Karlsruhe Institute of Technology (KIT)
Institut für Biomedizinische Technik

Prof. Dr. rer. nat. O. Dössel
Kaiserstr. 12 / Geb 30.33
Tel.: 0721 / 608 - 2650

Dipl.-Ing. W. Schulze
Kaiserstr. 12 / Geb 30.33
Tel.: 0721 / 608 - 42751

Bachelorprüfung: Lineare elektrische Netze
09. September 2011

Lösung

Aufgabe 1 Ortskurve (23 Punkte)

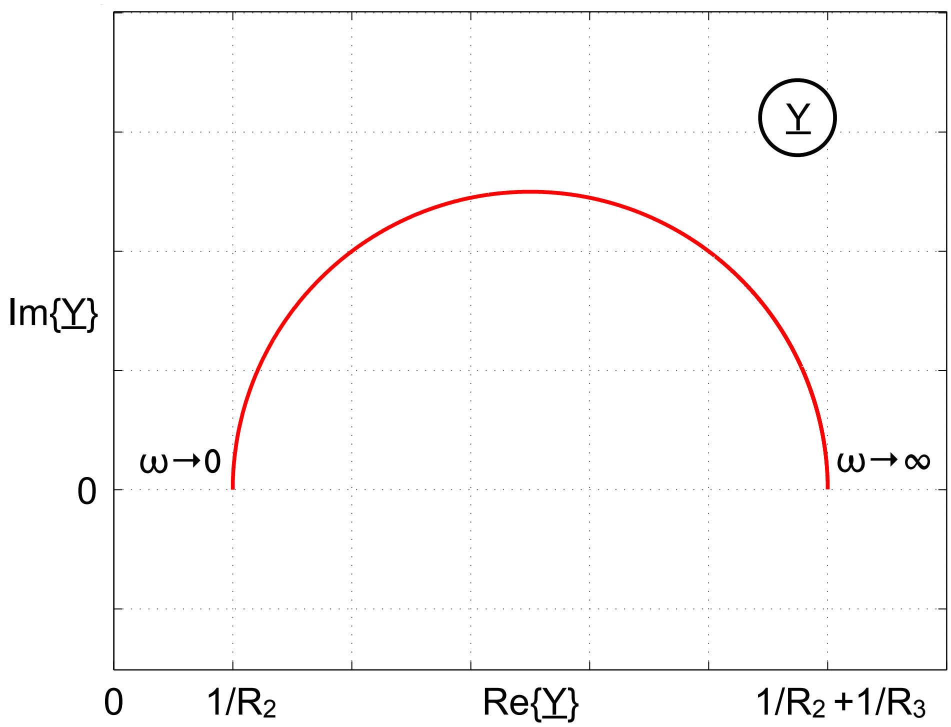
a)

$$\begin{aligned}
\underline{Z}(\omega) &= j\omega L_1 + \frac{R_1 j\omega L_2}{R_1 + j\omega L_2} \\
&= j\omega L_1 + \frac{R_1 j\omega L_2}{R_1 + j\omega L_2} \cdot \frac{R_1 - j\omega L_2}{R_1 - j\omega L_2} \\
&= j\omega L_1 + \frac{R_1 j\omega L_2 \cdot (R_1 - j\omega L_2)}{R_1^2 + \omega^2 L_2^2} \\
&= j\omega L_1 + \frac{R_1^2 j\omega L_2 + R_1\omega^2 L_2^2}{R_1^2 + \omega^2 L_2^2} \\
&= \frac{R_1\omega^2 L_2^2}{R_1^2 + \omega^2 L_2^2} + j(\omega L_1 + \frac{R_1^2 \omega L_2}{R_1^2 + \omega^2 L_2^2})
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\underline{Y}(\omega) &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{j\omega C}} \\
&= \frac{1}{R_2} + \frac{j\omega C}{j\omega C R_3 + 1} \\
&= \frac{1}{R_2} + \frac{j\omega C}{j\omega C R_3 + 1} \cdot \frac{j\omega C R_3 - 1}{j\omega C R_3 - 1} \\
&= \frac{1}{R_2} + \frac{j\omega C \cdot (j\omega C R_3 - 1)}{-\omega^2 C^2 R_3^2 - 1} \\
&= \frac{1}{R_2} + \frac{-\omega^2 C^2 R_3 - j\omega C}{-\omega^2 C^2 R_3^2 - 1} \\
&= \frac{1}{R_2} + \frac{\omega^2 C^2 R_3 + j\omega C}{\omega^2 C^2 R_3^2 + 1} \\
&= \frac{1}{R_2} + \frac{\omega^2 C^2 R_3}{\omega^2 C^2 R_3^2 + 1} + j\frac{\omega C}{\omega^2 C^2 R_3^2 + 1}
\end{aligned}$$

