Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel   Übungsleiter: Dipl.-Ing. Walther Schulze

Klausur

07. September 2012
Beginn: 08:00 Uhr

Familienname:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

AUFKLEBER

Anzahl der beschriebenen Blätter:	
Diagramm:	kariert:

<u>Angaben zur Klausur:</u>

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein. Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare. Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug.

Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

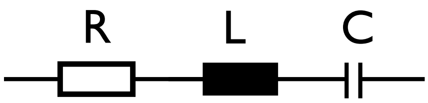
Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	17	
2	14	
3	22	
4	21	
5	16	
Gesamt:	90	

Note: ________

Aufgabe 1 **(17 Punkte)**

Ortskurve

Gegeben sei folgende Schaltung:



Bauteilwerte:

$R = 200\,\Omega,\ L = 2\,\text{mH},\ C = 2\,\text{mF}$

(a) Leiten Sie die Formel für die Impedanz $\underline{Z}$ der Schaltung allgemein her. (1 Punkt)

(b) Skizzieren Sie die Ortskurven der Impedanz $\underline{Z}$ und der Admittanz $\underline{Y}$. Nutzen Sie für $\underline{Z}$ das **Diagramm 1.1** und für $\underline{Y}$ das **Diagramm 1.2**. Markieren Sie darin jeweils $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$. (4 Punkte)

(c) Leiten Sie für beliebige L und C den Wert für ω her, bei dem die Ortskurven aus (b) die reelle Achse schneiden. (3 Punkte)

(d) Um welche Art von Schaltung handelt es sich? Geben Sie den Namen möglichst präzise an. (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben können auch ohne die vorherige gelöst werden!

Es gelte nun $R = 100\,\Omega$. Die obige Schaltung werde jetzt bei der Frequenz $f = \frac{1}{4\pi}$ kHz betrieben.

(e) Berechnen Sie $\underline{Z}(f = \frac{1}{4\pi}\,\text{kHz})$ und zeichnen Sie die Impedanz $\underline{Z}_e$ ebenfalls in **Diagramm 1.1** ein. (3 Punkte)

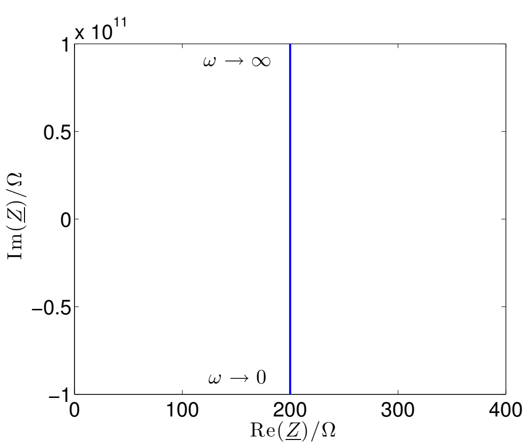
(f) Nun wird die Zahl der Spulenwindungen in der Schaltung aus (e) variiert. Dadurch ändert sich L. Es gelte weiterhin $f = \frac{1}{4\pi}$ kHz. Stellen Sie die Formel für $\underline{Z}(f = \frac{1}{4\pi}\,\text{kHz})$ in Abhängigkeit einer beliebigen Induktivität L auf. (2 Punkte)

(g) Zeichnen Sie die Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}(f = \frac{1}{4\pi}\,\text{kHz})$ in das **Diagramm 1.1** für $L \to 0$ bis $L \to \infty$. (3 Punkte)

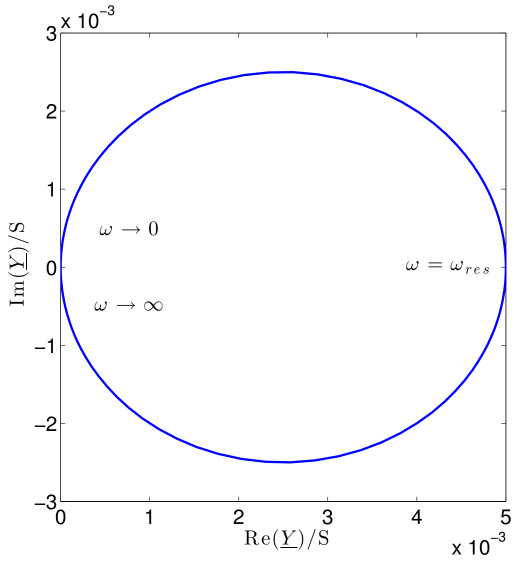
Lösung:

