

Bachelorprüfung: Lineare elektrische Netze
07. September 2010

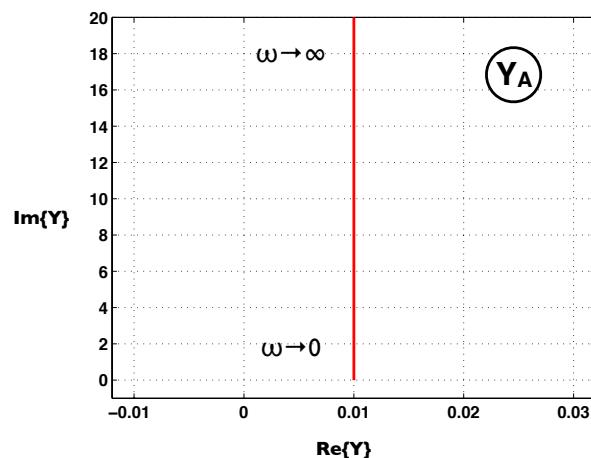
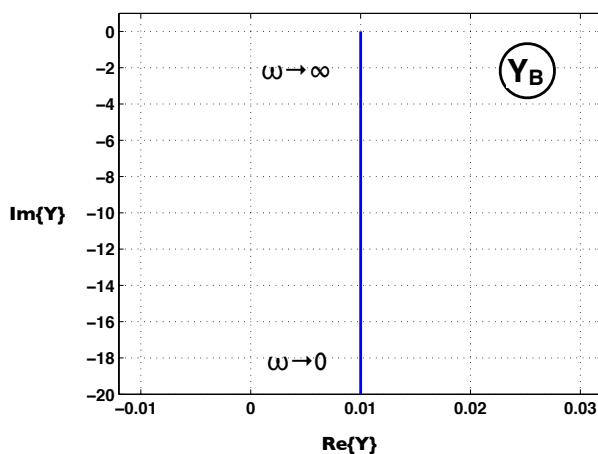
Lösung

Aufgabe 1

Ortskurve

(12 Punkte)

a)



b)

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{R_1} + j\omega C$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R_2} - j\frac{1}{\omega L}$$

$$\underline{Y} = \underline{Y}_A + \underline{Y}_B = \frac{1}{R_1} + j\omega C + \frac{1}{R_2} - j\frac{1}{\omega L}$$

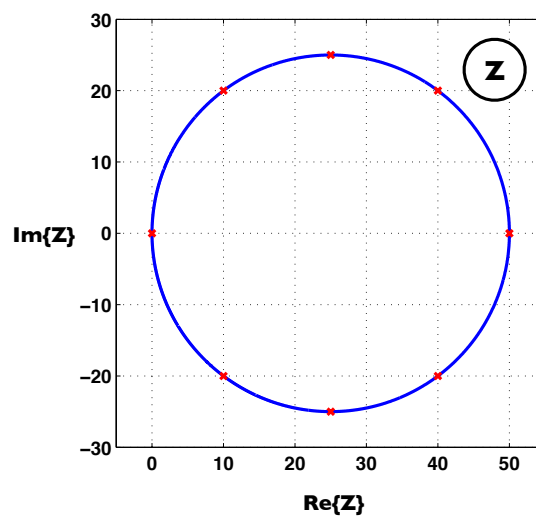
mit $R=R_1=R_2$

$$\underline{Y} = \frac{2}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

c)

<u>Y</u>	<u>Z</u>
$0,02 + j \infty$	0
$0,02 - 0,04j$	$10 + 20j$
$0,02 - 0,02j$	$25 + 25j$
$0,02 - 0,01j$	$40 + 20j$
$0,02 + 0j$	50
$0,02 + 0,01j$	$40 - 20j$
$0,02 + 0,02j$	$25 - 25j$
$0,02 + 0,04j$	$10 - 20j$

d)