c)



d) Wenn R_3 vergrössert wird, wird der Radius der Admittanzkurve kleiner, der Realanteil für $\omega \to \infty$ wird kleiner, der Realanteil für $\omega \to 0$ bleibt unverändert

Wenn R_3 verkleinert wird, wird der Radius der Admittanzkurve größer, der Realanteil für $\omega \to \infty$ wird größer, der Realanteil für $\omega \to 0$ bleibt unverändert

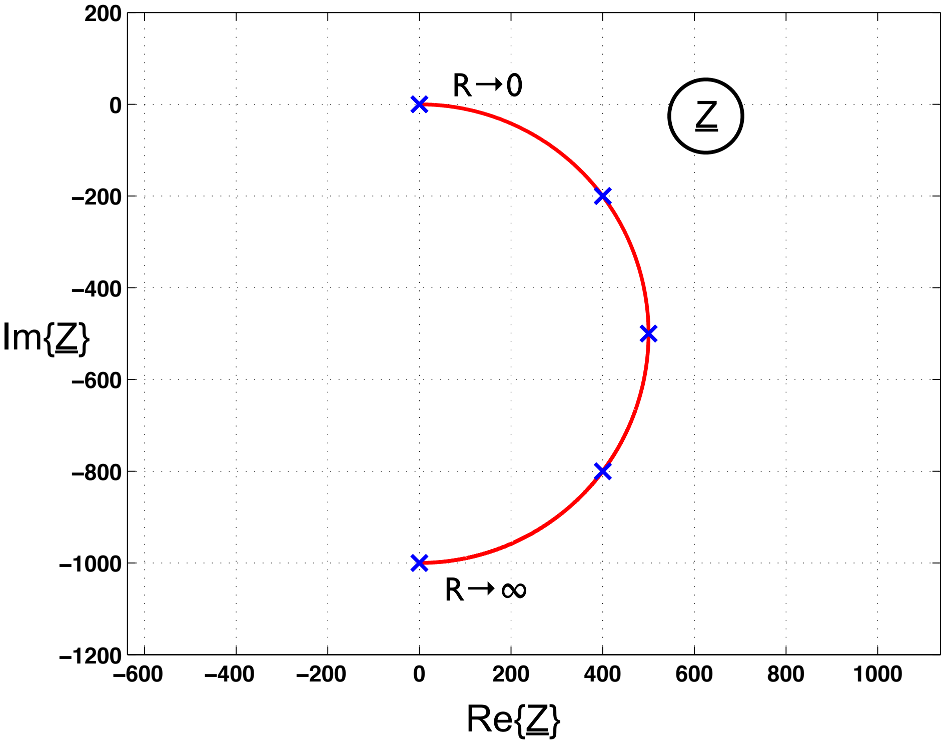
e)

$$\underline{Y}(R_2) = \frac{1}{R_2} + j\omega C$$

$$\begin{aligned}
\underline{Z}(R_2) &= \frac{1}{\underline{Y}(R_2)} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C} \\
&= \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2} \\
&= \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2} \cdot \frac{1 - j\omega C R_2}{1 - j\omega C R_2} \\
&= \frac{R_2 \cdot (1 - j\omega C R_2)}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2} \\
&= \frac{R_2 - j\omega C R_2^2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2} \\
&= \frac{R_2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2} - j\frac{\omega C R_2^2}{1 + \omega^2 C^2 R_2^2}
\end{aligned}$$

