

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Biomedizinische Technik

Prof. Dr. rer. nat. O. Dössel
 Kaiserstr. 12 / Geb 30.33
 Tel.: 0721 / 608 - 2650

MEng. M. Reumann
 Kaiserstr. 12 / Geb 30.33
 Tel.: 0721 / 608 - 7183

**Vordiplomprüfung: Lineare elektrische Netze
 am 12. September 2006**

Aufgabe 1

Gegeben sei folgendes Netzwerk:

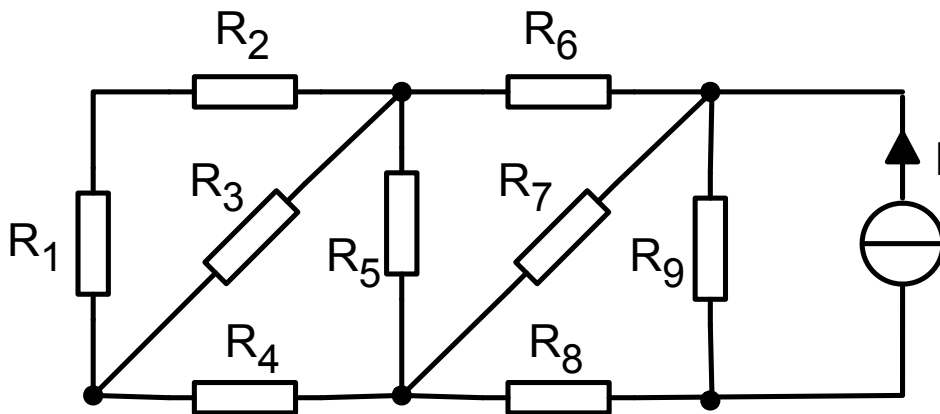


Abb.1

- a) Fassen Sie die Widerstände $R_1 - R_3$ zu einem Widerstand R_a zusammen.
 Verwenden Sie die Werte $R_1 = R_2 = R_3 = 1,5 \text{ Ohm}$ (1 Punkt)
- b) Stellen Sie die Maschengleichungen und die daraus folgende Matrixgleichung (3 x 3 Matrix) auf. Maschenströme sollen im Uhrzeigersinn verlaufen!
 Benennen Sie die Maschen von links nach rechts aufsteigend. (5 Punkte)
- c) Berechnen Sie die Maschenströme mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Verwenden Sie folgende Werte:
 R_a wie berechnet in Aufgabenteil a); $R_4 = 1$; $R_5 = R_6 = R_7 = 2$; $R_8 = R_9 = 4$;
 $I = 2,3 \text{ A}$.
Bemerkung: Der Lösungsweg muss klar erkennbar sein, um die volle Punktzahl zu erlangen. (5 Punkte)
- d) Berechnen Sie jeweils die Leistung, die in R_a und R_5 abgegeben wird. (2 Punkte)

Lösung-Aufgabe 1

a)

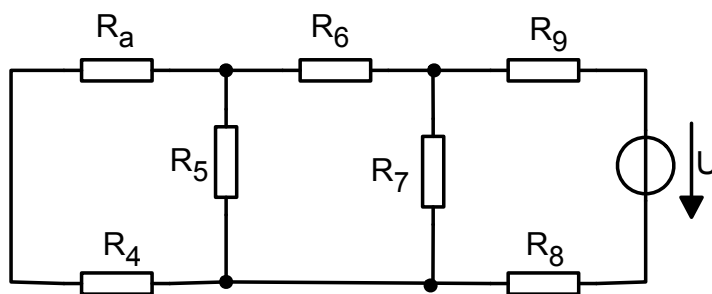
$$R_a = (R_1 + R_2) \parallel R_3$$

$$R_a = \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_a = \frac{\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}} \Omega = \frac{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}{3 \cdot \frac{3}{2}} \Omega = \frac{9}{9} \Omega = 1 \Omega$$

b)

R_a einsetzen und Quelle umformen ergibt folgendes Netzwerk:



Daraus folgen dann die Maschengleichungen:

$$M_1: R_a I_{M1} + R_5 I_{M1} + R_4 I_{M1} - R_5 I_{M2} = 0$$

$$M_2: -R_5 I_{M1} + R_5 I_{M2} + R_6 I_{M2} + R_7 I_{M2} - R_7 I_{M3} = 0$$

$$M_3: -R_7 I_{M2} + R_7 I_{M3} + R_9 I_{M3} + R_8 I_{M3} + U = 0 \quad \text{mit } U = R_9 I$$

Aus den Maschengleichungen folgt die Matrixgleichung:

$$\begin{pmatrix} R_a + R_4 + R_5 & -R_5 & 0 \\ -R_5 & R_5 + R_6 + R_7 & -R_7 \\ 0 & -R_7 & R_7 + R_8 + R_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R_9 I \end{pmatrix}$$

c)