(a) $\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$

(b) Ortskurven:



(Skalierung der imaginären Achse nicht gefordert. Ausreichend ist Kennzeichnung des Verhaltens für ω gegen 0 und ∞.)



(Auch die Skalierung der imaginären Achse eintragen, Kennzeichnung des Verhaltens für ω gegen 0 und ∞.)

(c) $\omega : \mathrm{Im}(\underline{Z}(\omega)) = \mathrm{Im}(\underline{Y}(\omega)) = 0$

$$\begin{aligned}
0 = \mathrm{Im}(\underline{Z}(\omega)) &= \mathrm{Im}\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) \\
\Leftrightarrow 0 &= \omega L - \frac{1}{\omega C} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{\omega C} &= \omega L \\
\Leftrightarrow \frac{1}{LC} &= \omega^2 \\
\Leftarrow \omega &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \vee \omega = -\sqrt{\frac{1}{LC}}
\end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass die gesuchte Frequenz positiv ist, ergibt sich:

$$\omega = \sqrt{\tfrac{1}{LC}}$$

(d) Es handelt sich um einen RLC-Serienschwingkreis.

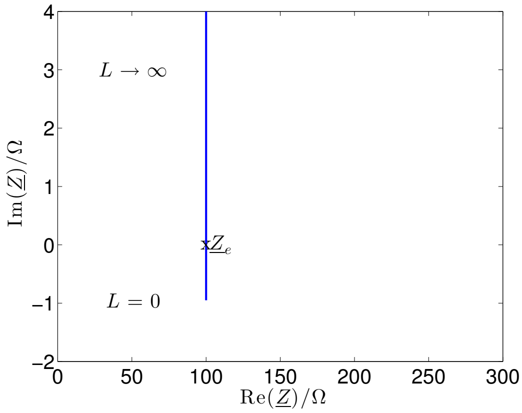
(e)

$$\begin{aligned}
\underline{Z}\left(f = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{kHz}\right) &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\
&= R + j\frac{2\pi}{4\pi}\,\mathrm{kHz}\,L + \frac{1}{j\frac{2\pi}{4\pi}\,\mathrm{kHz}\,C} \\
&= R + j\frac{1}{2}\,\mathrm{kHz}\,L - j\frac{2}{\mathrm{kHz}\,C} \\
&= 100\,\Omega + j\mathrm{Hz}\,\mathrm{H} - j\frac{1}{\mathrm{Hz}\,\mathrm{F}} \\
&= 100\,\Omega + j\frac{1}{s}\frac{V s}{A} - j\frac{1}{\frac{1}{s}\frac{As}{V}} \\
&= 100\,\Omega
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\underline{Z}\left(f = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{kHz}\right) &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\
&= R + j\frac{2\pi}{4\pi}\,\mathrm{kHz}\,L + \frac{1}{j\frac{2\pi}{4\pi}\,\mathrm{kHz}\,C} \\
&= 100\,\Omega + j\frac{1}{2}\,\mathrm{kHz}\,L - j\frac{1}{\mathrm{Hz}\,\mathrm{F}} \\
&= 100\,\Omega + j\frac{1}{2}\,\mathrm{kHz}\,L - j\frac{1}{\frac{1}{s}\frac{As}{V}} \\
&= 100\,\Omega + j\frac{1}{2}\,\mathrm{kHz}\,L - j\Omega
\end{aligned}$$