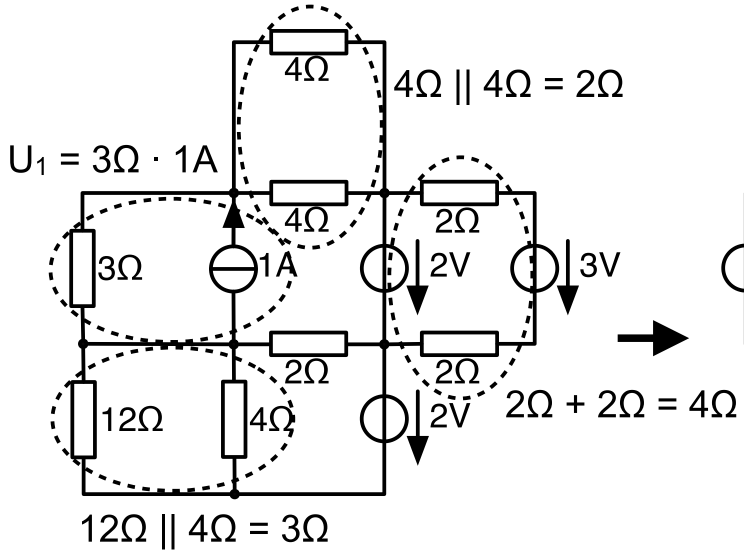
R_2	$\underline{Z}$
0 Ω	0
500 Ω	400 - 200j
1000 Ω	500 - 500j
2000 Ω	400 - 800j
$R \to \infty$	0-1000j

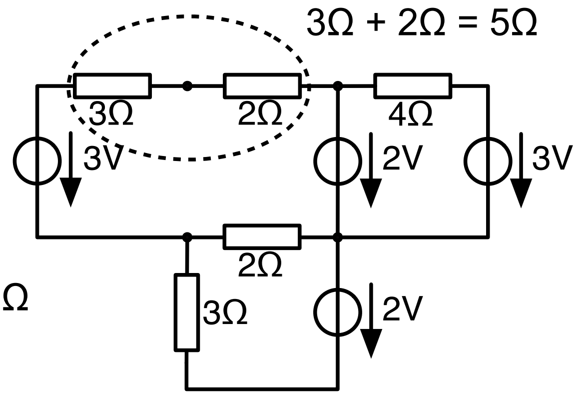
f)

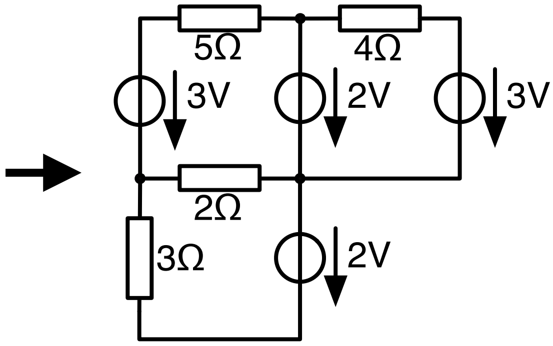


Aufgabe 2 Netzwerk (15 Punkte)

a)







$R_1 = 3\Omega$	$U_1 = 3V$
$R_2 = 2\Omega$	$U_2 = 2V$
$R_3 = 5\Omega$	$U_3 = 3V$
$R_4 = 4\Omega$	$U_4 = 2V$

b)

