frac{2}{4\pi} \int_1^3 |U(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \left(2 \int_1^{\frac{3}{2}} |U(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega + \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} |U(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega \right) \tag{59}$$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$2 \int_1^{\frac{3}{2}} |U(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega = 2 \int_1^{\frac{3}{2}} (4(\omega - 1))^2 \,\mathrm{d}\omega = 32 \int_1^{\frac{3}{2}} \omega^2 - 2\omega + 1 \mathrm{d}\omega \tag{60}$$

$$= 32 \left[\frac{1}{3}\omega^3 - \omega^2 + \omega \right]_1^{\frac{3}{2}} = 32 \left(\frac{9}{8} - \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{32}{24} = \frac{4}{3} \tag{61}$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} |U(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega = \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} 4 \mathrm{d}\omega = 4 \tag{62}$$

Dies erlaubt die Bestimmung der umgesetzten Energie:

$$E = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4}{3} + 4 \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{16}{3} \right) = \frac{8}{3\pi} \tag{63}$$

3.5

Das Spektrum kann wie folgt durch die Summe von Dreiecksfunktionen dargestellt werden:

$$U(\omega) = 4d_1(\omega - 2) + 4d_1(\omega + 2) - 2d_{\frac{1}{2}}(\omega + 2) - 2d_{\frac{1}{2}}(\omega - 2) \tag{64}$$

Die Korrespondenz der Dreiecksfunktionen kann mithilfe der Symmetrieregel bestimmt werden:

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega), \quad \mathcal{F}\{d_T(t)\} = \frac{4}{T\omega^2}\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) \tag{65}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{4}{Tt^2}\sin^2\left(\frac{tT}{2}\right)\right\} = 2\pi d_t(-\omega) = 2\pi d_T(\omega) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{d_T(\omega)\} = \frac{2}{T\pi t^2}\sin^2\left(\frac{tT}{2}\right) \tag{66}$$

Aufgrund der Linearität der Fourier-Transformation ergibt sich mithilfe des Verschiebungssatzes:

$$u(t) = 4e^{j2t}\frac{2}{\pi t^2}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) + 4e^{-j2t}\frac{2}{\pi t^2}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) - 2e^{j2t}\frac{4}{\pi t^2}\sin^2\left(\frac{t}{4}\right) - 2e^{-j2t}\frac{4}{\pi t^2}\sin^2\left(\frac{t}{4}\right) \tag{67}$$

Vereinfachen liefert:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{8}{\pi t^2}\left(e^{j2t} + e^{-j2t}\right)\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{8}{\pi t^2}\left(e^{j2t} + e^{-j2t}\right)\sin^2\left(\frac{t}{4}\right) && (68) \\ &= \frac{16}{\pi t^2}\cos(2t)\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{4}\right)\right) && (69) \end{aligned}$$

3.6

Es gilt in diesem Fall:

$$U(\omega) = G(\omega)V(\omega) \Rightarrow G(\omega) = \frac{U(\omega)}{V(\omega)} = U(\omega) \tag{70}$$

Die Ausgangsgröße $\tilde{u}(t)$ ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{U(\omega)\mathcal{F}\left\{\sin\left(\frac{6}{5}\omega\right)\right\}\right\} && (71) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{U(\omega)j\pi\left[\delta\left(\omega + \frac{6}{5}\right) - \delta\left(\omega - \frac{6}{5}\right)\right]\right\} && (72) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{j\pi\left[U\left(-\frac{6}{5}\right)\delta\left(\omega + \frac{6}{5}\right) - U\left(\frac{6}{5}\right)\delta\left(\omega - \frac{6}{5}\right)\right]\right\} && (73) \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{4j\pi}{5}\left[\delta\left(\omega + \frac{6}{5}\right) - \delta\left(\omega - \frac{6}{5}\right)\right]\right\} && (74) \\ &= \frac{4}{5}\sin\left(\frac{6}{5}t\right) && (75) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

4.1

Da die Anfangswerte verschwinden kann die Differenzengleichung einfach in den z-Bereich überführt werden:

$$z^{-3}Y_z(z) + 3z^{-2}Y_z(z) + z^{-1}Y_z(z) + 5Y_z(z) = -z^{-3}U_z(z) + 2z^{-2}U_z(z) - z^{-1}U_z(z) \tag{76}$$

Die Übertraungsfunktion ergibt sich durch Ausklammern und sortieren der Größen zu:

$$G_z(z) = \frac{Y_z(z)}{U_z(z)} = \frac{-z^{-3} + 2z^{-2} - z^{-1}}{z^{-3} + 3z^{-2} + z^{-1} + 5} \tag{77}$$

Erweitern mit z^{-3} führt auf die gesuchte Darstellung:

$$G_z(z) = \frac{-z^2 + 2z - 1}{5z^3 + z^2 + 3z + 1} \tag{78}$$

4.2

Die Folge $(u_k) = k$ entsteht durch Abtastung aus $f(t) = t$ durch Abtastung mit $T = 1$.
Die Korrespondenztabelle liefert:

$$\mathcal{Z}\{t\} = \frac{Tz}{(z-1)^2} \Rightarrow U_z(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \tag{79}$$