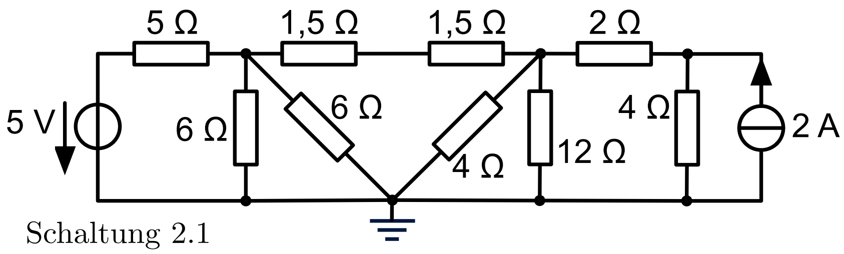
(g) Ortskurve:



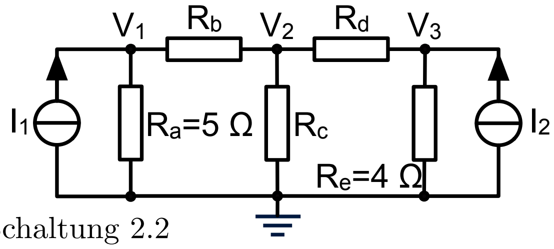
Aufgabe 2 (14 Punkte)

Netzwerk

Es gelten folgende Schaltungen:



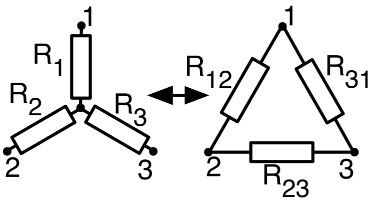
Schaltung 2.1



Schaltung 2.2

(a) Bringen Sie Schaltung 2.1 auf die Form von Schaltung 2.2. Bestimmen Sie hierfür sowohl die unbekannten Widerstandswerte R_b bis R_d als auch die Ströme I_1 und I_2 in Schaltung 2.2. (6 Punkte)

Hinweis: Stern-Dreiecks-Transformation



$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{12} = R_1 + R_2 + R_1\frac{R_2}{R_3}$$

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{23} = R_2 + R_3 + R_2\frac{R_3}{R_1}$$

$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{31} = R_3 + R_1 + R_3\frac{R_1}{R_2}$$

Die folgende Teilaufgabe kann auch ohne die vorherige gelöst werden!

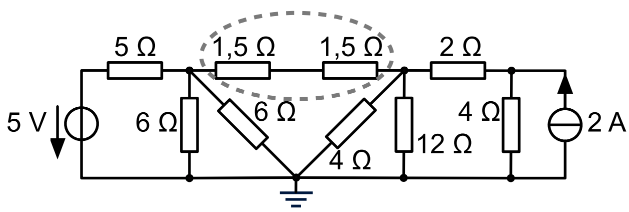
(b) Stellen Sie mit Hilfe des Knotenpunktpotentialverfahrens die Knotengleichungen von Schaltung 2.2 in Abhängigkeit von V_1, V_2 und V_3 und R_a bis R_e ohne Einsetzen von Werten **allgemein** auf. (3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe kann auch ohne die vorherige gelöst werden!

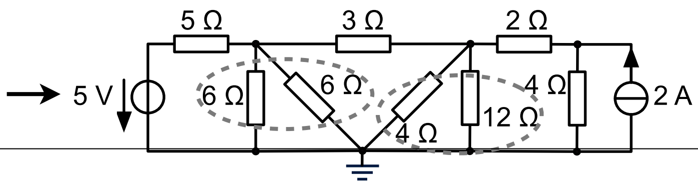
(c) In Schaltung 2.2 seien nun $R_a = 2\,\Omega$, $R_b = 1\,\Omega$, $R_c = \infty$, $R_d = 1\,\Omega$, $R_e = 1\,\Omega$, $I_1 = 1\,A$ und $I_2 = 1\,A$. Vereinfachen Sie zunächst die Schaltung, sodass sie nur noch aus einer einzigen Masche besteht. Bestimmen Sie dann die Leistung, die die resultierende Schaltung verbraucht. (5 Punkte)

