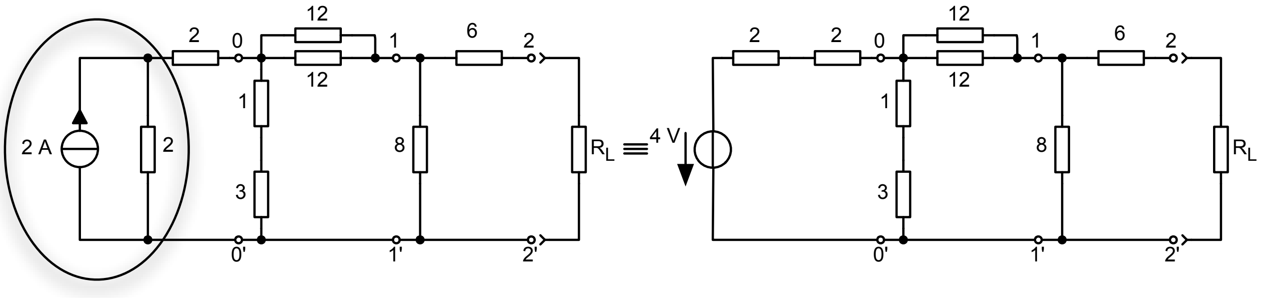
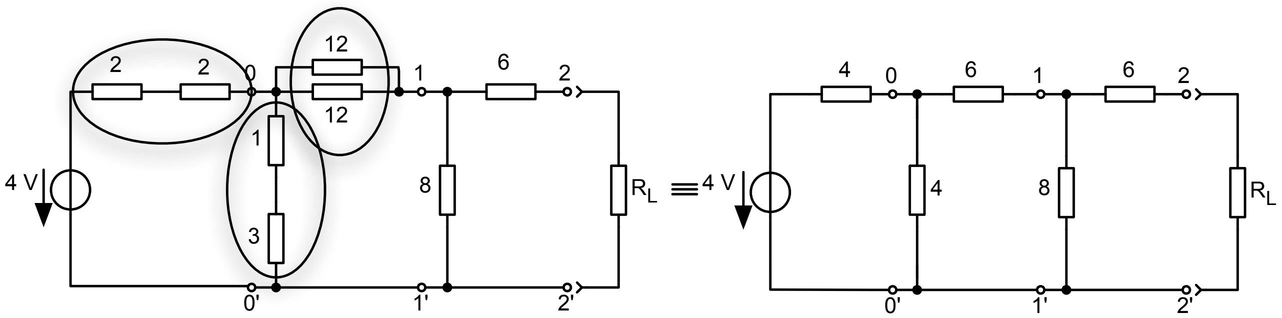
Lösung Aufgabe 1

Aufgabe 1.a)

1. Umwandlung der Stromquelle in eine Spannungsquelle:



2. Vereinfachung des Netzwerks durch Zusammenfassung der Widerstände:



3. Berechnung des Thévenin Ersatzschaltbildes bezüglich der Klemmen 1–1'

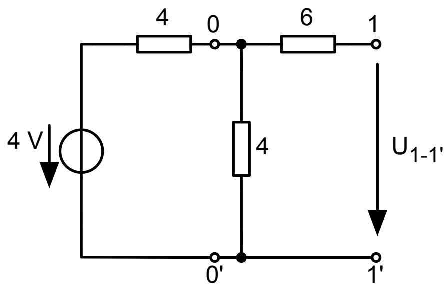
Der Ersatzwiderstand berechnet sich aus:

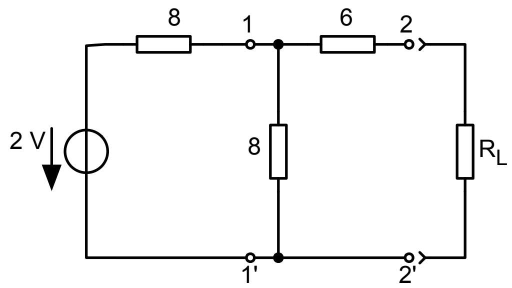
$$R_{T1-1'} = 6\Omega + \left(4\Omega \| 4\Omega\right) = 6\Omega + \frac{4\Omega \cdot 4\Omega}{4\Omega + 4\Omega} = 8\Omega$$

Die Théveninspannung berechnet sich durch die Spannungsteilerregel, da im Leerlauf durch den 6 Ω Widerstand kein Strom fließt:

$$U_{T1-1'} = \frac{4\Omega}{4\Omega + 4\Omega} 4V = 2V$$

Somit ergibt sich folgendes Netzwerk:





4. Berechnung des Thévenin Ersatzschaltbildes bezüglich der Klemmen 2–2'

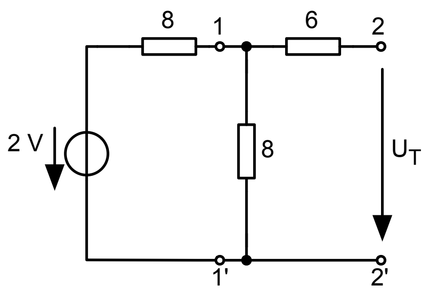
Der Ersatzwiderstand berechnet sich aus:

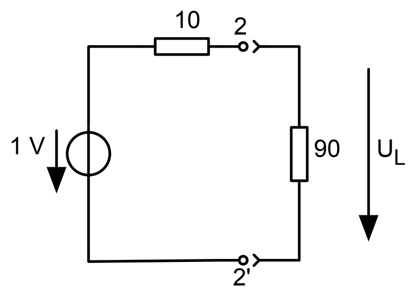
$$R_{T2-2'} = 6\Omega + \left(8\Omega \| 8\Omega\right) = 6\Omega + \frac{8\Omega \cdot 8\Omega}{8\Omega + 8\Omega} = 10\Omega$$

Die Théveninspannung berechnet sich durch die Spannungsteilerregel, da durch den 6 Ω Widerstand im Leerlauf kein Strom fließt:

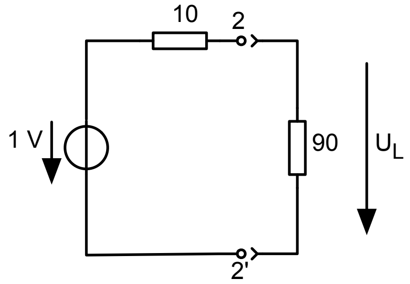
$$U_{T2-2'} = \frac{8\Omega}{8\Omega + 8\Omega} 2V = 1V$$

Somit ergibt sich folgendes Netzwerk:





Aufgabe 1.b)
Die Spannungsteilerregel definiert die Spannung über dem Lastwiderstand:



$$U_L = \frac{90\Omega}{10\Omega + 90\Omega} 1V = 0,9V$$

Daraus ergibt sich die Leistung durch

$$P = IU_L \quad \wedge \quad U_L = R_L I \quad \Rightarrow \quad P = \frac{1}{R_L} U_L^{\,2} = \frac{1}{90\Omega} 0,9^2 V^2 = 9 \text{ mW}$$

Aufgabe 1.c)
Ja, das in Aufgabenteil 1.a) berechnete Netzwerk kann weiterhin verwendet werden, da das Thévenin Theorem auch für nicht-lineare Netzwerke bezüglich der rechten Seite der Klemmen 2–2' gilt. Dies kann durch das Helmholtzsche Überlagerungsverfahren bewiesen werden.

Lösung Aufgabe 2

Aufgabe 2.a)

Abbildung 2.1:

Durch die Knotengleichung am Knoten vor dem negativen Eingang des Operationsverstärkers ergibt sich:

$$\frac{\underline{U}_e - \underline{U}_n}{R_1} - \frac{\underline{U}_n - \underline{U}_a}{R_{N1}} = 0$$

Da es sich um einen idealen Operationsverstärker handelt kann man approximieren:

$$\underline{U}_d = 0\mathrm{V} \Rightarrow \underline{U}_n = \underline{U}_p = 0\mathrm{V}$$

Dadurch ergibt sich

$$\underline{U}_a = -\frac{R_{N1}}{R_1}\underline{U}_e$$

Abbildung 2.2:

Mit

$$\underline{U}_d = 0\mathrm{V}$$

ergibt sich

$$\underline{U}_a = \underline{U}_e$$

Abbildung 2.3:

Durch die Knotengleichung am Knoten vor dem negativen Eingang des Operationsverstärkers ergibt sich:

$$\frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_n}{R_2} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_n}{R_3} - \frac{\underline{U}_n - \underline{U}_a}{R_{N2}} = 0$$

Da es sich um einen idealen Operationsverstärker handelt kann man approximieren:

$$\underline{U}_d = 0V \Rightarrow \underline{U}_n = \underline{U}_p = 0V$$

Dadurch ergibt sich

$$\underline{U}_a = -\left(\frac{R_{N2}}{R_2}\underline{U}_1 + \frac{R_{N2}}{R_3}\underline{U}_2 \right)$$

Abbildung 2.4:

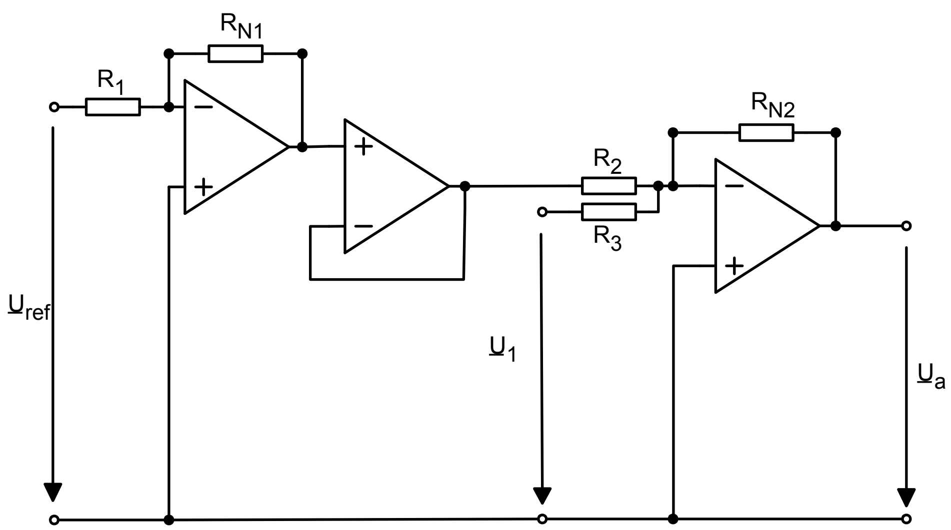
Durch

$$\underline{U}_d = 0V$$

kann man die Spannungsteilerregel anwenden:

$$\underline{U}_e = \frac{R_5}{R_4 + R_5}\underline{U}_a \quad \Leftrightarrow \quad \underline{U}_a = \frac{R_4 + R_5}{R_5}\underline{U}_e$$

Aufgabe 2.b)



Es gilt:

$$\underline{U}_a = a_{V3}\left(\underline{U}_1 - \underline{U}_{ref}\right) \quad \Rightarrow \quad -1V = a_{V3}\left(12mV - 10mV\right) \quad \Rightarrow \quad a_{V3} = -500$$

Die Übertragungsfunktion ist gegeben durch:

$$\underline{U}_a = -\left(\frac{R_{N2}}{R_2} \underline{U}_1 - \frac{R_{N2}}{R_3} \left(\frac{R_{N1}}{R_1} \underline{U}_{ref} \right) \right)$$

mit $R_2 = R_3 = R$:

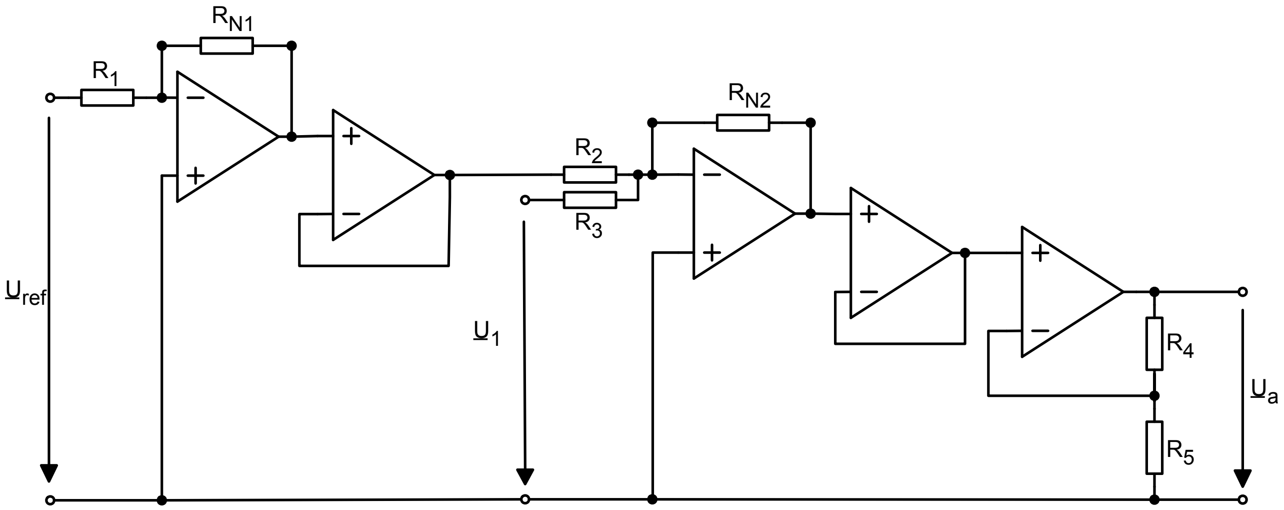
$$\underline{U}_a = -\frac{R_{N2}}{R} \left(\underline{U}_1 - \frac{R_{N1}}{R_1} \underline{U}_{ref} \right)$$

Somit ergeben sich folgende Bedingungen für die Wahl der Widerstände:

$$R_2 = R_3 \qquad \text{und} \qquad \frac{R_{N1}}{R_1} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{R_{N2}}{R} = 500$$

alternativ:

Die Schaltung aus 2.b) kann durch einen nicht-invertierenden Verstärker erweitert werden:



Es gilt:

$$\underline{U}_a = a_{V3} \left(\underline{U}_1 - \underline{U}_{ref} \right) \quad \Rightarrow \quad -1\text{V} = a_{V3} \left(12\text{mV} - 10\text{mV} \right) \quad \Rightarrow \quad a_{V3} = -500$$

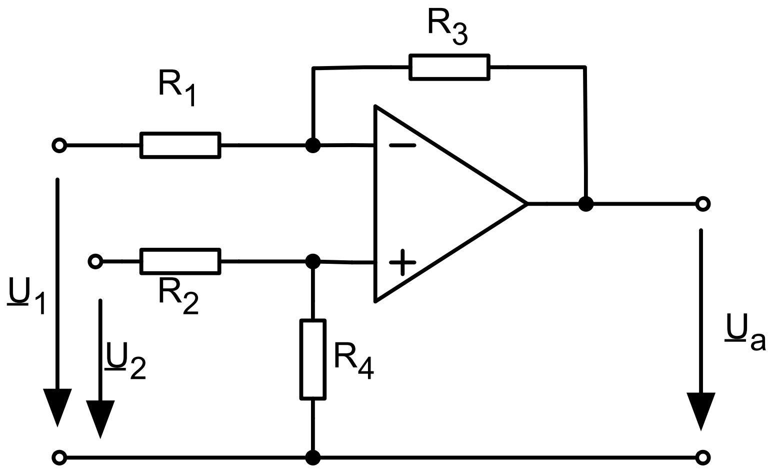
Die Übertragungsfunktion ist gegeben durch:

$$\underline{U}_a = -\frac{R_4 + R_5}{R_5} \left(\frac{R_{N2}}{R_2} \underline{U}_1 - \frac{R_{N2}}{R_3} \left(\frac{R_{N1}}{R_1} \underline{U}_{ref} \right) \right)$$

Somit ergeben sich folgende Bedingungen für die Wahl der Widerstände:

$$R_2 = R_3 \qquad \text{und} \qquad \frac{R_{N1}}{R_1} = \frac{R_{N2}}{R_3} = \frac{R_{N2}}{R_2} = 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{R_4 + R_5}{R_5} = 500$$

Aufgabe 2.c)



$$\underline{U}_a = -\frac{R_3}{R_1}\underline{U}_1 + \frac{R_3}{R_1}\frac{\left(R_4R_1 + R_4R_3\right)}{\left(R_3R_2 + R_3R_4\right)}\underline{U}_2$$

$$\text{mit } R_4R_1 = R_3R_2$$

$$\underline{U}_a = \frac{R_3}{R_1}\left(\underline{U}_2 - \underline{U}_1\right)$$

Lösung Aufgabe 3

Aufgabe 3.a) und 3.b)

Abbildung 3.1:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+j\omega R_2 C_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+j\Omega_1}$$

mit

$$\Omega_1 = \frac{\omega}{\omega_{0-1}} \quad \Rightarrow \quad \omega_{0-1} = \frac{1}{R_2 C_2};$$

Abbildung 3.2:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{R_4}{R_3}\frac{j\omega R_3 C_3}{1+j\omega R_3 C_3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{R_4}{R_3}\frac{j\Omega_2}{1+j\Omega_2}$$

mit

$$\Omega_2 = \frac{\omega}{\omega_{0-2}} \quad \Rightarrow \quad \omega_{0-2} = \frac{1}{R_3 C_3}$$

Aufgabe 3.c)

Abbildung 3.1 – Durch die Werte ist folgende Übertragungsfunktion gegeben:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+j\omega R_2 C_2} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -10\frac{1}{1+j\Omega_1}$$

Dadurch ergibt sich folgendes Bodediagramm:

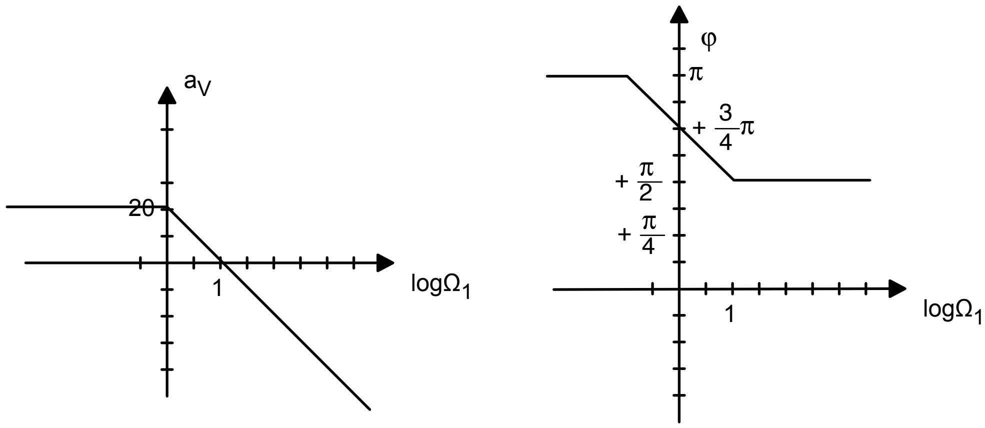
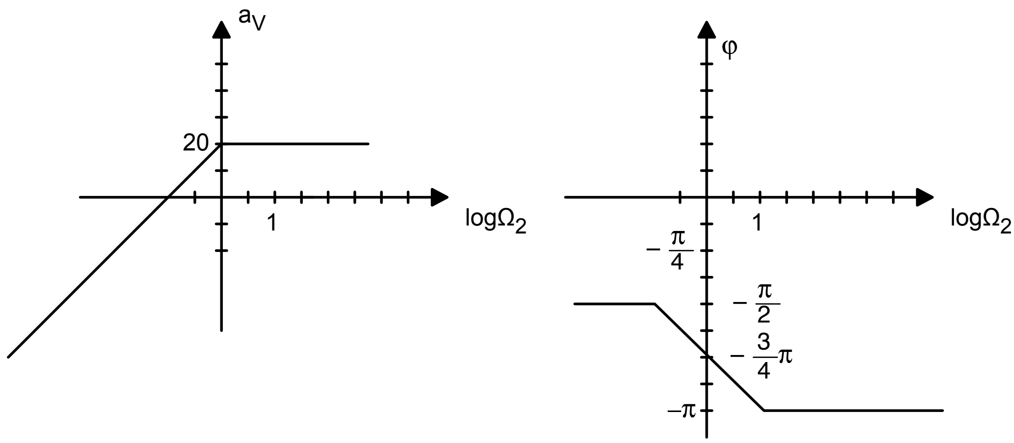


Abbildung 3.2 – Durch die Werte ist folgende Übertragungsfunktion gegeben:

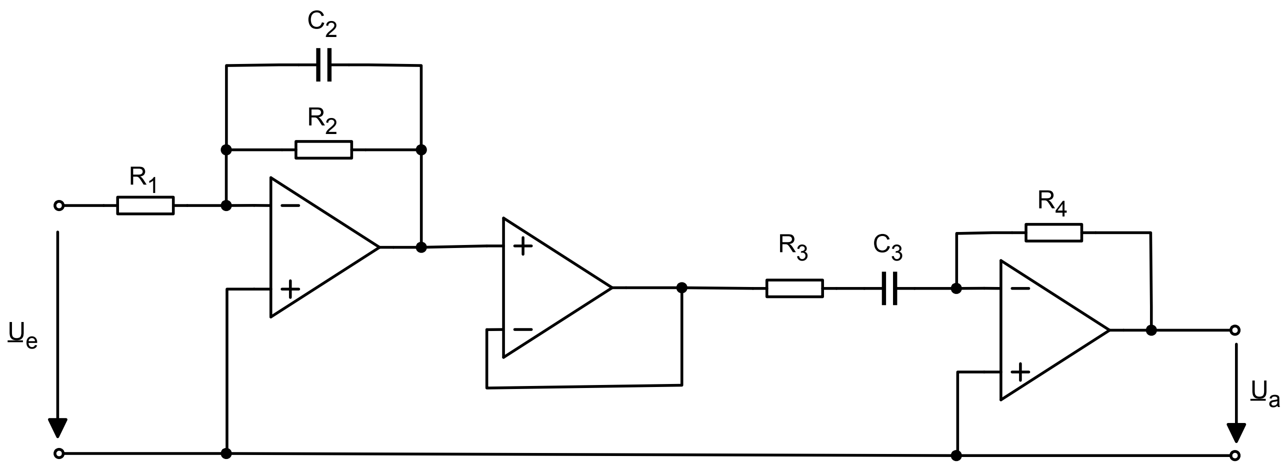
$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{R_4}{R_3}\frac{j\omega R_3 C_3}{1+j\omega R_3 C_3} = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -10\frac{j\Omega_2}{1+j\Omega_2}$$

Dadurch ergibt sich folgendes Bodediagramm:

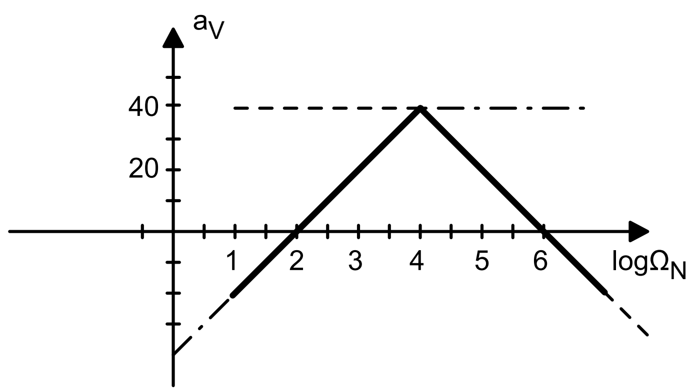


Aufgabe 3.d)

