

Übungsblatt 8

Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Sommersemester 2020

Aufgabe 8.1 ••◦ Zweiseitige Laplace-Transformation

8.1.1 Berechnen Sie die Bildbereichsfunktion der folgenden Funktion $f(t)$ unter Anwendung der zweiseitigen Laplace-Transformation:

$$f(t) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{t^2}{4a}} \quad (1)$$

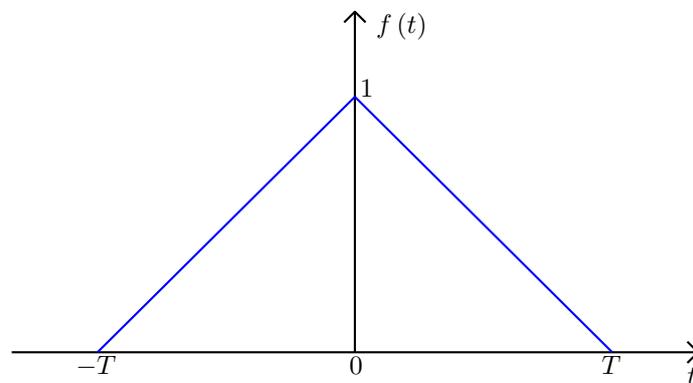
Hierbei gilt $a \in \mathbb{R}_{>0}$ sowie der folgende Zusammenhang:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (2)$$

8.1.2 Nutzen Sie das Ergebnis der vorigen Teilaufgabe, um die Fourier-Transformierte von $f(t)$ zu bestimmen.

Aufgabe 8.2 ••• Fourier-Transformation

8.2.1 Berechnen sie die Fourier-Transformierte der Dreiecksfunktion $f(t)$:



Verwenden Sie hierbei den folgenden Zusammenhang, um Ihr Ergebnis ohne Summe darzustellen:

$$\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B) \quad (3)$$

8.2.2 Nutzen Sie die Symmetrieeigenschaft der Fourier-Transformation, um aus der in der vorigen Teilaufgabe bestimmten Korrespondenz eine weitere abzuleiten.

Aufgabe 8.3 •◦◦ Gerade und ungerade Funktionen

8.3.1 Welche mathematischen Eigenschaften gelten für gerade Funktionen, welche für ungerade?

8.3.2 Zeigen Sie, dass das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade ist.

8.3.3 Vereinfachen Sie das folgende Integral:

$$\int_{-a}^a f(t) dt \quad (4)$$

Hierbei sei $a \in \mathbb{R}$ und $f(t)$ eine gerade Funktion.

8.3.4 Zeigen Sie, dass das folgende Integral verschwindet:

$$\int_{-a}^a g(t) dt \quad (5)$$

Hierbei sei $a \in \mathbb{R}$ und $g(t)$ eine ungerade Funktion.

Aufgabe 8.4 ••◦ Fourier-Transformation reeller Funktionen

8.4.1 Zeigen Sie, dass die folgende Funktion gerade ist:

$$f(t) = \sigma(t+T) - \sigma(t-T) \quad (6)$$

8.4.2 Zeigen Sie, dass die folgende Funktion ungerade ist:

$$g(t) = -\sigma(t+T) + 2\sigma(t) - \sigma(t-T) \quad (7)$$

8.4.3 Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $f(t)$ aus Teilaufgabe 8.4.1.

8.4.4 Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion $g(t)$ aus Teilaufgabe 8.4.2. Verwenden Sie hierbei den folgenden Zusammenhang, um das Ergebnis ohne Summe darzustellen:

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B) \quad (8)$$

8.4.5 Betrachten Sie das Ergebnis aus der vorigen Teilaufgabe erneut. Welchen Einfluss hat der Parameter T auf den Verlauf der Zeit- und Frequenzbereichsfunktionen?