Werte einsetzen und auflösen:

$$\begin{pmatrix} 1+1+2 & -2 & 0 \\ -2 & 2+2+2 & -2 \\ 0 & -2 & 2+4+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \cdot 2,3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9,2 \end{pmatrix} \quad (\cdot 2) + 1. \text{ Zeile}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & -4 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9,2 \end{pmatrix} \quad (\cdot 5) + 2. \text{ Zeile}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & -4 \\ 0 & 0 & 46 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -46 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich für die Maschenströme:

$$I_{M3} = \frac{-46}{46} A = -1A$$

$$10I_{M2} + 4A = 0 \Rightarrow I_{M2} = \frac{-4}{10} A = -0,4A$$

$$4I_{M1} + 0,8A = 0 \Rightarrow I_{M1} = \frac{-0,8}{4} A = -0,2A$$

d)

$$P = UI = RI^2$$

$$P_{Ra} = R_a I_{M1}^2 \Rightarrow P_{Ra} = (1 \cdot 0,2^2) W = 0,04 W$$

$$P_{R5} = R_5 (I_{M1} - I_{M2})^2 = 2 (-0,2 - (-0,4))^2 = 0,08 W$$

Aufgabe 2

Gegeben sei folgende Operationsverstärkerschaltung:

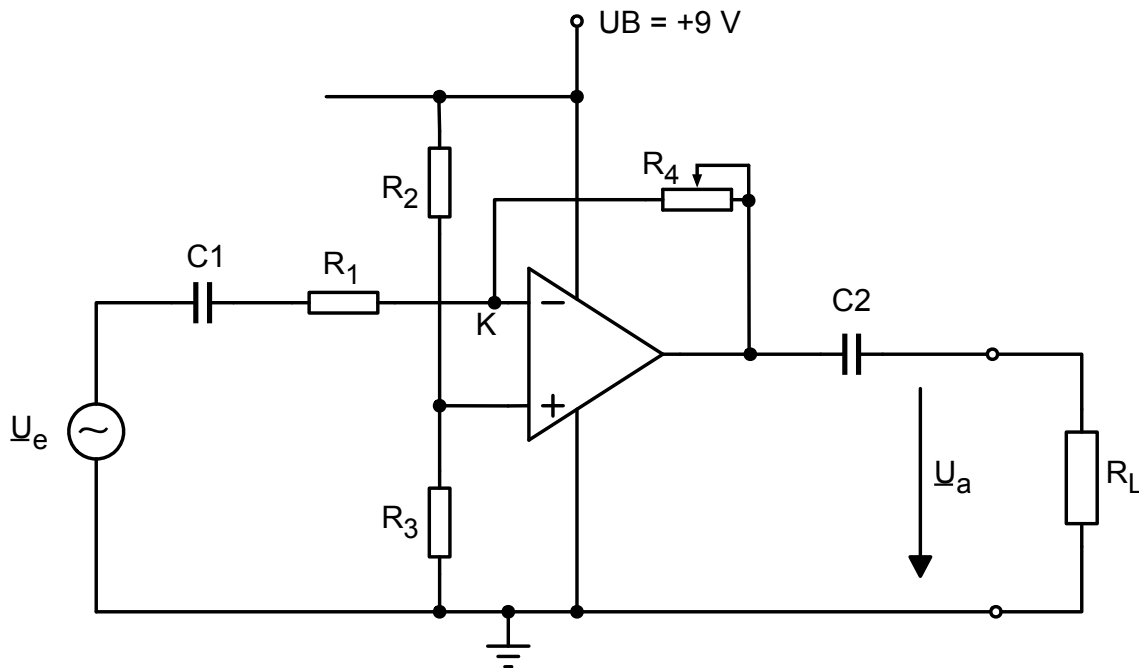


Abb.1

- Bestimmen Sie die Spannung am invertierenden Eingang des Operationsverstärkers. (2 Punkte)
- Bestimmen Sie den Ausdruck für U_a im Bezug auf U_e . Nehmen Sie hierbei an, die Kondensatoren wären durch einen Kurzschluss ersetzt. Weiterhin gilt: $R_1 R_3 = R_2 R_4$. Beginnen Sie mit der Knotengleichung für den Knoten K. (5 Punkte)
- U_e sei eine Sinusspannungsquelle mit 2 V Gleichspannungsanteil und 1 V Amplitude. Die Kondensatoren seien nun **nicht** durch einen Kurzschluss ersetzt. Der Hochpass aus R_1 und C_1 bzw. R_L und C_2 wird im Durchlassbereich, d. h. weit oberhalb der Grenzfrequenz betrieben.
 - Um welchen Wert schwingt das Eingangssignal hinter dem Widerstand R_1 , wenn $R_2 = R_3$ gewählt wird und $R_1 = R_4$ gilt? (1 Punkt)
 - Um welchen Wert schwingt U_a ? (2 Punkte)
 - Wie verhält sich die Phase von U_a zu U_e und warum? (2 Punkte)
- Die Amplitude des Eingangssignals U_e steigt auf 3,5 V an. Aus dem Datenblatt des Operationsverstärkers entnehmen Sie, dass sein Arbeitsbereich zwischen 0 V und $(U_B - 1,5 \text{ V})$ ist. Skizzieren Sie U_a . (2 Punkte)

Lösung-Aufgabe 2

a)

$$\underline{U}_d = 0V \Rightarrow \underline{U}_n = \underline{U}_p$$

$$\underline{U}_p = \frac{R_3}{R_2 + R_3} U_B = \frac{R_3}{R_2 + R_3} 9V = \underline{U}_n$$

b)

Am Knoten vor dem invertierenden Eingang des OPs gilt:

$$\frac{\underline{U}_e - \underline{U}_n}{R_1} + \frac{\underline{U}_a - \underline{U}_n}{R_4} = 0$$

$$\frac{\underline{U}_a}{R_4} = - \left(\frac{\underline{U}_e}{R_1} - \underline{U}_n \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} \right) \right)$$