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} (R_1 + R_2) & -R_2 & 0 \\ -R_2 & (R_2 + R_3) & 0 \\ 0 & 0 & R_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_4 \\ U_1 - U_2 \\ U_2 - U_3 \end{pmatrix}$$

c)

Abgleichbedingung:
kein Strom durch R = 5Ω

$$\frac{U_1}{U_2} \stackrel{!}{=} \frac{U_3}{U_4}$$

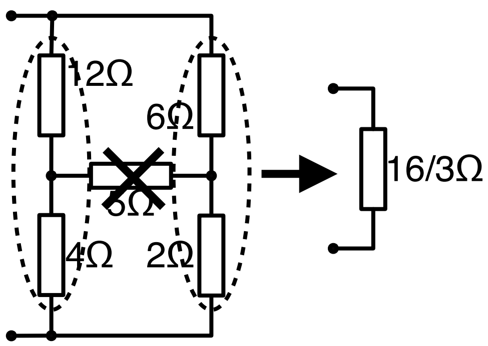
$$\frac{12\,\Omega}{4\,\Omega} \stackrel{!}{=} \frac{18\,\Omega \parallel R_x}{2\,\Omega}$$

$$6\,\Omega = \frac{18\,\Omega \cdot R_x}{18\,\Omega + R_x}$$

$$\Rightarrow R_x = 9\,\Omega$$

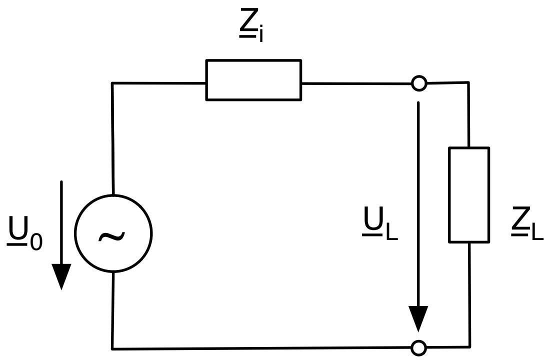
Gesamtwiderstand:

(12Ω + 4Ω) || (6Ω + 2Ω) = 16/3Ω



Aufgabe 3 Zeigerdiagramm (16 Punkte)

a)



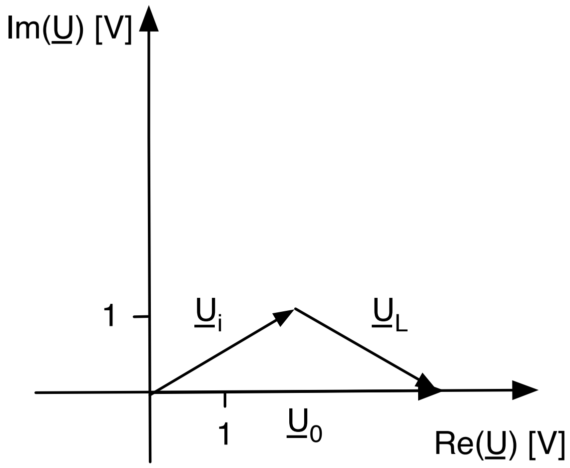
b) $\underline{Z}_L = \underline{Z}_i^*$ (*: konjugiert komplex)
Die Wirkleistung in der Last wird maximal.

c) Strom berechnen:

$$\frac{4V}{(2+j)+(2-j)\Omega} = 1A$$

oder Spannungsteiler:

$$\underline{U}_L = \frac{(2-j)\Omega}{(2-j)+(2+j)\Omega} 4V = (2-j)V$$



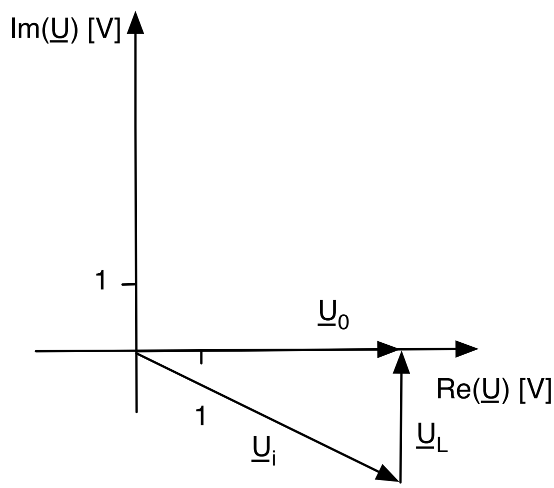
d)

