

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Biomedizinische Technik

Prof. Dr. rer. nat. O. Dössel
Kaiserstr. 12 / Geb 30.33
Tel.: 0721 / 608 - 2650

Dipl. Ing. T.Baas
Kaiserstr. 12 / Geb 30.33
Tel.: 0721 / 608 - 2791

Bachelorprüfung: Lineare elektrische Netze
29. September 2009
Lösungen

Aufgabe 1

Ortskurve

(15 Punkte)

a) Gleichung der Impedanz:

$$\underline{Z}(s) = R(s) + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L$$

$$\underline{Z}(s) = R(s) + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

b)

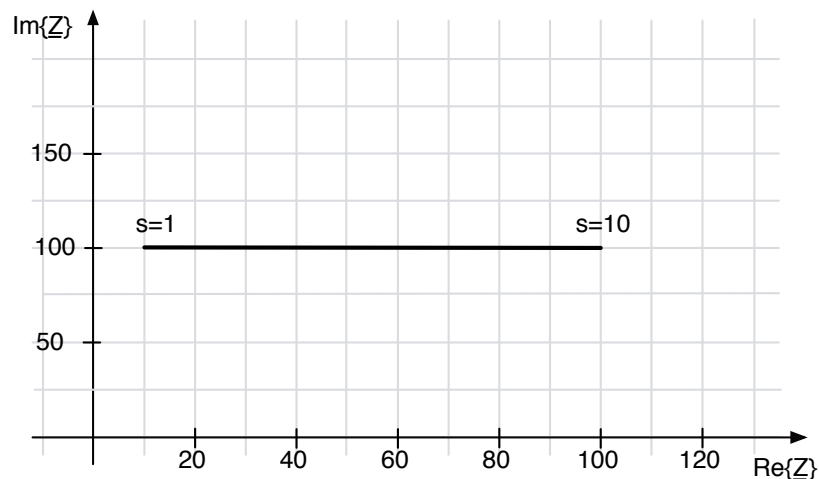
$$\frac{1}{\omega C} = 100\Omega$$

$$\omega L = 200\Omega$$

$$R(s) = s \cdot 10\Omega \quad [s = 1 \dots 10]$$

$$\underline{Z}(s) = 10\Omega \cdot s + j100\Omega$$

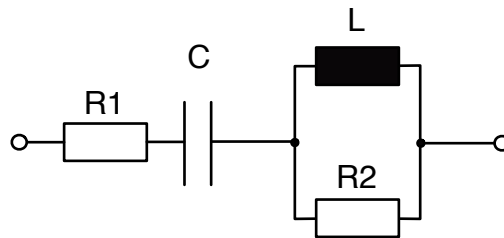
Ortskurve $\underline{Z}(s)$:



c) Schaltbild:

Aus Anfangspunkt mit negativem Imaginärteil und Realteil ungleich Null muss eine Reihenschaltung aus R und C vorliegen.

Der positiv verlaufende Halbkreis wird durch eine Parallelschaltung aus L und R hervorgerufen.



d) Impedanz:

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}(L) &= R_1 + \frac{1}{j\omega C} + \frac{R_2 \cdot j\omega L}{R_2 + j\omega L} \\
 &= R_2 + \frac{1}{j\omega C} + \frac{jR_2\omega L(R_2 - j\omega L)}{(R_2 + j\omega L)(R_2 - j\omega L)} \\
 &= R_1 + \frac{R_2\omega^2 L^2}{R_2^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\frac{\omega L R_2^2}{R_2^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega C} \right)
 \end{aligned}$$

e) Aus Startpunkt Halbkreis links ($L \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(\underline{Z}) &= 100 \rightarrow R_1 = 100\Omega \\
 \operatorname{Im}(\underline{Z}) &= -500 \rightarrow -\frac{1}{\omega C} = -500\Omega \rightarrow C = 2\mu F
 \end{aligned}$$

