Übungsblatt 9
Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Sommersemester 2020

Aufgabe 9.1 • ◦ ◦ Verschiedenes

9.1.1 Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der folgenden Doppelrechteckfunktion erneut:

$$f(t) = -\sigma(t+T) + 2\sigma(t) - \sigma(t-T) \tag{1}$$

Nutzen Sie hierzu die nun bekannten Rechenregeln der Fourier-Transformation.

9.1.2 Bestimmen Sie die Frequenzbereichsdarstellung der auf einen Träger $\cos(\omega_0 t)$ modulierten Funktion $f(t)$, wie sie in der Nachrichtentechnik bei der Übertragung des Signals $f(t)$ genutzt werden könnte:

$$g(t) = f(t)\cos(\omega_0 t) \tag{2}$$

Verwenden Sie hierbei die Modulationsregel der Fourier-Transformation.

9.1.3 Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von $g(t)$ nun mithilfe der Multiplikationsregel.

9.1.4 Leiten Sie die Zeitbereichsdarstellung der folgenden Faltung zweier Bildbereichsfunktionen mit der Definition der Fourier-Transformation her:

$$F(\omega) = F_1(\omega) * F_2(\omega) \tag{3}$$

9.1.5 Die Dynamik eines RC-Gliedes konnte im Rahmen eines früheren Übungsblatts mit folgender Differentialgleichung beschrieben werden:

$$u_A(t) + RC\frac{\mathrm{d}u_A(t)}{\mathrm{d}t} = u_E(t) \tag{4}$$

Bestimmen Sie die Freuqenzbereichsdarstellung des Ausgangssignals in Abhängigkeit des Spektrums des Eingangssignals $U_E(\omega)$.

Aufgabe 9.2 • • • Abtastung von Signalen

In der Praxis werden Signale oftmals nicht als kontinuierliche Signale verarbeitet, sondern sie werden zu diskreten Zeitpunkten abgetastet, um sie anschließend zeitdiskret weiterzuverarbeiten. Nach der Verarbeitung müssen die zeitdiskreten Signale wieder in zeitkontinuierliche überführt werden. In dieser Aufgabe wird dieser Prozess mit den mathematischen Werkzeugen, die aus der Vorlesung bekannt sind, analysiert.

9.2.1 Der erste Schritt ist die Abtastung eines Signals $x(t)$. Hierbei muss aus dem kontinuierlichen Signal ein Signal erzeugt werden, das lediglich zu diskreten Zeitpunkten kT mit $T \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ von Null verschieden ist. Nutzen Sie Dirac-Impulse zur Abtastung und berechnen Sie die Darstellung der resultierenden Funktion im Frequenzbereich. Hierbei gilt die sogenannte Poisson'sche Summenformel:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{j2\pi kt}{T}} \tag{5}$$

9.2.2 Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass es sich bei $x\,(t)$ um ein bandbegrenztes Signal handelt. Somit sind im Signal lediglich Frequenzen enthalten, die kleiner als eine Grenzfrequenz ω_G sind. Es gilt also:

$$X\,(\omega) = 0 \quad \text{für } \; |\omega| > \omega_G \tag{6}$$

Skizzieren Sie die Frequenzbereichsdarstellung des abgetasteten Signals. Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit das ursprüngliche Signal $X\,(\omega)$ unverfälscht im abgetasteten Signal enthalten bleibt?

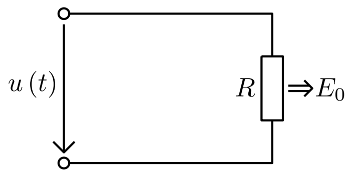
9.2.3 Was passiert, wenn das Kriterium aus der vorigen Teilaufgabe verletzt wird?

9.2.4 Ihr Kriterium sei nun erfüllt. Nutzen Sie ein geeignetes Rechteckfenster $R\,(\omega)$, um das Spektrum des kontinuierlichen Signals $X\,(\omega)$ aus dem abgetasteten Signal zu extrahieren.

9.2.5 Überführen Sie das extrahierte Signal aus dem Frequenzbereich wieder in den Zeitbereich um erneut ein kontinuierliches Signal zu erhalten. Berechnen Sie außerdem, wie aus den Werten zu den Abtastzeitpunkten $x\,(kT)$ wieder ein kontinuierliches Signal rekonstruiert werden kann.

Aufgabe 9.3 ● ● ○ Wechselspannung

Bei der Betrachtung des folgenden ohmschen Widerstandes wird die Energie E_0 abgegeben:



Die Eingangsspannung $u\,(t)$ verläuft dabei wie folgt:

$$u\,(t) = U_0 \frac{\sin\left(\omega_0 t\right)}{\omega_0 t} \tag{7}$$

Bestimmen Sie die Frequenz ω_0 der Spannung $u\,(t)$ in Abhängigkeit der für $t \in (-\infty, \infty)$ abgegebenen Energie E_0.