Damit lässt sich die z-Bereichsdarstellung der Ausgangsfolge wie folgt bestimmen:

$$Y_z(z) = G_z(z)\,U_z(z) = \frac{-z^2 + 2z - 1}{5z^3 + z^2 + 3z + 1}\,\frac{z}{z^2 - 2z + 1} = \frac{-z}{5z^3 + z^2 + 3z + 1} \tag{80}$$

4.3

Die Taylor-Koeffizientenformel erlaubt die Berechnung der Folgenglieder:

$$f_k = \frac{1}{k!}\left[\frac{\mathrm{d}^k F_z(x^{-1})}{\mathrm{d}x^k}\right]\Bigg|_{x=0} \qquad x = z^{-1} \tag{81}$$

Für das erste Glied gilt:

$$f_0 = \frac{1}{0!}\,F_z(x^{-1})\big|_{x=0} = \frac{1}{(x^{-1}-1)(x^{-1}-2)^2}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{(x^{-1}-1)(x^{-2}-4x^{-1}+4)}\bigg|_{x=0} \tag{82}$$

$$= \frac{1}{x^{-3} - 4x^{-2} + 4x^{-1} - x^{-2} + 4x^{-1} - 4}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{x^{-3} - 5x^{-2} + 8x^{-1} - 4}\bigg|_{x=0} \tag{83}$$

$$= \frac{x^3}{-4x^3 + 8x^2 - 5x + 1}\bigg|_{x=0} = 0 \tag{84}$$

Für das zweite Folgenglied werden zunächst Zähler und Nenner getrennt betrachtet:

$$F_z\left(x^{-1}\right) = \frac{x^3}{-4x^3+8x^2-5x+1} = \frac{a\left(x\right)}{b\left(x\right)} \tag{85}$$

$$\frac{\mathrm{d}a\left(x\right)}{\mathrm{d}x} = 3x^2 \tag{86}$$

$$\frac{\mathrm{d}b\left(x\right)}{\mathrm{d}x} = -12x^2+16x-5 \tag{87}$$

Damit ergibt sich das erste Folgenglied wie folgt:

$$f_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{\mathrm{d}^1 F_z\left(x^{-1}\right)}{\mathrm{d}x^1}\right]\Bigg|_{x=0} = \frac{\frac{\mathrm{d}a(x)}{\mathrm{d}x}b\left(x\right) - a\left(x\right)\frac{\mathrm{d}b(x)}{\mathrm{d}x}}{b^2\left(x\right)}\Bigg|_{x=0} = \frac{0-0}{1} = 0 \tag{88}$$

4.4

Es wird folgender Ansatz zur Partialbruchzerlegung betrachtet:

$$\frac{1}{\left(z-1\right)\left(z-2\right)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{\left(z-2\right)^2} \tag{89}$$

Durch Multiplizieren mit den Nennern und Auswerten ergibt sich für die Koeffizienten:

$$\lim_{z\to1}\frac{1}{\left(z-2\right)^2} = \frac{1}{1} = A \tag{90}$$

$$\lim_{z\to2}\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1} = C \tag{91}$$

$$\lim_{z\to3}\frac{1}{\left(z-1\right)\left(z-2\right)^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + B + 1 \Rightarrow B = -1 \tag{92}$$

Damit ergibt sich:

$$\frac{1}{\left(z-1\right)\left(z-2\right)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{-1}{z-2} + \frac{1}{\left(z-2\right)^2} \tag{93}$$

Die Partialbrüche werden anschließend auf eine für die Rücktransformation geeignete Form gebracht:

$$\frac{1}{z-1} + \frac{-1}{z-2} + \frac{1}{\left(z-2\right)^2} = z^{-1}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-2} + \frac{z}{\left(z-2\right)^2}\right) \tag{94}$$

Unter Beachtung der Rechtsverschiebungsregel ergibt sich folgende Rücktransformierte für $k \geq 1$:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{z^{-1}\left(\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-2} + \frac{z}{\left(z-2\right)^2}\right)\right\} = 1^{k-1}\binom{k-1}{0} - 2^{k-1}\binom{k-1}{0} + 2^{-1}2^{k-1}\binom{k-1}{1} \tag{95}$$

Vereinfachen liefert das gesuchte Ergebnis:

$$1^{k-1}\binom{k-1}{0} - 2^{k-1}\binom{k-1}{0} + 2^{-1}2^{k-1}\binom{k-1}{1} = 1 - 2^{k-1} + 2^{k-2}\left(k-1\right) \quad k \geq 1 \tag{96}$$

4.5

Betrachtet man die Funktion in den Abtastpunkten erhält man folgende Werte für (f_k):

$$(f_k) = \{0, -1, 4, -9, 16, -25, ...\} \Rightarrow (f_k) = (-1)^k k^2 \tag{97}$$

Da lediglich eine Reihendarstellung der z-Transformierten gefordert ist, kann diese direkt mithilfe der Definition der z-Transformation angegeben werden:

$$F_z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k k^2 z^{-k} \tag{98}$$

4.6

Aufgrund der enthaltenen Abtastung ist die z-Transformierte nicht eindeutig. Beispielsweise existieren Schwingungen höherer Frequenz als in der vorigen Aufgabe gezeigt, die in den Abtastpunkten mit der in der vorigen Aufgabe gezeigten Funktion übereinstimmen, damit eine identische Zahlenfolge ergeben und somit auf die gleiche z-Transformierte führen.