Mit Endpunkt Halbkreis rechts ($L \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}(\lim_{L \rightarrow \infty}) &= R_1 + \frac{R_2\omega^2}{\frac{R_2^2}{\infty^2} + \omega^2} + j \left(\frac{\frac{\omega R_2^2}{\infty}}{\frac{R_2^2}{\infty^2} + \omega^2} - \frac{1}{\omega C} \right) \\
 &= R_1 + R_2 - j\frac{1}{\omega C} \\
 \operatorname{Re}(\lim_{L \rightarrow \infty}) &= 300 \\
 \rightarrow R_2 &= 300\Omega - R_1 = 200\Omega \\
 \underline{Z}(\lim_{L \rightarrow 0}) &= R_1 + \frac{R_2\omega^2 0}{R_2^2 + \omega^2 0^2} + j \left(\frac{\omega R_2^2 0}{R_2^2 + \omega^2 0^2} - \frac{1}{\omega C} \right) \\
 &= R_1 - j\frac{1}{\omega C}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Netzwerk

(17 Punkte)

a)

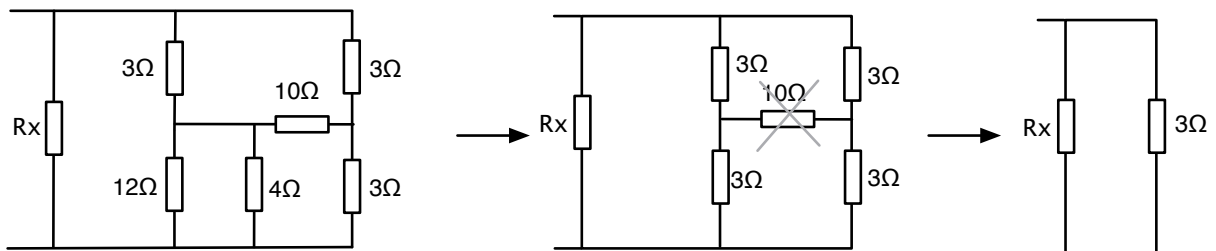
$$R_{CD} = 72\Omega \parallel (6\Omega + 1\Omega + (4\Omega \parallel 4\Omega))$$

$$= 72\Omega \parallel 9\Omega = 8\Omega$$

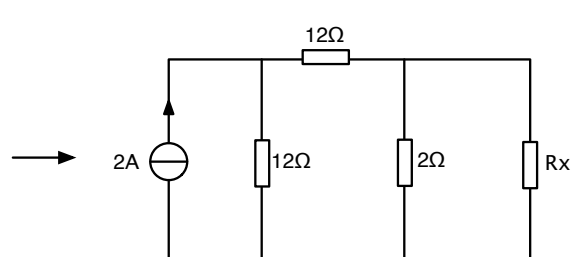
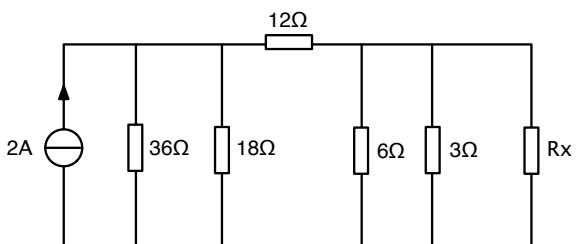
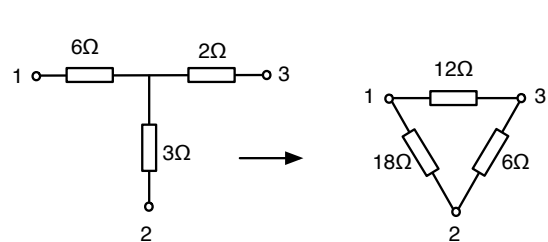
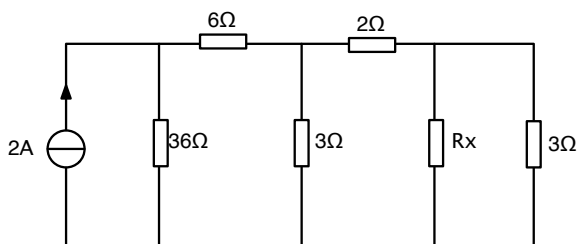
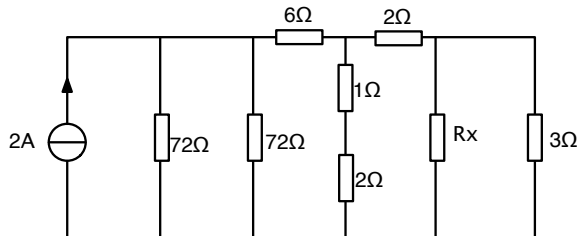
$$R_{EF} = 2\Omega + (1\Omega + 4\Omega \parallel 4\Omega) \parallel (6\Omega + 72\Omega)$$

