Übungsblatt 4

Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Sommersemester 2020

Aufgabe 4.1 ● ○ ○ Rechenregeln der Laplace-Transformation

4.1.1 Bestimmen Sie die Zeitfunktion, die mit der folgenden Funktion im Laplace-Bereich korrespondiert:

$$F\left(s\right) = \frac{s+a}{\left(s+a\right)^2 + \omega^2} \tag{1}$$

4.1.2 Bestimmen Sie den Verlauf des Stromes $i\left(t\right)$ des in der Vorlesung vorgestellten RL-Glieds durch Anwendung der Faltungsregel. Die Differentialgleichung lautet im Laplace-Bereich wie folgt:

$$I\left(s\right) = \frac{U_0}{s\left(R + Ls\right)} \tag{2}$$

4.1.3 Ist die Anwendung der Faltungsregel in 4.1.2 der einzige Weg, um die Rücktransformation in den Zeitbereich durchzuführen?

4.1.4 Die Differentialgleichung des Feder-Masse-Dämpfer Systems von Übungsblatt 1 hat die folgende Form im Laplace-Bereich:

$$\frac{F_{E0}}{s} = ms^2X\left(s\right) + dsX\left(s\right) + kX\left(s\right) \tag{3}$$

Bestimmen Sie die Auslenkung x_{stat}, die sich im stationären Zustand einstellt, wenn $d > 0$ gilt.

Aufgabe 4.2 ● ● ● Verschiebungsregel der Laplace-Transformation

4.2.1 Berechnen Sie die Laplace-Transformierte einer allgemeinen periodischen Funktion:

$$f\left(t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}\left(t - kT\right) \tag{4}$$

Hierbei soll neben $T \in \mathbb{R}_{>0}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gelten:

$$\tilde{f}\left(t\right) = \begin{cases} \text{beliebig} & t \in [0, T] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{5}$$

Hinweis: Setzen Sie die geometrische Reihe im Bildbereich ein, um Ihr Ergebnis zu vereinfachen.

4.2.2 Um eine periodische rechteckförmige Eingangsspannung zu untersuchen, sei $\tilde{f}\left(t\right)$ nun wie folgt definiert:

$$\tilde{f}\left(t\right) = \begin{cases} 1 & t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{6}$$

Skizzieren Sie $f\left(t\right)$ und stellen Sie $\tilde{f}\left(t\right)$ als Summe von Sprungfunktionen dar.

4.2.3 Nutzen Sie Ihr Ergebnis aus der ersten Teilaufgabe, um die Laplace-Transformierte der periodischen Rechteckfunktion zu bestimmen.

Aufgabe 4.3 ● ● ● Rechenregeln der Laplace-Transformation

4.3.1 Welche anschauliche Bedeutung hat das Faltungsintegral?

4.3.2 Bestimmen Sie $f(t) * f(t)$ mit folgender Funktion $f(t)$ im Zeitbereich:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, T] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{7}$$

Hierbei gelte $T \in \mathbb{R}_{>0}$.

4.3.3 Führen Sie die Faltung nun im Bildbereich durch und stellen Sie das Ergebnis im Zeitbereich dar.

Aufgabe 4.4 ● ○ ○ Gleichstrommotor

4.4.1 Betrachten Sie den Anfahrvorgang eines Gleichstrommotors aus dem Stillstand, der in einer Roboterplattform verbaut ist. Die Laplace-Transformierte $\Omega(s)$ der Drehzahl $\omega(t)$ ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$\Omega(s) = \frac{U(s)}{\left(\frac{JL}{k_A}s^2 + \frac{JR}{k_A}s + k_M\right)} \tag{8}$$

Hierbei ist $J \in \mathbb{R}$ die Massenträgheit der Welle und eines Rads des Roboters, $L \in \mathbb{R}$ die Induktivität der Wicklungen des Motors, $R \in \mathbb{R}$ der Widerstand der Wicklugnen des Motors und $k_A\mathbb{R}$ sowie $k_M\mathbb{R}$ Konstanten, die die Eigenschaften des Motors beschreiben. Welche stationäre Drehzahl ω_{stat} stellt sich für eine Eingangsspannung $u(t) = U_0\sigma(t)$ ein? Welche Drehzahl $\omega(0)$ ergibt sich bei Anwendung des Anfangswertsatzes?

4.4.2 Wenden Sie den Endwertsatz bei einem Betrieb mit einer Wechselspannung $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$ an.