Mit $\underline{U}_n$ aus Aufgabenteil a):

$$\underline{U}_a = - \frac{R_4}{R_1} \underline{U}_e + R_4 \left(\frac{R_3}{R_2 + R_3} 9V \right) \left(\frac{R_1 + R_4}{R_1 R_4} \right)$$

$$\underline{U}_a = - \frac{R_4}{R_1} \underline{U}_e + \frac{R_4}{R_1} \left(\frac{(R_1 + R_4) R_3}{R_4 (R_2 + R_3)} \right) 9V$$

$$\underline{U}_a = \frac{R_4}{R_1} \left(\frac{R_1 R_3 + R_4 R_3}{R_4 R_2 + R_4 R_3} 9V - \underline{U}_e \right)$$

Mit $R_1 R_3 = R_2 R_4$:

$$\underline{U}_a = \frac{R_4}{R_1} (9V - \underline{U}_e)$$

c)

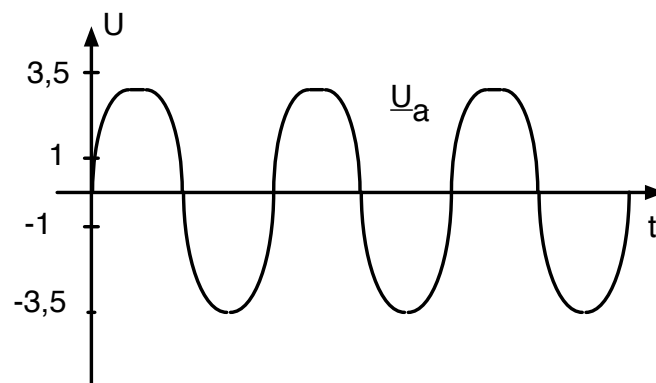
(i) Durch den Kondensator C1 wird der Gleichspannungsanteil des Eingangssignals nicht durchgelassen. Durch den Spannungsteiler am positiven Eingang des OPs und $R_2 = R_3$ schwingt das Signal um die Hälfte der Versorgungsspannung U_B , also 4,5 V.

(ii) Da zwischen dem OP und $\underline{U}_a$ ein weiterer Kondensator gelegt wurde, wird der Gleichspannungsanteil von 4,5 V nicht durchgelassen und das Ausgangssignal $\underline{U}_a$ schwingt um die 0 V.

(iii) Das Eingangssignal liegt am invertierenden Eingang des OPs. Das bedeutet, dass das Signal mit (-1) multipliziert wird. Also erfährt es eine Phasenverschiebung um 180 Grad.

d)

Das Signal wird bei 3 V abgeschnitten. Auch wenn der Gleichspannungsanteil nach dem Kondensator C2 nicht mehr im Signal ist, ist das Ausgangssignal an den oberen Spitzen abgeschnitten.



Anmerkung: In dem obigen Diagramm wurde die Verschiebung des DC-Anteils von der Nulllinie vernachlässigt.

Aufgabe 3

Gegeben seien folgende Filterschaltungen mit den Werten:

$$R_1 = 100\Omega \quad R_2 = 2\Omega \quad L_1 = 400\text{mH} \quad L_2 = 800\text{mH}$$

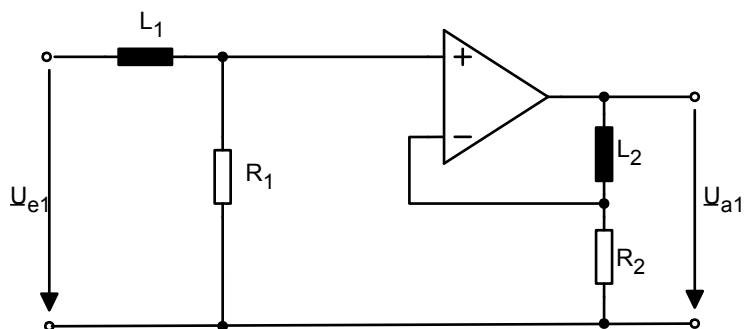


Abb. 3.1

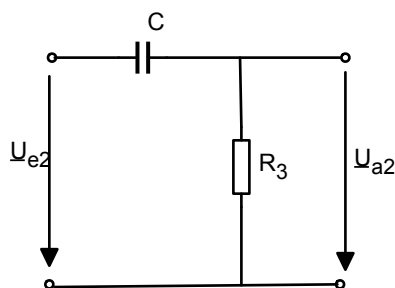


Abb. 3.2

- a) Stellen Sie jeweils die Übertragungsfunktionen $\frac{U_a}{U_e}$ aus Abb. 3.1 und Abb. 3.2 allgemein, d.h. ohne die Werte einzusetzen und ohne Normierung, auf. Wandeln Sie die Übertragungsfunktionen in ihre Normalform um. (3 Punkte)
- b) Bestimmen Sie jeweils eine Normierungsfrequenz $\Omega_{3,1}$ und $\Omega_{3,2}$ für die Schaltungen in Abb. 3.1 und 3.2. Verwenden Sie wenn möglich die gegebenen Werte. Rechnen Sie ansonsten allgemein. Zeichnen Sie jeweils die Bodediagramme (Betrag und Phase) der beiden normierten Übertragungsfunktionen. (10 Punkte)
- c) Nun gelte $\Omega_{3,1} = 10^{-2} \Omega_{3,2} = 4 \cdot 10^{-4}$. Bestimmen Sie graphisch das