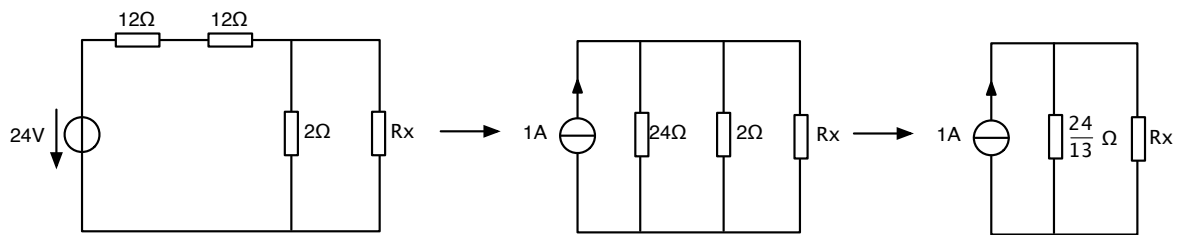
$$= 2\Omega + 3\Omega \parallel 78\Omega = 4,89\Omega$$

b) Es handelt sich um eine abgegliche Brückenschaltung deshalb fließt durch den 10Ω Widerstand kein Strom.



c) Vereinfachung I, II, III:





d) Leistung der Quelle:

$$\begin{aligned}
 P &= U \cdot I = R_{ges} \cdot I^2 \rightarrow R_{ges} = \frac{P}{I^2} \\
 R_{ges} &= 1\Omega \text{ da } P = 1W \text{ und } I = 1A \\
 R_p &= \frac{24}{13}\Omega \\
 R_{ges} &= \frac{R_p \cdot R_x}{R_p + R_x} \\
 R_x &= \frac{R_{ges} \cdot R_p}{R_p - R_{ges}} = \frac{1\Omega \cdot \frac{24}{13}\Omega}{\frac{24}{13}\Omega - 1\Omega} = \frac{24}{11}\Omega
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3**Zeigerdiagramm**

(19 Punkte)

a) Aus Diagramm: $\underline{U}_a = 60V + j30V$ und $\underline{I}_a = 0,9A - j0,3A$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_v &= \frac{\underline{U}_a}{\underline{I}_a} \\ &= \frac{60V + j30V}{0,9A - j0,3A} = 50\Omega + j50\Omega\end{aligned}$$

b) Da der Imaginärteil von $\underline{Z}_v$ positiv ist belastet $\underline{Z}_v$ die Schaltung induktiv.

$$j\omega L = j50\Omega \rightarrow L = \frac{50\Omega}{\omega} = 50mH$$

c)