Lösung:

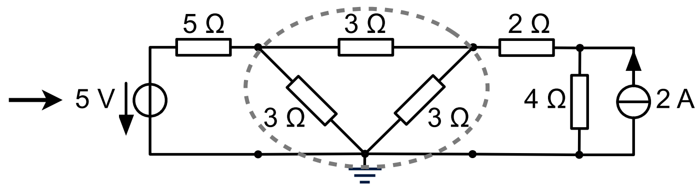
(a)



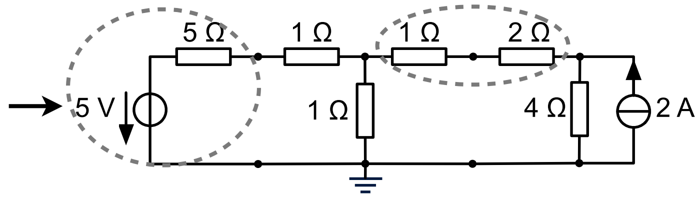
$1{,}5\,\Omega + 1{,}5\,\Omega$
$= 3\,\Omega$



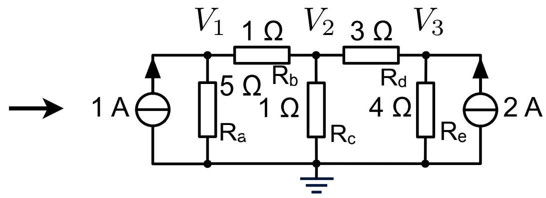
$6\,\Omega \| 6\,\Omega = 3\,\Omega$
$4\,\Omega \| 12\,\Omega$
$= 3\,\Omega$



Dreieck-Stern: $R_Y = \frac{1}{3} R_\triangle = 1\,\Omega$



$1\,\Omega + 2\,\Omega$
$= 3\,\Omega$
$I_1 = \frac{5\,V}{5\,\Omega} = 1\,A$

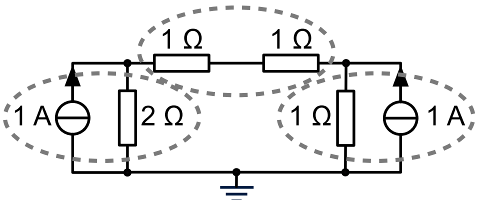


$I_1 = 1\,A \quad I_2 = 2\,A$
$R_a = 5\,\Omega \quad R_d = 3\,\Omega$
$R_b = 1\,\Omega \quad R_e = 4\,\Omega$
$R_c = 1\,\Omega$

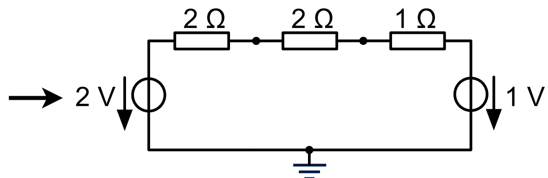
(b)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b}\right) V_1 - \frac{1}{R_b} V_2 &= I_1 \\
-\frac{1}{R_b} V_1 + \left(\frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_d}\right) V_2 - \frac{1}{R_d} V_3 &= 0 \\
-\frac{1}{R_d} V_2 + \left(\frac{1}{R_d} + \frac{1}{R_e}\right) V_3 &= I_2
\end{aligned}$$

(c)



$1\,\Omega + 1\,\Omega = 2\,\Omega$
$2\,\Omega \cdot 1\,A = 2\,V$
$1\,\Omega \cdot 1\,A = 1\,V$