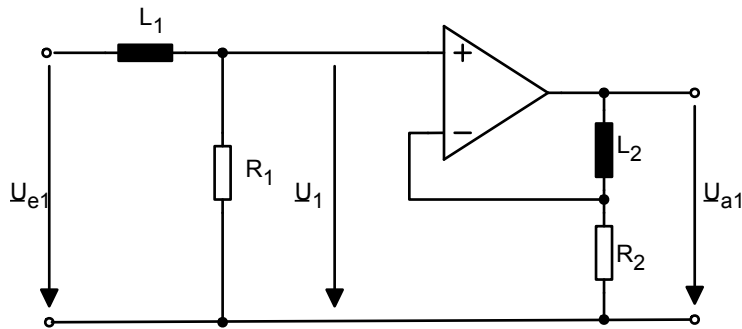
Bodediagramm (Betrag und Phase) für $\frac{U_{a2}}{U_{e1}}$, d. h. wenn die Schaltungen in

Abbildung 3.1 und 3.2 über einen Spannungsfolger miteinander verbunden werden. Welche Art Filter liegt vor? (3 Punkte)

Lösung-Aufgabe 3

a)

Für Abb. 3.1:



$$\underline{U}_1 = \frac{R_1}{R_1 + j\omega L_1} \underline{U}_{e1} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L_1}{R_1}} \underline{U}_{e1}$$

$$\underline{U}_1 = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L_2} \underline{U}_{a1} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L_2}{R_2}} \underline{U}_{a1}$$

$$\frac{1}{1 + j\omega \frac{L_2}{R_2}} \underline{U}_{a1} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L_1}{R_1}} \underline{U}_{e1} \Rightarrow \frac{\underline{U}_{a1}}{\underline{U}_{e1}} = \frac{1 + j\omega \frac{L_2}{R_2}}{1 + j\omega \frac{L_1}{R_1}}$$

Für Abb. 3.2

$$\frac{\underline{U}_{a2}}{\underline{U}_{e2}} = \frac{R_3}{R_3 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C R_3}{1 + j\omega C R_3}$$

b)

Zur Bestimmung eines Bodediagramms gilt:

$$a_v = 20 \log \left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right| \quad \varphi = \varphi_{\text{Zähler}} - \varphi_{\text{Nenner}} = \arctan \left(\frac{\text{Im} \left\{ \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right\}_{\text{Zähler}}}{\text{Re} \left\{ \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right\}_{\text{Zähler}}} \right) - \arctan \left(\frac{\text{Im} \left\{ \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right\}_{\text{Nenner}}}{\text{Re} \left\{ \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right\}_{\text{Nenner}}} \right)$$

Normierungsfrequenz für Abb. 3.1:

$$\omega_1 = \frac{R_1}{L_1} = \frac{100\Omega}{400\text{mH}} = \frac{100 \frac{\text{V}}{\text{A}}}{400 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{A}}} = 0,25 \cdot 10^3 \text{s}^{-1}$$

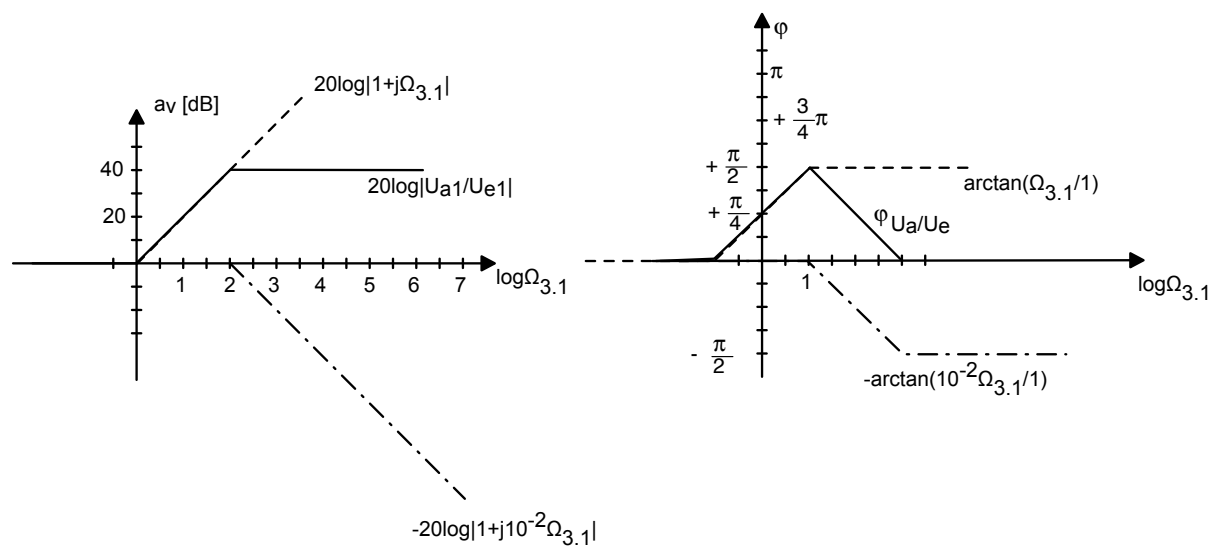
$$\omega_2 = \frac{R_2}{L_2} = \frac{2\Omega}{800\text{mH}} = \frac{2 \frac{\text{V}}{\text{A}}}{800 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{A}}} = 0,25 \cdot 10^1 \text{s}^{-1}$$

$$\omega_2 = 10^{-2} \cdot \omega_1 \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_1} = 10^{-2}$$

$$\Omega_{3,1} = \frac{\omega}{\omega_2} = \omega \cdot 4 \cdot 10^{-1}$$

$$\frac{U_{a1}}{U_{e1}} = \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}} = \frac{1 + j \Omega_{3,1}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2} \frac{\omega_2}{\omega_1}} = \frac{1 + j \Omega_{3,1}}{1 + j 10^{-2} \Omega_{3,1}}$$