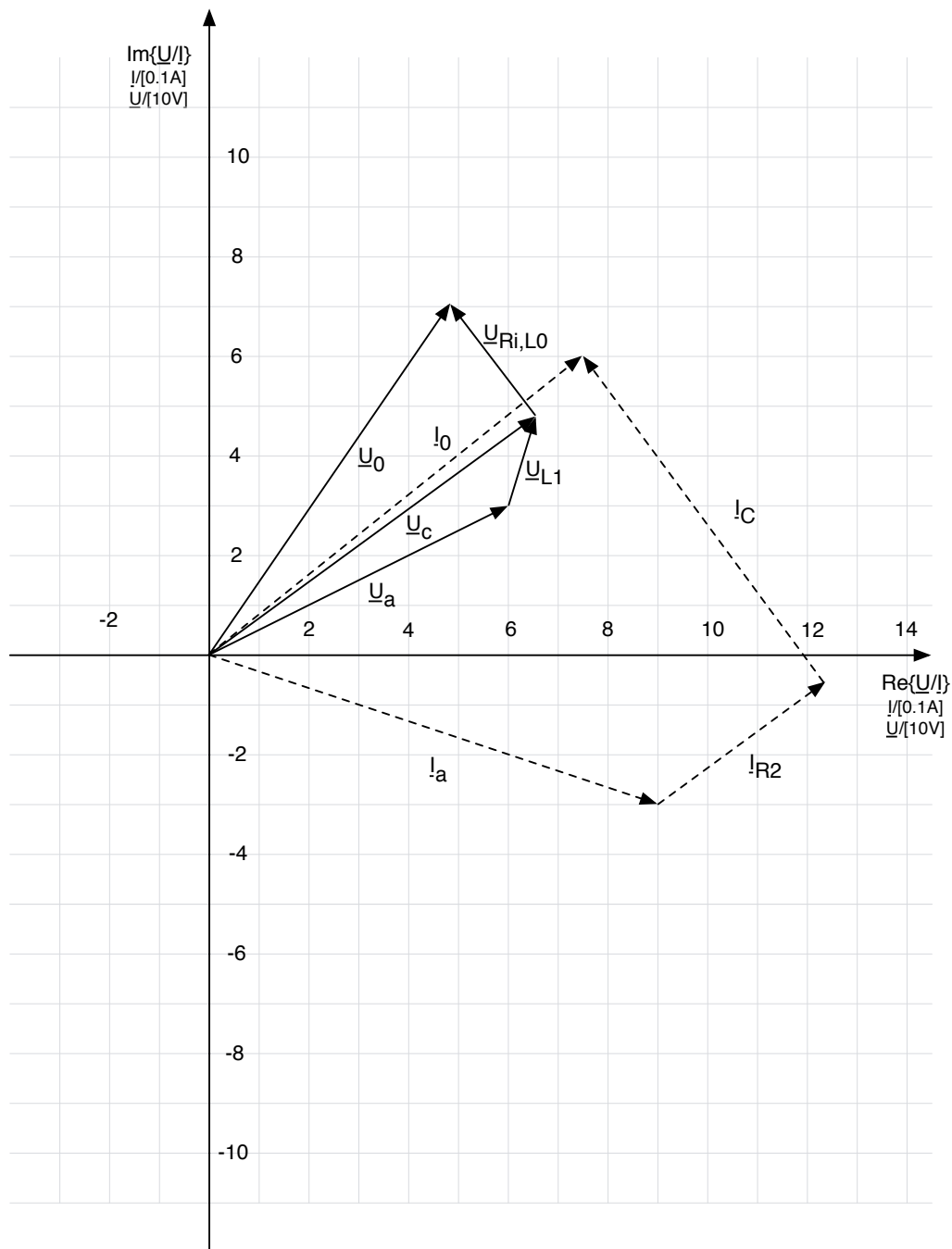
$$\begin{aligned}\underline{U}_C &= \underline{I}_a \cdot (\underline{Z}_v + j\omega L_1) \\ &= (0,9A - j0,3A) \cdot (50\Omega + j50\Omega + j20\Omega) \\ &= 66V + j48V\end{aligned}$$

:

$$\begin{aligned}\underline{I}_C &= \frac{\underline{U}_C}{\frac{1}{j\omega C}} = \underline{U}_C \cdot j\omega C \\ &= (66V + j48V) \cdot j0,01\Omega^{-1} \\ &= -0,48A + j0,66A\end{aligned}$$

$$\underline{I}_{R1} = \frac{\underline{U}_C}{R_1} = \frac{66V - j48V}{200\Omega} = 0,33A + j0,24A$$