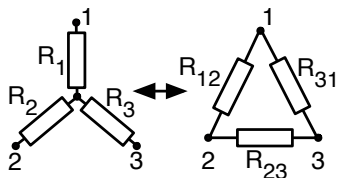
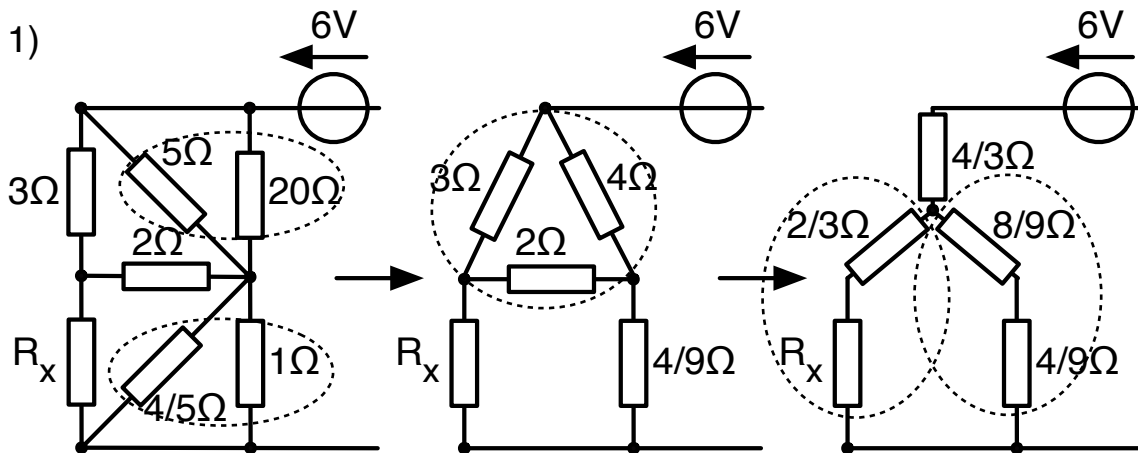
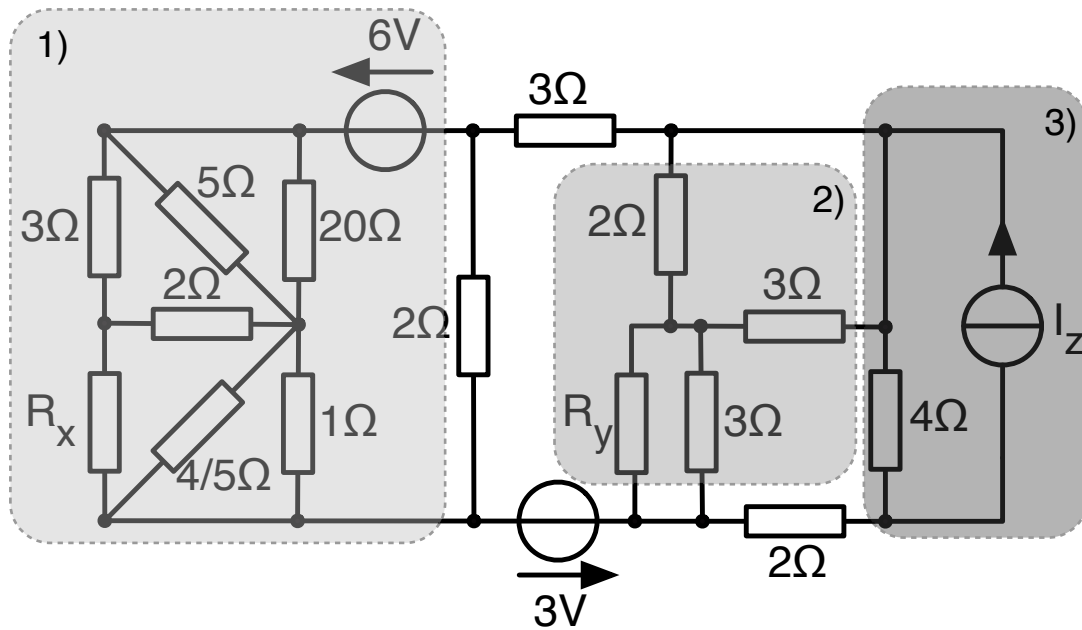


Aufgabe 2

Netzwerk

(19 Punkte)