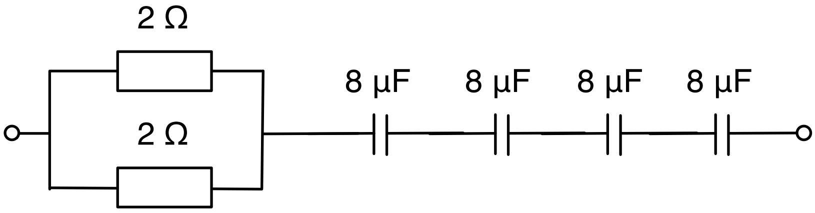
$$\underline{U}_L = j0.5\Omega \cdot 4A = j2V$$

$$\underline{U}_i = (4-j2)V$$

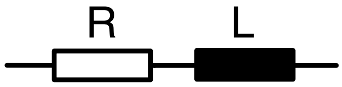
$$\underline{Z}_i = \frac{(4-j2)V}{4A} = (1-j0.5)\Omega$$

$$-j0.5\Omega \stackrel{!}{=} \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j4}{10^6 s^{-1} \cdot 8\mu F}$$





e) Die Innenimpedanz muss nun induktiv sein.



ωL=0,5

R=1Ω
L=0,5µH

Aufgabe 4 Bodediagramm (19 Punkte)

a) a_{v1}

$$
\begin{aligned}
a_{v1} &= 20 \cdot log \left| \frac{U_{a1}}{U_{e1}} \right| \\
\frac{U_{a1}}{U_{e1}} &= -\frac{C_1||R_2}{R1} = -\frac{\frac{R_2}{j\omega C_1}}{R_1 \cdot (R_2 + \frac{1}{j\omega C_1})} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega C_1 R_2} \\
a_{v1} &= 20 \cdot log \left| -\frac{R_2}{R_1} \right| + 20 \cdot log \left| \frac{1}{1 + j\omega C_1 R_2} \right|
\end{aligned}
$$

Normierung:

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega}{\omega_1} &= \Omega_1 = \omega \cdot C_1 R_2 \\
\omega_1 &= \frac{1}{C_1 R_2}
\end{aligned}
$$

Normiertes a_{v1} und φ_1

$$
a_{v1} = 20 \cdot log \left| -\frac{R_2}{R_1} \right| + 20 \cdot log \left| \frac{1}{1 + j\Omega_1} \right|
$$

Phase:

$$
\varphi_1 = \pi - arctan \left(\frac{\Omega_1}{1} \right)
$$

b) Es handelt sich um einen verstärkenden Hochpass.

c) Die Knickfrequenz bestimmt sich aus der Normierung.

$$
\begin{aligned}
&\Omega_2 = \frac{\omega}{\omega_2} = \omega RC = 2\pi f RC \\
&\text{mit: } log\left(\Omega_2(f_k)\right) = 0 \rightarrow \Omega_2(f_k) = 1 \text{ für Knickfrequenz} \\
&\rightarrow f = \frac{1}{2\pi RC} = 10kHz
\end{aligned}
$$

d) Im Durchlassbereich zeigt das Bodediagramm eine Verstärkung von 40dB

$$40dB = 20log\left(\frac{U_a}{U_e}\right)$$
$$2 = log\left(\frac{U_a}{U_e}\right)$$
$$\rightarrow \frac{U_a}{U_e} = 10^2 = 100$$