	Abgelesener Wert
$\underline{U}_{L1}$	$6V + j18V$
$\underline{U}_0$	$48,75V + j71,1V$
$\underline{I}_0$	$0,75A + j0,6A$



d)

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{Ri,L0} &= (R_i + j\omega L_0) \cdot \underline{I}_0 \\
 &= 20\Omega + j30\Omega \cdot (0,75A + j0,6A) \\
 &= -17,25V + j23,1V
 \end{aligned}$$

Aufgabe 4**Bodediagramm**

(26 Punkte)

a) Übertragungsfunktionen:

Schaltung 1:

$$\underline{U}_{e1} = (R_1 + j\omega L) \cdot \underline{I}$$

$$\underline{U}_{a1} = -R_2 \cdot \underline{I}$$

$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}_{a1}}{\underline{U}_{e1}} &= -\frac{R_2}{R_1 + j\omega L} \\ &= -\frac{R_2}{R_1} \cdot \left(\frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R_1}} \right) \end{aligned}$$

Schaltung 2:

$$\underline{U}_{e2} = \left(R_3 + \frac{1}{j\omega C} \right) \cdot \underline{I}$$

$$\underline{U}_{a2} = -R_4 \cdot \underline{I}$$

$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}_{a2}}{\underline{U}_{e2}} &= -\frac{R_4}{R_3 + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= -\frac{R_4}{R_3} \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega R_3 C}} \right) \\ &= -\frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{j\omega R_3 C}{1 + j\omega R_3 C} \end{aligned}$$

b) Normierungsfrequenz:

Schaltung 1:

$$\Omega_1 = \frac{\omega}{\omega_1}$$

mit

$$\omega_1 = \frac{R_1}{L}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
 a_{v1}/dB &= 20 \log \left| \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\Omega_1} \right| \\
 &= 20 \log \left| \frac{R_2}{R_1} \right| - 20 \log |1 + j\Omega_1|
 \end{aligned}$$

Phase: *Invertierender Verstärker, daher Phasenverschiebung um 180°*

$$\varphi_1 = \pi - \arctan \left(\frac{\Omega_1}{1} \right) = \pi - \arctan(\Omega_1)$$

Schaltung b:

$$\Omega_2 = \frac{\omega}{\omega_2}$$

mit

$$\omega_2 = \frac{1}{C \cdot R_3}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 a_{v2}/dB &= 20 \log \left| \frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{j\Omega_2}{1 + j\Omega_2} \right| \\
 &= 20 \log \left| \frac{R_4}{R_3} \right| - 20 \log |1 + j\Omega_2| + 20 \log |j\Omega_2|
 \end{aligned}$$

Phase:

$$\begin{aligned}
 \varphi_2 &= \pi - \arctan \left(\frac{\Omega_2}{1} \right) + \arctan \left(\frac{\Omega_2}{0} \right) = \pi - \arctan(\Omega_2) + \frac{\pi}{2} \\
 &= \frac{3\pi}{2} - \arctan(\Omega_2)
 \end{aligned}$$