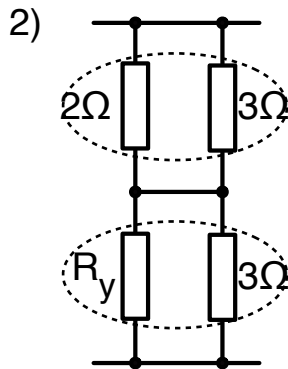
a)



$$\begin{aligned} R1 &= 4/3\Omega \\ R2 &= 2/3\Omega \\ R3 &= 8/9\Omega \end{aligned}$$

$$\frac{4}{3}\Omega + \left((R_x + \frac{2}{3}\Omega) \parallel \frac{4}{3}\Omega \right) \stackrel{!}{=} 2\Omega$$

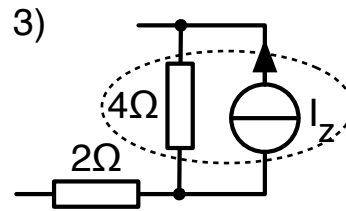
$$R_x = \frac{2}{3}\Omega$$



$$(2\Omega \parallel 3\Omega) + (R_y \parallel 3\Omega) \stackrel{!}{=} 4\Omega$$

$$R_y = 42\Omega$$

b)



$$I_z \cdot 4\Omega \stackrel{!}{=} 5\text{ V}$$

$$I_z = \frac{5}{4}\text{ A}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} (2+2)\Omega & -2\Omega & 0 \\ -2\Omega & (2+3+4)\Omega & -4\Omega \\ 0 & -4\Omega & (4+6)\Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\text{ V} \\ 3\text{ V} \\ -5\text{ V} \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel anwenden:

$$I_{M1} = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 & 0 \\ 3 & 9 & -4 \\ -5 & -4 & 10 \end{vmatrix} \Omega^2 \cdot \text{V}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{vmatrix} \Omega^3} = \frac{[4(-24 - 10) + 10(54 + 6)]\text{ V}}{[4(90 - 16) + 2(-20)]\Omega} = \frac{29}{16}\text{ A} = 1,8125\text{ A}$$

$$I_{M2} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & 10 \end{vmatrix} \Omega^2 \cdot \text{V}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{vmatrix} \Omega^3} = \frac{[4(30 - 20) + 2(60)]\text{ V}}{256\Omega} = \frac{5}{8}\text{ A} = 0,625\text{ A}$$

$$I_{M3} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \end{vmatrix} \Omega^2 \cdot \text{V}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{vmatrix} \Omega^3} = \frac{[4(-45 + 12) + 2(10 + 24)]\text{ V}}{256\Omega} = -\frac{1}{4}\text{ A} = -0,25\text{ A}$$

Aufgabe 3

Zeigerdiagramm

(22 Punkte)

a) Abgelesene Werte:

	Re	Im
$\underline{U}_0$	19V	+j 8V
$\underline{U}_{1a}$	14V	-j 2V
$\underline{U}_{1b}$	3,5V	-j 0,5V
$\underline{U}_{1c}$	1,5V	+j 10,5V
$\underline{I}_1$	350mA	-j 50mA

b) Berechnung der Bauteilgrößen:

mit $\underline{U}_0 = \underline{U}_{1a} + \underline{U}_{1b} + \underline{U}_{1c}$ aus Zeigerdiagramm:

$$\underline{Z}_a = \frac{\underline{U}_{1a}}{\underline{I}_1} = \frac{14V - j2V}{350mA - j50mA} = 40\Omega + j0\Omega \quad (\text{Widerstand})$$

$$\rightarrow R_a = 40\Omega$$

$$\underline{Z}_b = \frac{\underline{U}_{1b}}{\underline{I}_1} = \frac{3,5V - j0,5V}{350mA - j50mA} = 10\Omega + j0\Omega \quad (\text{Widerstand})$$