Bodediagramm für Abb. 3.1

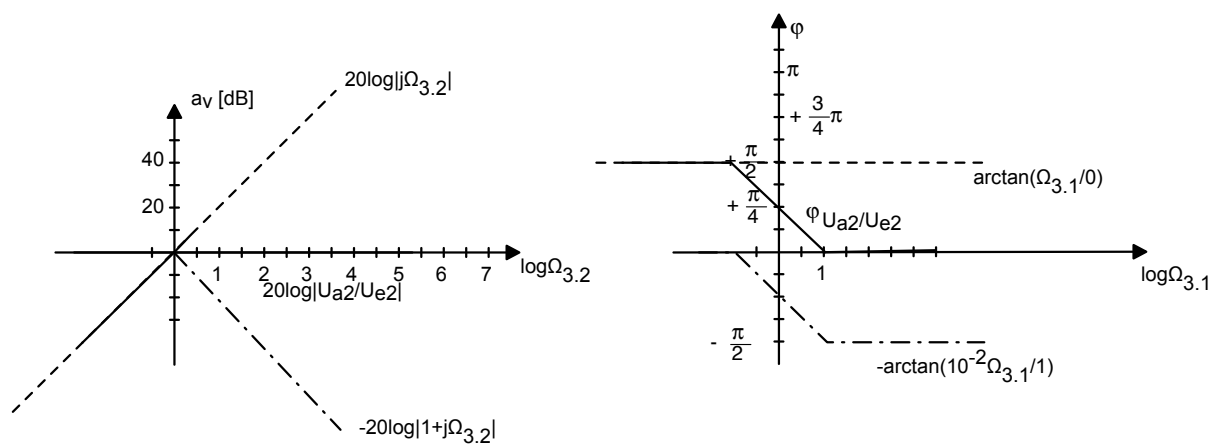


Normierungsfrequenz für Abb 3.2:

$$\Omega_{3.2} = \frac{\omega}{\omega_{3.2}} = \omega CR_3 \Rightarrow \omega_{3.2} = \frac{1}{CR_3}$$

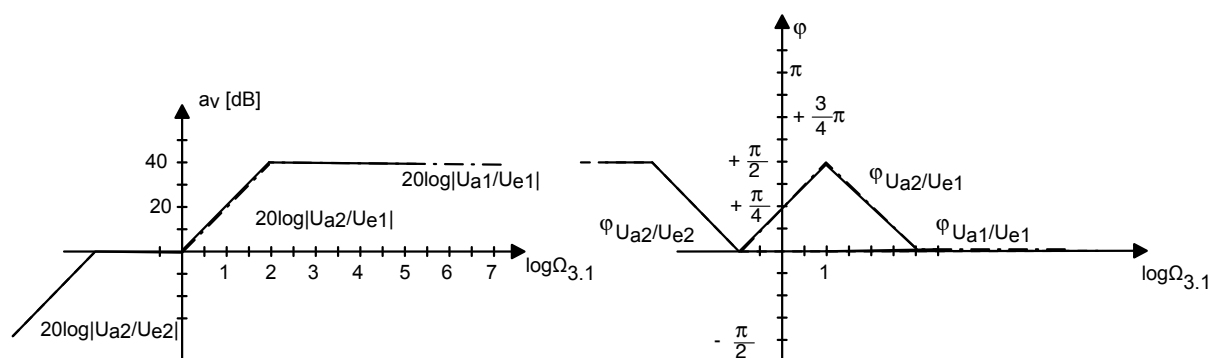
$$\frac{U_{a2}}{U_{e2}} = \frac{j\Omega_{3.2}}{1 + j\Omega_{3.2}}$$

Bodediagramm für Abb. 3.2:



c)

Es liegt ein Hochpassfilter vor.



Aufgabe 4

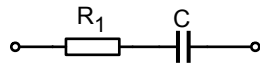


Abb. 4.1

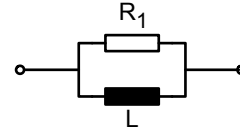


Abb. 4.2

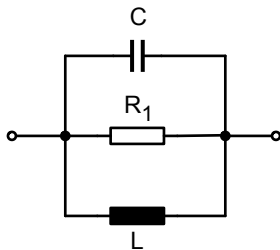


Abb. 4.3

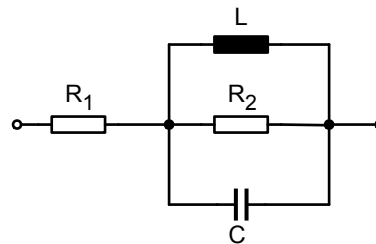


Abb. 4.4

- Geben Sie die Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ der Abbildungen 4.1 - 4.2 mit Real- und Imaginärteil an. (2 Punkte)
- Geben Sie die Gesamtadmittanz $\underline{Y}$ der Abbildung 4.3 mit Real- und Imaginärteil an. (1 Punkt)
- Zeichnen Sie die Ortskurven von $\underline{Z}$ aus Abbildung 4.1 und 4.2. Beschriften Sie vollständig, d. h. alle Grenzwerte von ω . (2 Punkte)
- Zeichnen Sie die Admittanz $\underline{Y}$ aus Abbildung 4.3. Wie erhält man graphisch die Ortskurve von $\underline{Z}$. Zeichnen Sie die Ortskurve von $\underline{Z}$. Beschriften Sie vollständig, d. h. alle Grenzwerte von ω . (3 Punkte)
- Wie verändert sich die Ortskurven aus Abbildung 4.3, wenn die Schaltung wie in Abbildung 4.4 erweitert wird? Zeichnen Sie die Ortskurven für $\underline{Y}$ und $\underline{Z}$ für Abbildung 4.4. (3 Punkte)