Die gewünschte Schaltung mit Amplitudengang sieht wie folgt aus:



$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \left(-\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{1+j\omega R_2C_2}\right)\left(-\frac{R_4}{R_3}\frac{j\omega R_3C_3}{1+j\omega R_3C_3}\right) = \frac{R_2R_4}{R_1R_3}\frac{\left(j\omega R_3C_3\right)}{\left(1+j\omega R_2C_2\right)\left(1+j\omega R_3C_3\right)}$$



Aufgabe 3e)

C_2 muss 1 pF gewählt werden, da

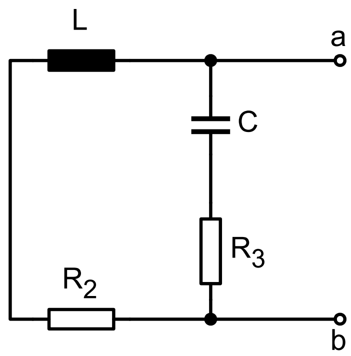
$$\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2} = \frac{1}{100\cdot10^3}\frac{1}{1\cdot10^{-12}} = 10^7$$

C_3 muss 0,1 nF sein, da

$$\frac{1}{R_3C_3} = \frac{1}{1\cdot10^3}\frac{1}{1\cdot10^{-10}} = 10^7$$

Lösung Aufgabe 4

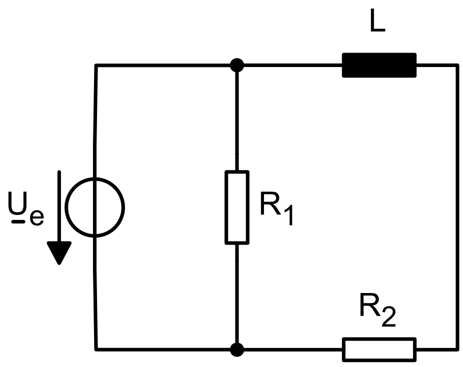
Aufgabe 4.a)
Die Spannungsquelle wird durch einen Kurzschluss und die Stromquelle durch einen Leerlauf ersetzt. Dadurch ergibt sich zur Berechnung der Impedanzen folgendes Netzwerk:



$$\underline{Z}_e = \frac{\left(R_2 + j\omega L\right)\left(\frac{1}{j\omega C} + R_3\right)}{\left(R_2 + j\omega L\right) + \left(\frac{1}{j\omega C} + R_3\right)}$$

$$= \frac{\left(R_2 R_3 + \frac{L}{C}\right) + j\left(\omega L R_3 - \frac{R_2}{\omega C}\right)}{\left(R_2 + R_3\right) + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

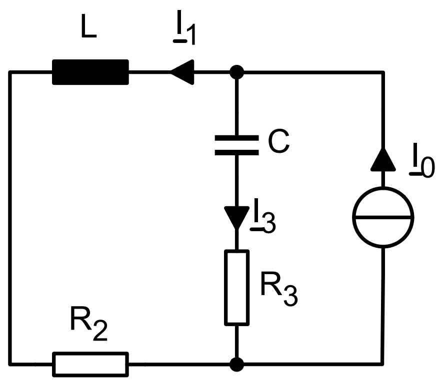
Aufgabe 4.b)
Komplexe Leistung $\underline{S}$, Wirkleistung P und Blindleistung Q bei kurzgeschlossenen Klemmen a–b:



Die Wirkleistung P und Scheinleistung Q sind gegeben durch:

$$\underline{S} = \underline{U}_e \underline{I}^* = \left|\underline{U}_e\right|^2 \underline{Y}^*$$
$$P = \mathrm{Re}\left\{\underline{S}\right\}$$
$$Q = \mathrm{Im}\left\{\underline{S}\right\}$$
$$\underline{Y} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + j\omega L} = \frac{1}{R_1} + \frac{R_2 - j\omega L}{(R_2 + j\omega L)(R_2 - j\omega L)} = \frac{1}{R_1} + \frac{R_2 - j\omega L}{R_2^{\,2} + \omega^2 L^2} = \frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2^{\,2} + \omega^2 L^2} - j\frac{\omega L}{R_2^{\,2} + \omega^2 L^2}$$
$$\underline{S} = \left|\underline{U}_e\right|^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2^{\,2} + \omega^2 L^2} + j\frac{\omega L}{R_2^{\,2} + \omega^2 L^2}\right) = \left|\underline{U}_e\right|^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2^{\,2} + \omega^2 L^2}\right) + j\left|\underline{U}_e\right|^2 \left(\frac{\omega L}{R_2^{\,2} + \omega^2 L^2}\right)$$
$$P = \mathrm{Re}\left\{\underline{S}\right\} = \left|\underline{U}_e\right|^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_2^{\,2} + \omega^2 L^2}\right)$$
$$Q = \mathrm{Im}\left\{\underline{S}\right\} = \left|\underline{U}_e\right|^2 \left(\frac{\omega L}{R_2^{\,2} + \omega^2 L^2}\right)$$