$$\rightarrow R_b = 10\Omega$$

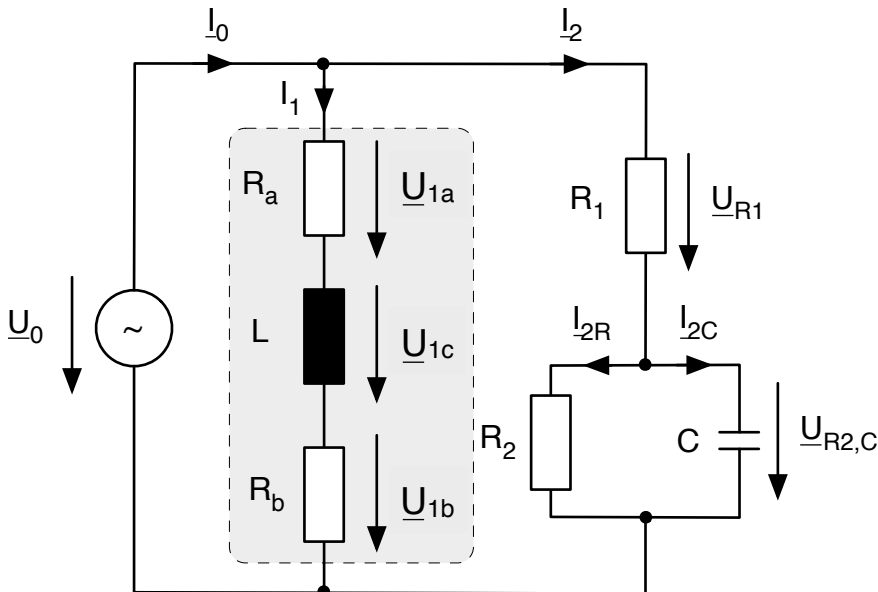
$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{U}_{1c}}{\underline{I}_1} = \frac{1,5V - j10,5V}{350mA - j50mA} = 0\Omega + j30\Omega \quad (\text{Spule})$$

$$\rightarrow j\omega L = j30\Omega$$

$$\rightarrow L = \frac{30\Omega}{2\pi 50Hz} = 95,5mH$$

c) Schaltbild:

- I. Durch alle Bauteile fließt der gleiche Strom I_1 . Daher Reihenschaltung.
- II. Strom I_1 und Spannungen U_{1a} sowie U_{1b} in Phase. Daher Widerstände
- III. Die Spannung U_{1c} eilt dem Strom voraus, daher Induktivität.



d) Berechnung der Spannungen und Ströme:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_0}{R_1 + \underline{Z}_{R2,C}}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{R2,C} &= \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2} = \frac{70\Omega}{1 + j \cdot 2\pi \cdot 50\text{Hz} \cdot 22\mu\text{F} \cdot 70\Omega} \\ &= 56,72\Omega - j27,44\Omega \end{aligned}$$