Lösung-Aufgabe 4

a)

Abb. 4.1:

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{1}{j\omega C}$$

Abb. 4.2:

$$\underline{Z} = \frac{j\omega L R_1}{R_1 + j\omega L}$$

$$\underline{Z} = \frac{j\omega L R_1}{(R_1 + j\omega L)(R_1 - j\omega L)} = \frac{\omega^2 L^2 R_1 + j\omega L R_1^2}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\omega^2 L^2 R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{\omega L R_1^2}{R_1^2 + \omega^2 L^2}$$

b)

Abb. 4.3:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R_1} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

c)

Abb. 4.1:

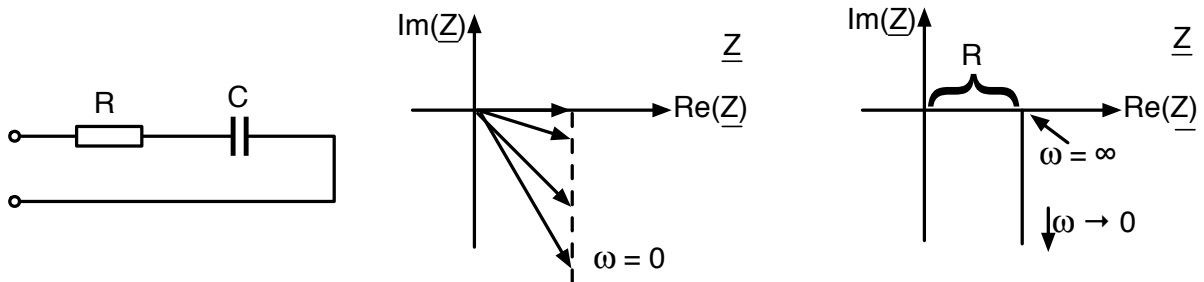
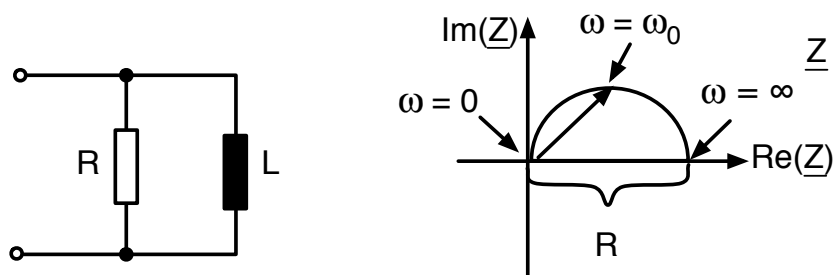
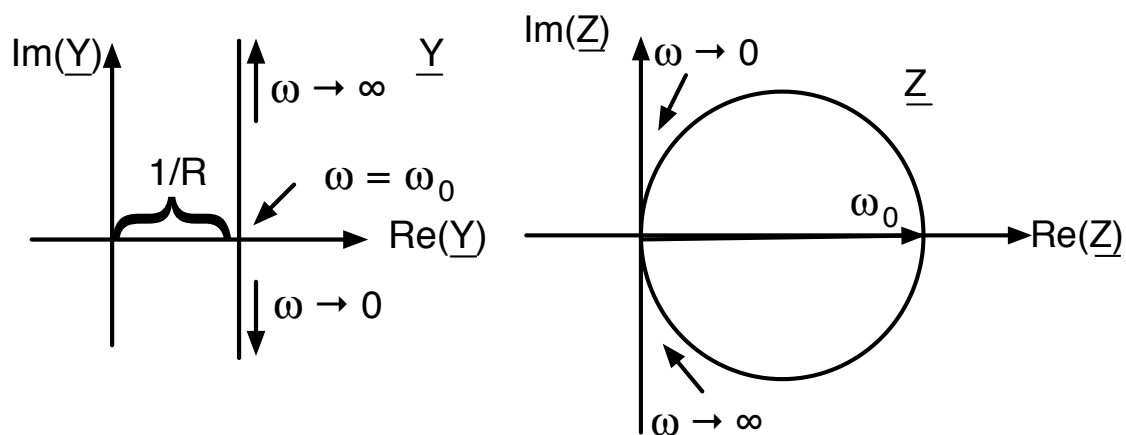


Abb. 4.2:





Durch die Spiegelung der Ortskurve von der Admittanz $\underline{Y}$ am Einheitskreis erhält man die Ortskurve für die Impedanz:

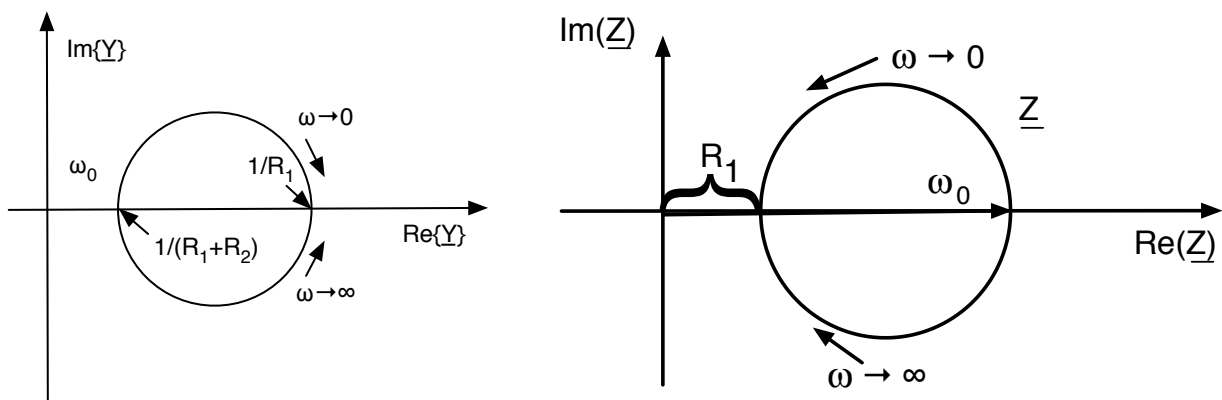
e)

Die Ortskurve von $\underline{Z}$ ist um R_1 nach Rechts verschoben.

Die Ortskurve von $\underline{Y}$ ist ebenfalls ein Kreis mit Zentrum auf der X-Achse, da es sich um eine Reihenschaltung handelt.

Punkte abbilden:

	$\underline{Y}$	$\underline{Z}$
ω_0	$1/(R_1 + R_2)$	$R_1 + R_2$
$\omega \rightarrow 0$	$1/(R_1 + R_2)$	$R_1 + R_2$
$\omega \rightarrow \infty$	$1/R_1$	R_1



Aufgabe 5

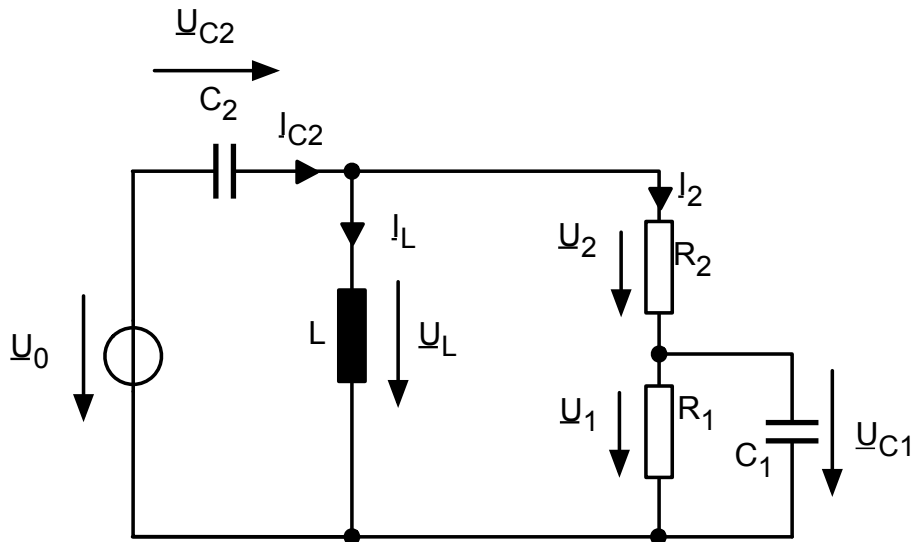


Abb. 5.1

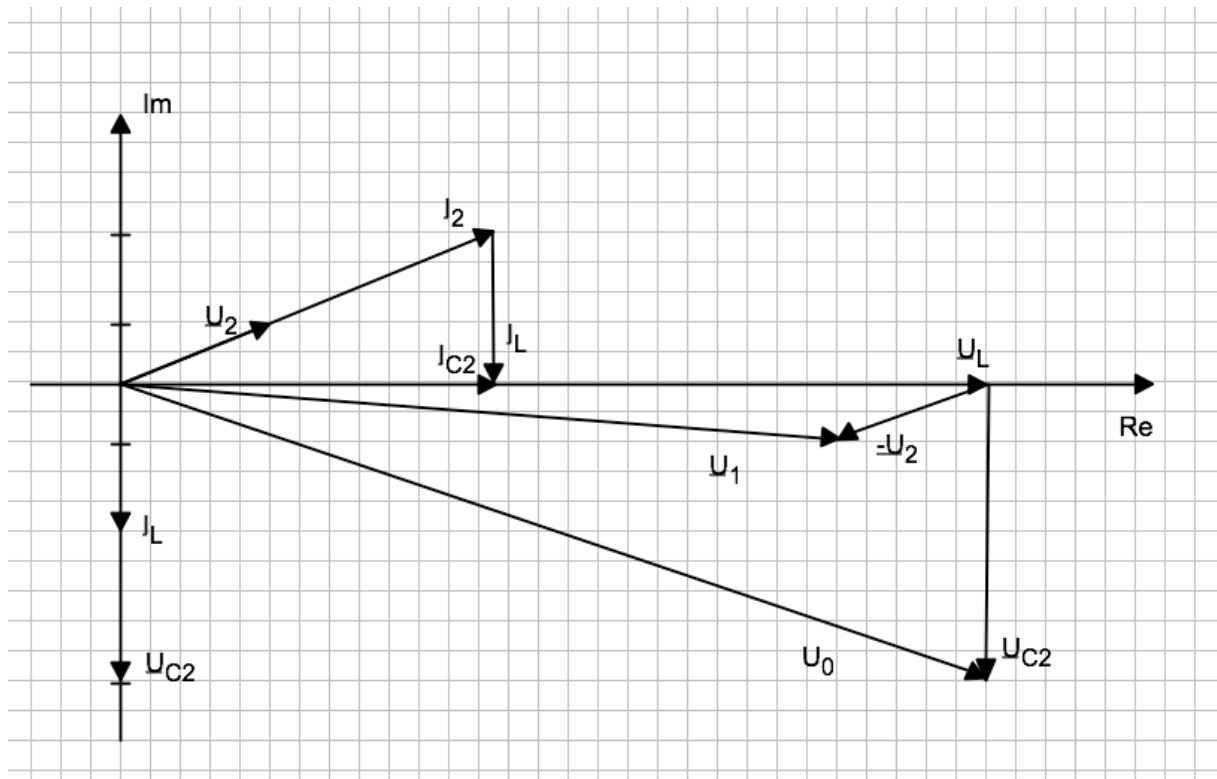
Das in Abbildung 5.1. gezeigte Netzwerk soll vereinfacht werden, so dass alle Impedanzen durch eine Ersatzimpedanz zusammengefasst werden. Lösen Sie die Aufgabe, indem Sie ein Zeigerdiagramm für das Netzwerk zeichnen. Verwenden Sie nur **ein** Koordinatensystem für alle Ströme und alle Spannungen. Sie benötigen -1 cm bis +15 cm auf der positiven Realachse und -6 cm bis +11 cm auf der Imaginärachse.