Damit beträgt die Verstärkung V=100.

e) Die Frequenz f_A = 1kHz liegt nicht im Durchlassbereich. Deshalb muss die Verstärkung neu berechnet werden. Aus dem Bodediagramm erhält man $a_v(f_A$ = 1kHz) einen Wert von 20dB, da f_A genau eine Dekade unterhalb von f_K liegt.

$$20dB = 20log\left(\frac{U_a}{U_e}\right)$$
$$1 = log\left(\frac{U_a}{U_e}\right)$$
$$\rightarrow \frac{U_a}{U_e} = 10^1 = 10$$

Die Verstärkung beträgt somit V=10 und damit ergibt sich die Ausgangsspannung:

$U_{a\,ss}(f_A)=10U_{e\,ss}$

Da f_B = 15kHz im Durchlassbereich liegt, beträgt die Ausgangsspannung:

$U_{a\,ss}(f_B)=100U_{e\,ss}$

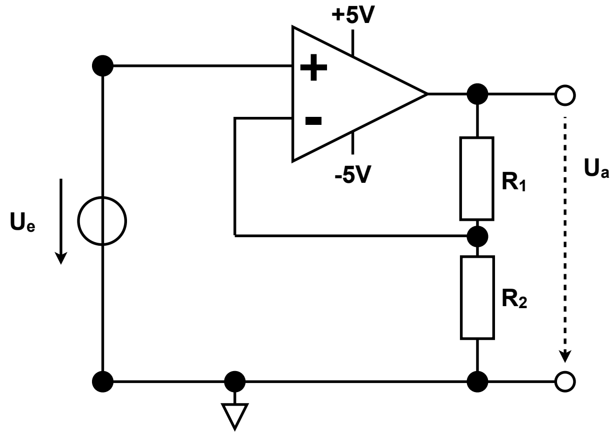
f) Es handelt sich um einen verstärkenden Hochpass. Es gilt folgende Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned}\frac{U_a}{U_e} &= V \cdot \frac{j\Omega_2}{1+j\Omega_2}\\ &= V \cdot \frac{j\omega RC}{1+j\omega RC}\end{aligned}$$

Aufgabe 5 Operationsverstärker (17 Punkte)

a) Mitkopplung: Der Ausgang ist auf den nicht-invertierenden Eingang zurückgekoppelt.
Gegenkopplung: Der Ausgang ist auf den invertierenden Eingang zurückgekoppelt.
Die Gegenkopplung sorgt dafür, dass die Differenzspannung am Eingang des Operationsvertärkers U_d auf einen extrem kleinen Wert heruntergezogen wird.

b)



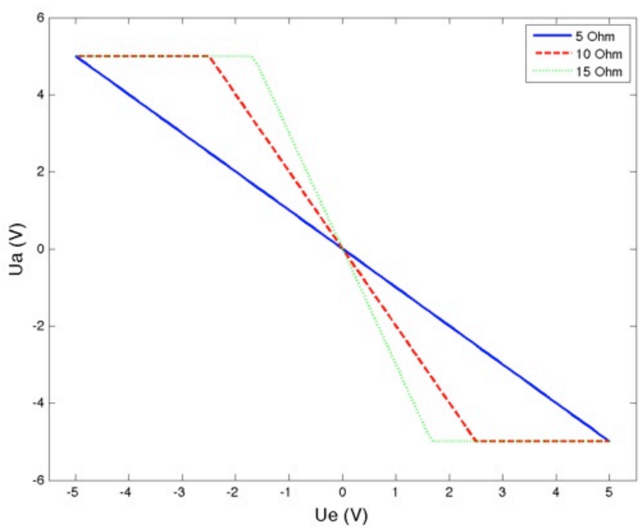
c)

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

d) Invertierender Verstärker

$$\frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_N}{R_1}$$

e)



f)