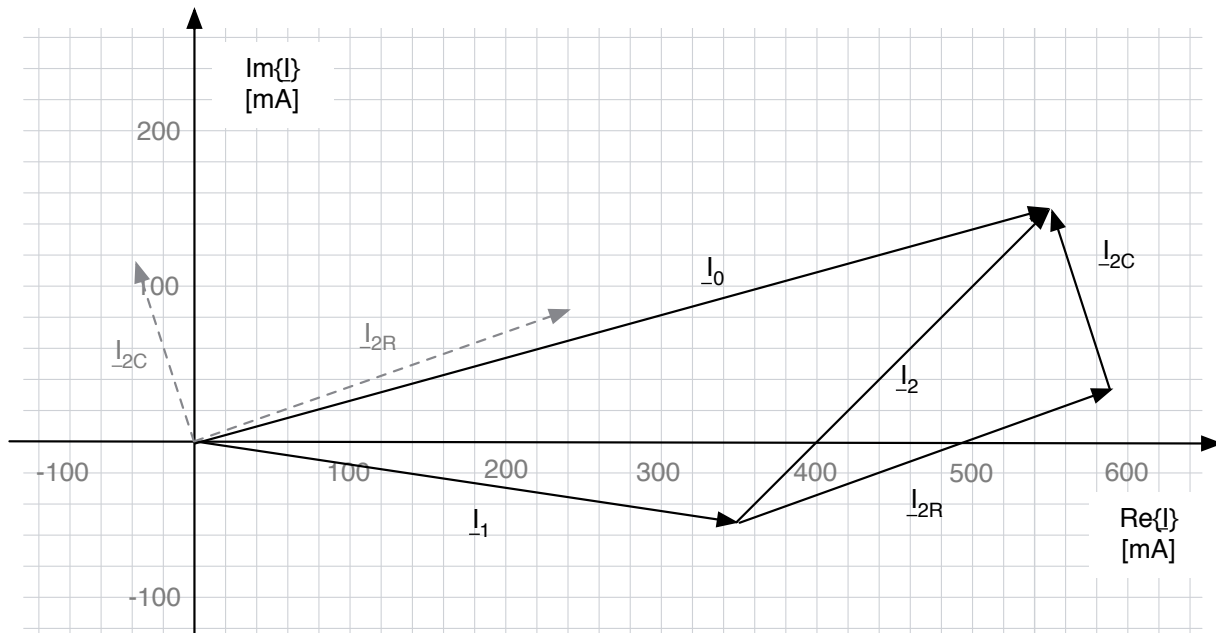
$$\begin{aligned} \underline{I}_2 &= \frac{19\text{V} + j8\text{V}}{10\Omega + 56,72\Omega - j27,44\Omega} = 201,38\text{mA} + j202,73\text{mA} \\ &\approx 200\text{mA} + j200\text{mA} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{R1} &= R_1 \cdot \underline{I}_2 = 10\Omega \cdot (201,38\text{mA} + j202,73\text{mA}) = 2,01\text{V} + j2,03\text{V} \\ &\approx 2\text{V} + j2\text{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{R2,C} &= \underline{Z}_{R2,C} \cdot \underline{I}_2 = (56,72\Omega - j27,44\Omega) \cdot (201,38\text{mA} + j202,73\text{mA}) \\ &= 16,99\text{V} + j5,97\text{V} \\ &\approx 17\text{V} + j6\text{V} \end{aligned}$$

e) Zeigerdiagramme

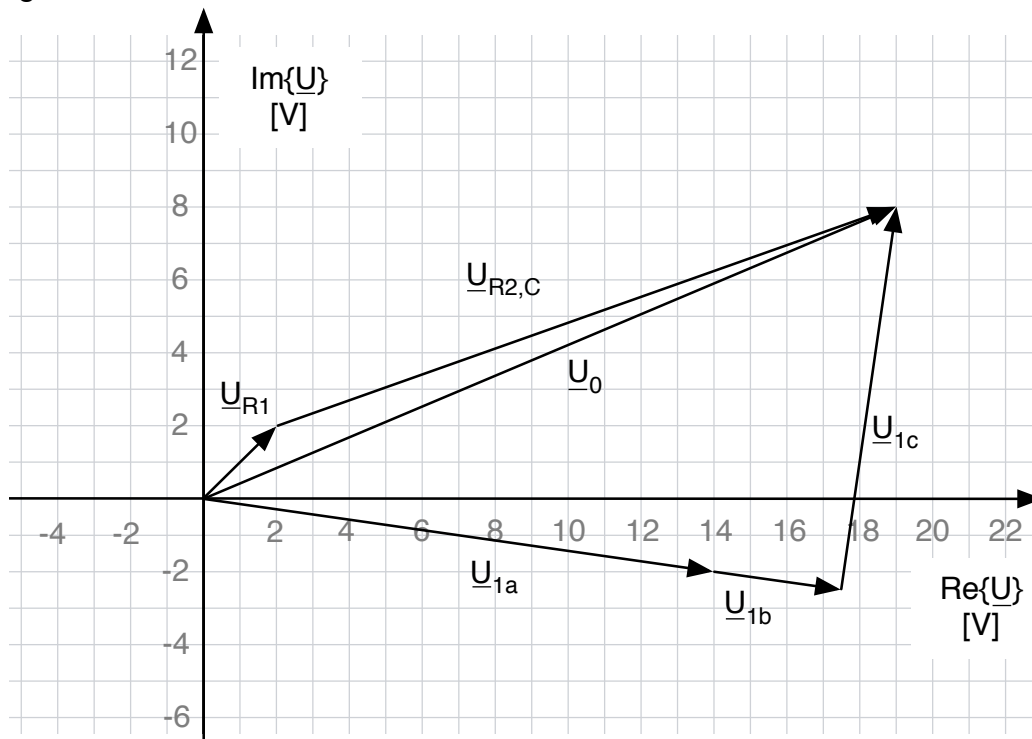
Strom:

Die Richtung von $I_{2R}+I_{2C}$ folgt aus $\underline{U}_{R2,C}$.

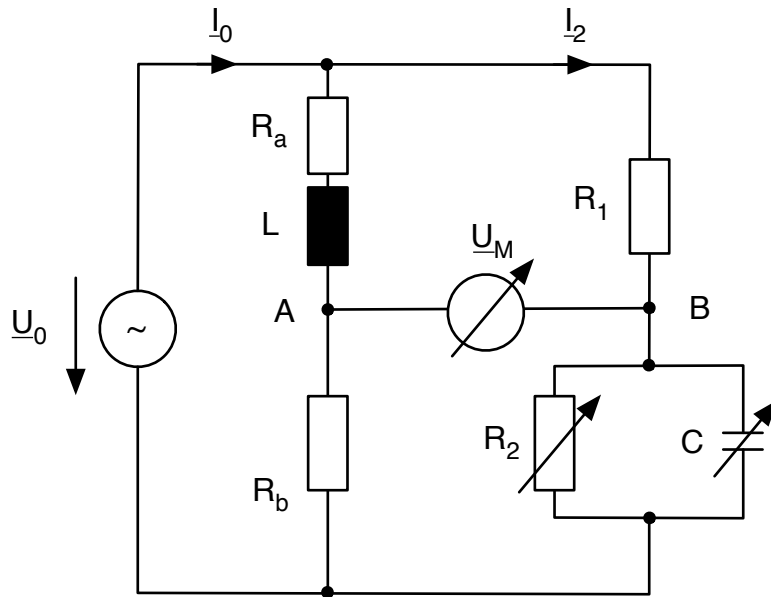
$$I_{2R} \approx 240\text{mA} + j85\text{mA}$$

$$I_{2C} \approx -42\text{mA} + j120\text{mA}$$

Spannung:



- f) Bei dieser Schaltung handelt es sich um eine Maxwell-Wien-Brücke mit der verlustbehaftete Spulen vermessen werden können. Hierfür muss die Spannung zwischen A und B gemessen werden. Der Abgleich erfolgt über R_2 und C. Deren Größen müssen so eingestellt werden, dass die Spannung U_M auf 0V abgeglichen ist.



(Zeichnung zur Lösung der Aufgabe nicht erforderlich)

Aufgabe 4

Bodediagramm

(21 Punkte)

a)

$$a_v = \left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \left| \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \right| = \frac{\left| \frac{1}{j\omega C} \right|}{\left| R + \frac{1}{j\omega C} \right|} = \frac{1}{|j\omega RC + 1|} = \dots$$

wähle

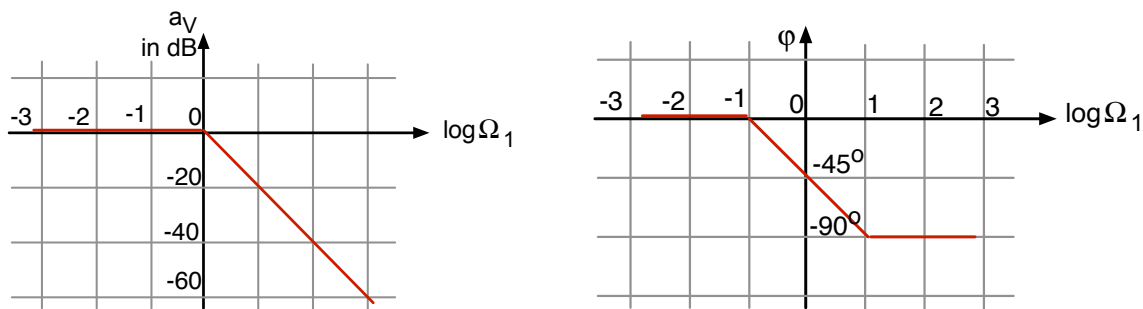
$$\Omega_a = \frac{\omega}{\omega_1}, \quad \omega_a = \frac{1}{RC}$$