Aufgabe 4.c)
Die Ströme berechnen sich mit Hilfe der Stromteilerregel bei folgendem Netzwerk:



$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_{ges}}{\underline{Z}_1}\underline{I}_0 \qquad \underline{I}_3 = \frac{\underline{Z}_{ges}}{\underline{Z}_3}\underline{I}_0$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 10\Omega \quad \omega L = 20\Omega \quad \omega C = 10^{-1}\Omega^{-1} \quad \underline{I}_0 = (-5+j5)\,A$$

$$\underline{Z}_1 = R_2 + j\omega L = (10+j20)\Omega = 10(1+j2)\Omega$$

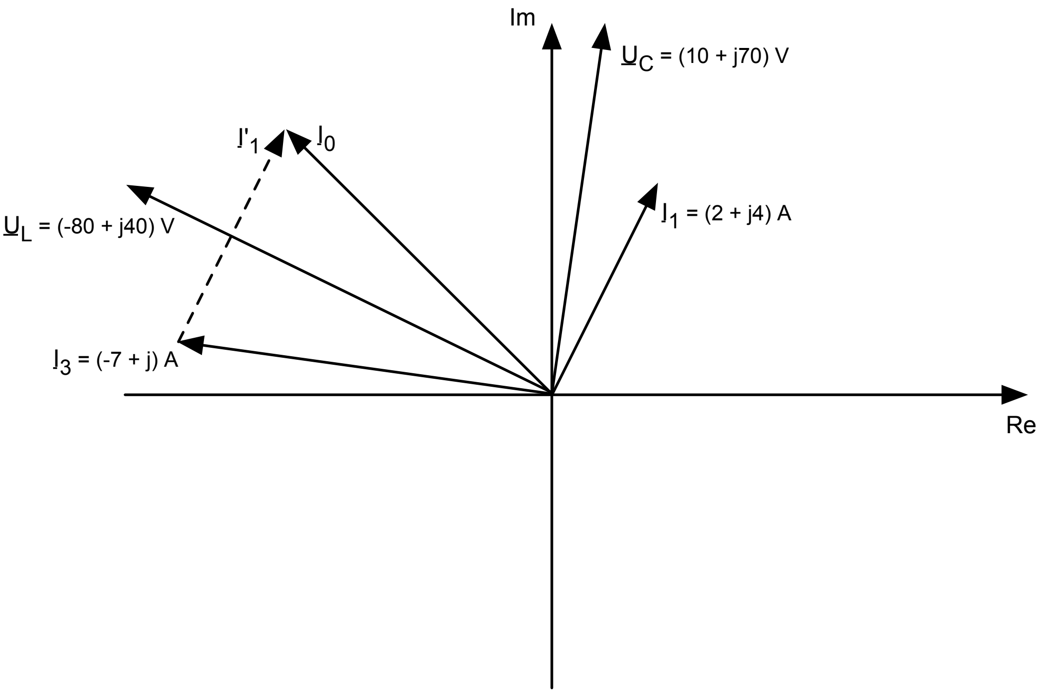
$$\underline{Z}_3 = R_3 - j\frac{1}{\omega C} = (10-j10)\Omega = 10(1-j)\Omega$$

$$\underline{Z}_{ges} = \frac{(R_2 + j\omega L)\left(R_3 - j\frac{1}{\omega C}\right)}{(R_2+R_3) + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{10(1+j2)\cdot 10(1-j)}{10\left[(1+1)+j(2-1)\right]}\Omega = 2(7-j)\Omega$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_{ges}}{\underline{Z}_1}\underline{I}_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 = \frac{2(7-j)\Omega}{10(1+j2)\Omega}(-5+j5)\,A = \frac{1}{5}\frac{(7-j)(1-j2)(-5+j5)}{(1^2+2^2)}A = (2+j4)\,A$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{Z}_{ges}}{\underline{Z}_3}\underline{I}_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_3 = \frac{2(7-j)\Omega}{10(1-j)\Omega}(-5+j5)\,A = \frac{1}{5}\frac{(7-j)(1+j)(-5+j5)}{(1^2+1^2)}A = (-7+j)\,A$$

Aufgabe 4.d.i-iii)
Zur Konstruktion sollte man zum einen Vektoraddition anwenden und wissen, dass der Strom der Spannung um 90 Grad bei einem Kondensator voraus eilt und 90 Grad bei einer Spule hinterher eilt.