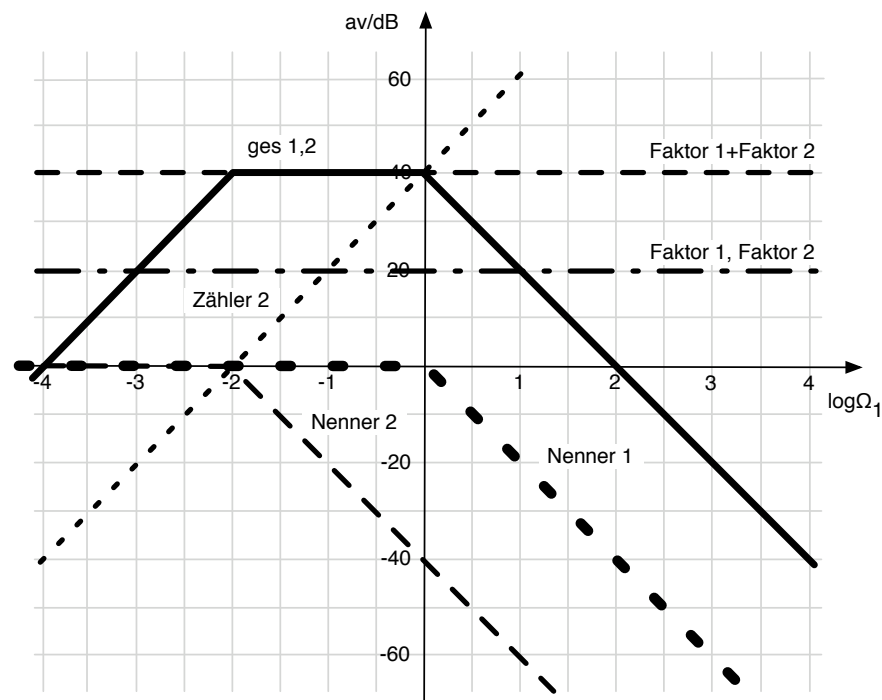
c) Induktivität:

$$\omega_1 = \frac{R_1}{L} \rightarrow L = \frac{R_1}{2\pi f_1} = \frac{1k\Omega}{2\pi \cdot 10kHz} = 15,92mH$$

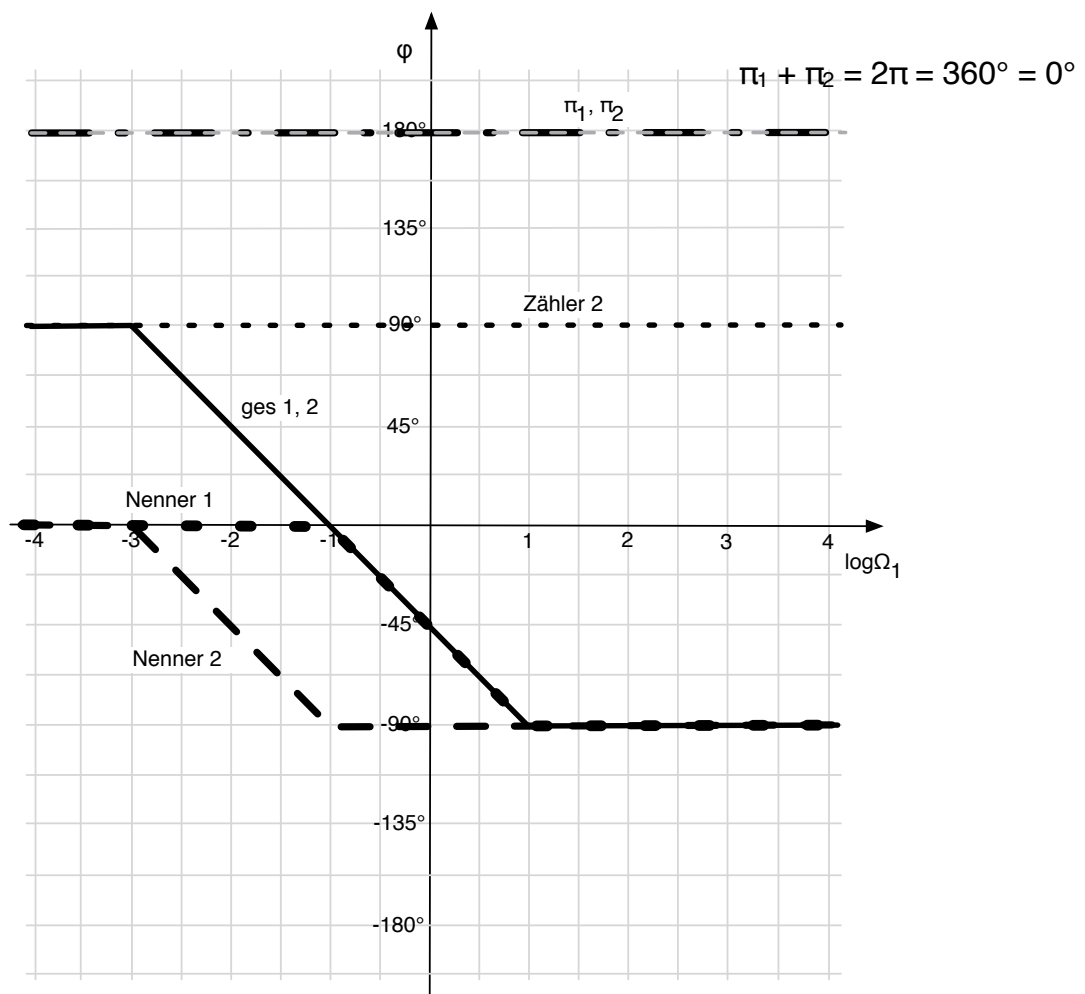
Kapazität:

$$\omega_2 = \frac{1}{C \cdot R_3} \rightarrow C = \frac{1}{2\pi \cdot f_2 \cdot R_3} = \frac{1}{2\pi \cdot 100Hz \cdot 100\Omega} = 15,92\mu F$$

d) Bodediagramm der Amplitude:



Bodediagramm der Phase:



e) Tabelle:

Frequenz	$\log \Omega 1$	U_{a2}	av/dB
1 Hz	-4	10mV	0 dB
10 kHz	0	1V	40 dB
100 MHz	4	0.1mV	-40 dB

f) Schaltung 1: *Tiefpass*Schaltung 2: *Hochpass*Schaltung 1+2: *Bandpass***Aufgabe 5****Operationsverstärker I**

(13 Punkte)

a)

$$\begin{aligned}
 M_I &: U_{e2} = I_b \cdot (R_2 + R_4) \\
 M_{II} &: U_{e1} = I_a \cdot R_1 + I_b \cdot R_4 \\
 M_{III} &: U_{e1} = I_a(R_1 + R_3) + U_{a1}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 M_{III}: & \rightarrow I_a = \frac{U_{e1} - U_{a1}}{R_1 + R_3} \\
 M_I: & \rightarrow I_b = \frac{U_{e2}}{R_2 + R_4}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 I_a \text{ \& } I_b \text{ in } M_{II}: U_{e1} &= \frac{U_{e1} - U_{a1}}{R_1 + R_3} \cdot R_1 + \frac{U_{e2}}{R_2 + R_4} \cdot R_4 \\
 -U_{a1} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} &= U_{e1} \cdot \left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_3}\right) - U_{e2} \cdot \frac{R_4}{R_2 + R_4} \\
 -U_{a1} &= U_{e1} \left(\frac{R_1 + R_3}{R_1} - 1\right) - U_{e2} \frac{R_4 \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 \cdot (R_2 + R_4)} \\
 U_{a1} &= -U_{e1} \cdot \frac{R_3}{R_1} + U_{e2} \cdot \frac{R_4}{R_1} \cdot \frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -U_{e1} \cdot \frac{R_3}{R_1} + U_{e2} \cdot \frac{R_3}{R_1} \cdot \frac{\frac{R_1 \cdot R_4}{R_3} + R_4}{R_2 + R_4} \\ &= \frac{R_3}{R_1} \left(U_{e2} \cdot \frac{R_1 \cdot R_4 + R_3 \cdot R_4}{R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_4} - U_{e1} \right) \end{aligned}$$

d)

mit $R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$ gilt:

$$U_a = \frac{R_3}{R_1} \cdot (U_{e2} - U_{e1})$$

e) Es handelt sich um einen nichtinvertierenden Spannungsverstärker.