$$\dots = \frac{1}{|j\Omega_a + 1|} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_a^2 + 1}}$$

$$\frac{a_v}{\text{dB}} = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\Omega_a^2 + 1}}\right) = 20 \log(1) - 20 \log(\sqrt{\Omega_a^2 + 1})$$

$$\varphi = \varphi_Z - \varphi_N = 0 - \arctan\left(\frac{\omega RC}{1}\right) = -\arctan(\Omega_a)$$

b)

c) $R = 1\text{k}\Omega, C = 100\text{nF}, f = 125\text{Hz}$

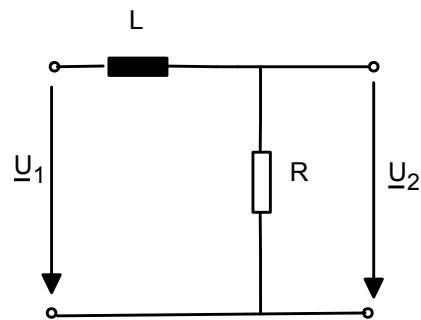
$$\Omega_a = \frac{\omega}{\omega_a} = \frac{\omega}{\frac{1}{RC}} = \omega RC = 2\pi f RC = 2\pi \cdot 125\text{Hz} \cdot 1\text{k}\Omega \cdot 100\text{nF} = 0.0785 \frac{\Omega\text{F}}{\text{s}} = 0.0785 \frac{\frac{\text{V}}{\text{A}} \frac{\text{As}}{\text{s}}}{\text{s}} = 0.0785$$

$$\frac{a_v}{\text{dB}}(\Omega_a = 0.0785) = -\frac{20}{2} \log\left((0.0785)^2 + 1\right) = -0,0267$$

$$U_{2\text{eff}} = 0,997\text{V} \approx 1\text{V}$$

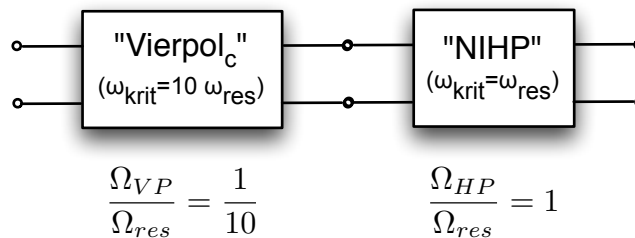
$$\varphi_{125} = 4,49^\circ$$

d)

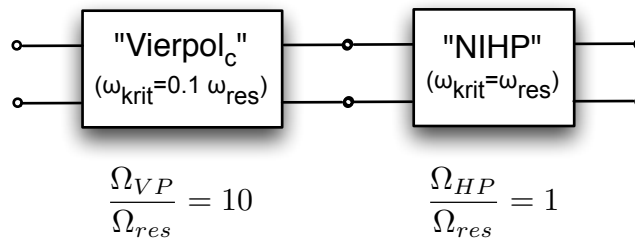


$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$$

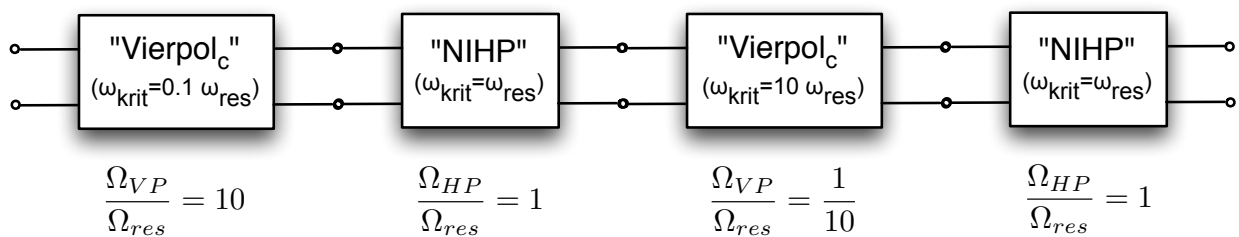
e) (1)