Kontrolle:

$$\underline{U}_L = \underline{I}_1 j\omega L = \left(2 + j4\right) 20\text{V} = (-80 + j40)\text{V} \quad \Rightarrow \quad \left|\underline{U}_C\right| = \sqrt{80^2 + 40^2}\,\text{V} = 89{,}44\text{V}$$

$$\underline{U}_C = \underline{I}_3 \left(-j\frac{1}{\omega C}\right) = \left(-7 + j\right)\left(-j10\right)\text{V} = (10 + j70)\text{V} \quad \Rightarrow \quad \left|\underline{U}_C\right| = \sqrt{10^2 + 70^2}\,\text{V} = 70{,}71\text{V}$$

Aufgabe 4.d.iv)
Die Phasendifferenz errechnet sich wie folgt:

$$\varphi_{U_L} = \pi + \arctan\left\{\frac{40}{-80}\right\} = 2{,}6779 \equiv 153{,}43^\circ$$

$$\varphi_{Uc} = \arctan\left\{\frac{70}{10}\right\} = 1{,}4289 \equiv 81{,}87^\circ$$

$$\varphi_{I_0} = \pi + \arctan\left\{\frac{5}{-5}\right\} = 2{,}3562 \equiv 135^\circ$$

$$\varphi_{U_L I_0} = \varphi_{U_L} - \varphi_{I_0} = 2{,}6779 - 2{,}3562 = 0{,}3217 \equiv 18{,}43^\circ$$

$$\varphi_{U_C I_0} = \varphi_{U_L} - \varphi_{I_0} = 1{,}4289 - 2{,}3562 = -0{,}9273 \equiv -53{,}13^\circ$$

Lösung Aufgabe 5

Aufgabe 5.a)
Durch die Maschenregel ist gegeben:

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{U}_3 + \underline{U}_4$$

Die Spannung zwischen den Klemmen c–d ist 0 V, deshalb ergibt sich:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_4 \quad \text{und} \quad \underline{U}_1 = \underline{U}_3$$

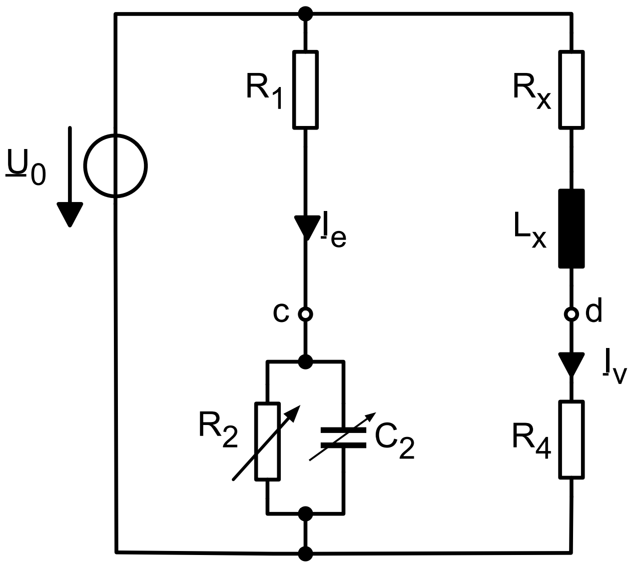
$$\Rightarrow \quad \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_4}$$

Die Abgleichbedingung ist somit gegeben durch

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{I}_c}{\underline{Z}_2 \underline{I}_c} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_4} = \frac{\underline{Z}_3 \underline{I}_d}{\underline{Z}_4 \underline{I}_d}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}$$

Aufgabe 5.b)
Um einen Ableich einer unbekannten Impedanz durchführen zu können, müssen Real- und Imaginärteil der Impedanz abgleichbar sein. Somit kommt nur der Zweipol aus der Parallelschaltung des Drehkondensators und des Schiebewiderstandes in Frage. Somit ergibt sich folgendes Schaltbild:



Aufgabe 5.c)
Durch die Abgleichbedingung ist gegeben:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_1}{\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_2\right)^{-1}} = \frac{R_x + j\omega L_x}{R_4} = R_1\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C_2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{j\omega L_x}{R_4} = j\omega R_1 C_2 \quad \wedge \quad \frac{R_x}{R_4} = R_1 \frac{1}{R_2}$$

$$\Rightarrow \quad L_x = R_1 R_4 C_2 \quad \wedge \quad R_x = R_1 R_4 \frac{1}{R_2}$$

Aufgabe 5.d)
Die Abgleichbedingung ist vollkommen frequenzunabhängig. Deshalb ist diese Brückenschaltung bei allen Frequenzen abgeglichen.