Verwenden Sie folgende Maßeinheiten:

$$1V = 0,5\text{cm} \quad \text{und} \quad 1A = 0,25\text{cm}$$

- Gegeben sei $R_1 = 1\Omega$, $Z_{C1} = -j2\Omega$, $R_2 = \frac{1}{5}\Omega$, $U_L = 29V$. Berechnen Sie U_2 und Tragen Sie U_L und U_2 in das Koordinatensystem ein. (2 Punkte)
- Konstruieren Sie U_1 . (1 Punkt)
- Berechnen Sie I_2 und zeichnen Sie I_2 und I_L in das Koordinatensystem ein. $|I_L| = 10A$. (2 Punkte)
- Konstruieren Sie I_{C2} und folglich U_{C2} mit $|U_{C2}| = 10V$. (2 Punkte)
- Konstruieren Sie U_0 . (1 Punkt)
- Berechnen Sie aus U_0 und I_{C2} die Ersatzimpedanz und zeichnen Sie das Ersatzschaltbild. Bestimmen Sie die Phasendifferenz zwischen U_0 und I_{C2} . (4 Punkte)

Lösung-Aufgabe 5



Werte und Kontrollwerte siehe unten

a)

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_2 &= \frac{R_2}{R_2 + (R_1 \parallel C_1)} \underline{U}_L \\
 \underline{U}_2 &= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \left(\frac{1(-j2)}{1 + (-j2)} \right)} 29V = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{(-j2)(1+j2)}{(1+4)}} 29V \\
 &= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}(1+4-j2)} 29V = \frac{29}{5-j2} V \\
 &= \frac{29(5+j2)}{25+4} V = 5 + j2V
 \end{aligned}$$

b)

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_L - \underline{U}_2 = 29\text{V} - (5 - j2) = (24 - j2)\text{V}$$

c)

$$I_2 = \frac{\underline{U}_2}{R_2} \Rightarrow I_2 = \frac{5 + j2}{\frac{1}{5}} \text{A} = 25 + j10\text{A}$$

$$\text{Da } |I_L| = 10\text{A} \text{ folgt } \underline{Z}_L = j2,9\Omega \text{ und damit } I_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{Z}_L} \Rightarrow I_L = \frac{29\text{V}}{j2,9\Omega} = -j10\text{A}$$

d)

$$I_{C2} = I_L + I_2$$

$$\Rightarrow I_{C2} = -j10\text{A} + (25 + j10)\text{A} = 25\text{A}$$

$$\underline{U}_{C2} = \underline{Z}_{C2} I_{C2} \Rightarrow \underline{U}_{C2} = (-j0,4 \cdot 25)\text{V} = -j10\text{V}$$

$$\text{Da } |\underline{U}_{C2}| = 10\text{V} \text{ folgt } \underline{Z}_{C2} = -j0,4\Omega$$

e)

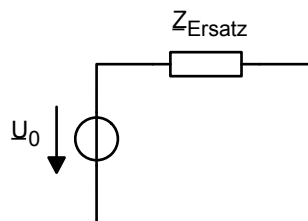
$$\underline{U}_0 = \underline{U}_{C2} + \underline{U}_L$$

$$\Rightarrow \underline{U}_0 = -j10\text{V} + 29\text{V}$$

$$= (29 - j10)\text{V}$$

f)

$$\underline{Z}_{\text{Ersatz}} = \frac{\underline{U}_0}{I_{C2}} = \frac{29 - j10}{25} \Omega = (1,16 - j0,4) \Omega$$



$$\phi_{U0} = \arctan\left(\frac{-10}{29}\right) = -19^\circ$$

$$\phi_{IC2} = \arctan\left(\frac{0}{25}\right) = 0$$

$$\phi = \phi_{U0} - \phi_{IC2} = -19^\circ$$