(2)

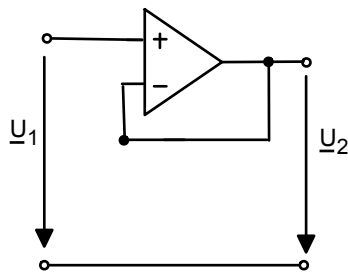


Schaltung des Kerbfilter (notch filter):



- f) Passive Vierpole werden voneinander mithilfe eines Spannungsfolgers (Synonym: „Impedanzwandler“) entkoppelt.

Schaltungsskizze:



Aufgabe 5**Operationsverstärker**

(16 Punkte)

a) Übertragungsfunktion Teilschaltung 1:

Maschengleichungen :

$$M1 : -U_{e1} + R_1 I = 0$$

$$M2 : -U_{a1} - R_2 I = 0$$

auflösen nach Strom :

$$M1 : I = \frac{U_{e1}}{R_1}$$

$$M2 : I = -\frac{U_{a1}}{R_2}$$

gleichsetzen :

$$\frac{U_{e1}}{R_1} = -\frac{U_{a1}}{R_2}$$

auflösen :

$$U_{a1} = -\frac{R_2}{R_1} U_{e1}$$

Knotenpotentiale :

$$K : \frac{U_{e1} - U_n}{R_1} = \frac{U_n - U_{a1}}{R_2}$$

mit $U_n = U_p = 0$

$$K : \frac{U_{e1}}{R_1} = -\frac{U_{a1}}{R_2}$$

$$U_{a1} = -\frac{R_2}{R_1} U_{e1}$$

b) Übertragungsfunktion Teilschaltung 2:

Knotenpotentiale :

$$K : \frac{U_{a1} - U_n}{R_4} + \frac{U_{e2} - U_n}{R_3} = \frac{U_n - U_{a2}}{R_5}$$

mit $U_n = U_p = 0$

$$\frac{U_{a1}}{R_4} + \frac{U_{e2}}{R_3} = -\frac{U_{a2}}{R_5}$$

$$U_{a2} = -\frac{R_5}{R_4}U_{a1} - \frac{R_5}{R_3}U_{e2}$$

c)

Damit $U_{a2} = -(U_{a1} + U_{e2})$ ist, muss gelten :

$$1 : \frac{R_5}{R_4} \stackrel{!}{=} 1$$

$$2 : \frac{R_5}{R_3} \stackrel{!}{=} 1$$

daraus folgt :

$$R_3 = R_4 = R_5$$

d)

Gesamtübertragungsfunktion :

$$U_{a2} = f(U_{e1}, U_{e2})$$

$$U_{a2} = -\frac{R_5}{R_4}U_{a1} - \frac{R_5}{R_3}U_{e2}$$

$$U_{a2} = \frac{R_5}{R_4} \frac{R_2}{R_1} U_{e1} - \frac{R_5}{R_3} U_{e2}$$

Ergebnis aus c) :

$$U_{a2} = -(U_{a1} + U_{e2})$$

Einsetzen in Gesamtübertragungsfunktion :

$$U_{a2} = \frac{R_2}{R_1} U_{e1} - U_{e2}$$

Damit $U_{a2} = 3U_{e1} - U_{e2}$ ist, muss gelten :

$$\frac{R_2}{R_1} \stackrel{!}{=} 3$$

$$R_2 = 3R_1$$

e)

Teilschaltung 1:	Invertierender (Spannungs-)Verstärker
Teilschaltung 2:	Invertierender Addierer
Gesamtschaltung:	Teilverstärkender Differenzverstärker <i>oder</i> Teilverstärkender Subtrahierer <i>oder</i> Minuend-verstärkender Subtrahierer