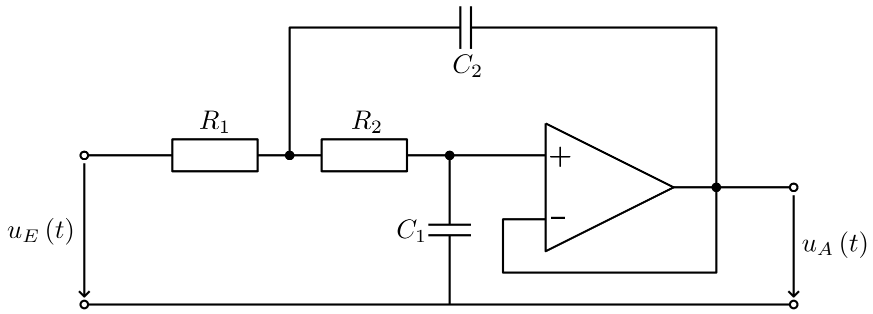
# Übungsblatt 12 - Beispielklausur

## Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Sommersemester 2020

### Aufgabe 12.1 • • • Laplace-Transformation

**12.1.1** Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der folgenden Filterschaltung:




Betrachten Sie hierbei $u_E(t)$ als Eingangsgröße des Systems und $u_A(t)$ als Ausgangsgröße. Sie können die üblichen, am Operationsverstärker gültigen, Vereinfachungen nutzen. Die Kondensatoren seien zum Zeitpunkt $t = 0$ ungeladen.

**12.1.2** Gegeben sei die folgende Laplace-Transformierte einer Differentialgleichung:

$$\left(s^2 + 2s + 1\right) Y(s) = (s - 2)\, U(s) + 3s + 5 \tag{1}$$

Bestimmen Sie die Darstellung der Differentialgleichung im Zeitbereich sowie alle möglichen Anfangswerte zum Zeitpunkt $t = +0$.

**12.1.3** Bestimmen Sie die Zeitfunktion zur folgenden Laplace-Transformierten:

$$F(s) = \frac{2s^2 - 6s + 5}{s^3 - 6s^2 + 11s - 6} \tag{2}$$

**12.1.4** Leiten Sie die Rechtsverschiebungsregel der Laplace-Transformation her. Verwenden Sie hierfür ausschließlich die Definition der Laplace-Transformation.

**12.1.5** Unter welcher Bedingung gilt $f(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-t_0 s} F(s)$?

### Aufgabe 12.2 • • • Komplexe Analysis

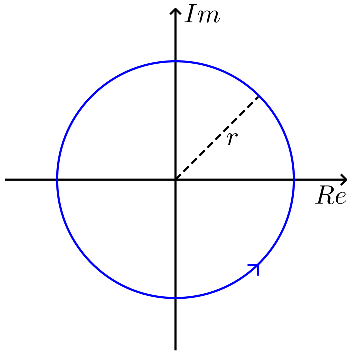
**12.2.1** Im Folgenden werde die meromorphe Funktion $F(s)$ betrachtet:

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(1 - e^{-s\pi})} \tag{3}$$

Bestimmen Sie alle Singularitäten von $F(s)$ und geben Sie Typ sowie ggf. Ordnung der Singularität an.

**12.2.2** Berechnen Sie die Residuen an den Singularitäten von $F(s)$.

**12.2.3** Nun sei die folgende Kurve in der komplexen Ebene gegeben:




Berechnen Sie, für welche $r \in \mathbb{R}_{>0}$ folgender Zusammenhang gilt:

$$\oint_C F(s)\,\mathrm{d}s = \frac{2j}{3} \tag{4}$$

**12.2.4** Bestimmen Sie die ersten drei von Null verschiedenen Glieder der Laurent-Reihe von $F(s)$ um den Punkt $s = -j$.

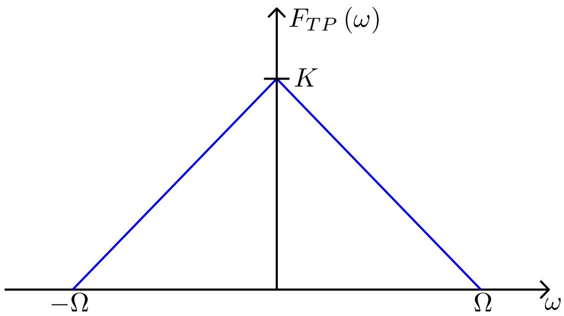
### Aufgabe 12.3 • • • Fourier-Transformation

**12.3.1** Am Ausgang eines Dreiphasengleichrichters ergibt sich folgender Spannungsverlauf:

$$u(t) = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k)^2 - 1}\cos(3k\omega_0 t)\right) \tag{5}$$

Hierbei sei $\omega_0 \in \mathbb{R}$ sowie $k \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte des Signals $u(t)$.

**12.3.2** Nun soll das Signal mithilfe eines Tiefpassfilters geglättet werden. Der Frequenzgang des Filters ist in der folgenden Abbildung dargestellt:




Berechnen Sie die Filterfunktion $f_{TP}(t)$ im Zeitbereich.

**12.3.3** In welchen Bereichen müssen die Parameter $\Omega$ und $K$ gewählt werden, damit das Ausgangssignal nur Schwingungen der Frequenzen $\omega \leq 6\omega_0$ enthält und der Gleichanteil weder gedämpft noch verstärkt wird?

**12.3.4** Berechnen Sie das Ausgangssignal des Tiefpassfilters $y(t)$ für $\Omega = 6\omega_0$ und $K = 1$, wenn das Eingangssignal der Spannungsverlauf aus (5) ist.

**Aufgabe 12.4 • • • z-Transformation**

**12.4.1** Leiten Sie aus der folgenden Differentialgleichung eine Differenzengleichung ab:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} - \frac{5}{T}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{6}{T^2}y(t) = \frac{3}{T}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{T^2}u(t) \tag{6}$$

Die Zahl $T \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bezeichnet hierbei die verwendete Abtastzeit.

**12.4.2** Die folgende Differenzengleichung beschreibt das dynamische Verhalten eines Systems mit der Eingangsfolge $(u_k)$ und der Ausgangsfolge $(y_k)$:

$$y_k + 3y_{k-1} + 2y_{k-2} = 2u_k - 2u_{k-2} \tag{7}$$

Die Ausgangsfolge verschwindet für $k < 0$, für die Eingangsfolge gilt:

$$u_k = \begin{cases} 0 & k \leq -2 \\ -\frac{1}{2} & k = -1 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases} \tag{8}$$

Ermitteln Sie $(y_k)$ durch Verwendung der z-Transformation der Differenzengleichung.