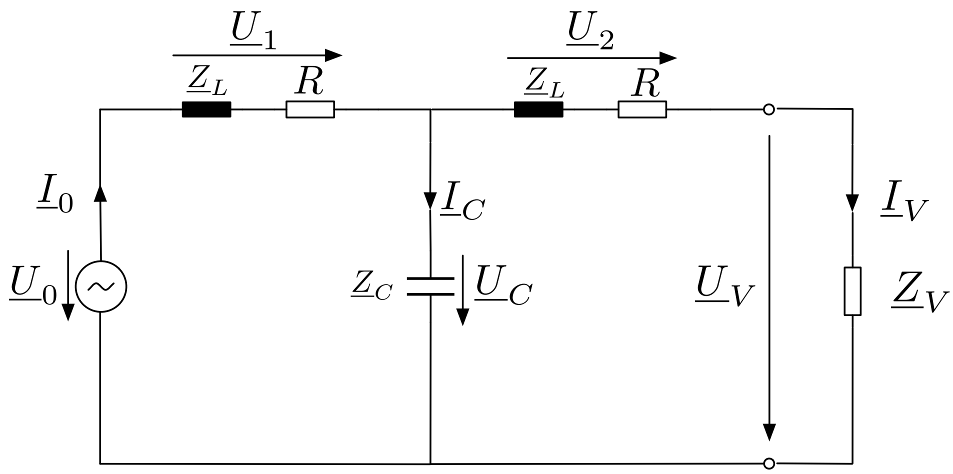


$2\,\Omega + 2\,\Omega + 1\,\Omega = 5\,\Omega$
$2\,V - 1\,V = 1\,V$
$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R}$
$= \frac{1}{5}\,W$

Aufgabe 3 **(22 Punkte)**

Zeigerdiagramm

Gegeben sei die Folgende Schaltung:



An dem Verbraucher liegt die Spannung $\underline{U}_V = 6\,kV$ (Effektivwert). Der in den Verbraucher fließende Strom beträgt $\underline{I}_V = (30 - j10)\,A$ (Effektivwert).

(a) Bestimmen Sie die an den Verbraucher abgegebene komplexe Leistung $\underline{S}_V$. Tragen Sie die berechnete komplexe Leistung in das **Zeigerdiagramm 3.1** ein. Markieren Sie die Wirkleistung P und die Blindleistung Q. Beachten Sie die Skalierung der Achsen! (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die komplexe Impedanz $\underline{Z}_V$. Geben Sie eine Reihenschaltung aus zwei Bauteilen an, die der Impedanz $\underline{Z}_V$ entspricht. Geben Sie den Wert der Bauelemente explizit an. Die Kreisfrequenz beträgt $\omega = 300\,s^{-1}$. (5 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können auch ohne die vorherige gelöst werden!

Nun soll folgendes gelten:

- $\underline{U}_V = 4\,V$
- $\underline{I}_V = (4 - j2)\,A$
- $\underline{Z}_L = j2\,\Omega$
- $R = 1\,\Omega$
- $\underline{Z}_C = -j3\,\Omega$

Für die folgenden Teilaufgaben sollen Sie das **Zeigerdiagramm 3.2** verwenden.

(c) Bestimmen Sie $\underline{U}_2$ rechnerisch und geben Sie $\underline{U}_2$ nach Real- und Imaginärteil an. Tragen Sie $\underline{U}_2$, sowie $\underline{U}_V$ und $\underline{I}_V$ in das Zeigerdiagramm ein. (3 Punkte)

(d) Bestimmen Sie $\underline{U}_C$ graphisch und geben Sie $\underline{U}_C$ nach Real- und Imaginärteil an. Die Konstruktionsmethode muss erkennbar sein. (2 Punkte)

(e) Bestimmen Sie $\underline{I}_C$ rechnerisch und tragen Sie $\underline{I}_C$ in das Zeigerdiagramm ein. Bestimmen Sie $\underline{I}_0$ graphisch und geben Sie $\underline{I}_0$ nach Real- und Imaginärteil an. Die Konstruktionsmethode muss erkennbar sein. (4 Punkte)

(f) Bestimmen Sie $\underline{U}_1$ rechnerisch und tragen Sie $\underline{U}_1$ in das Zeigerdiagramm ein. Ermitteln Sie $\underline{U}_0$ graphisch und geben Sie $\underline{U}_0$ nach Real- und Imaginärteil an. Die Konstruktionsmethode muss erkennbar sein. (4 Punkte)

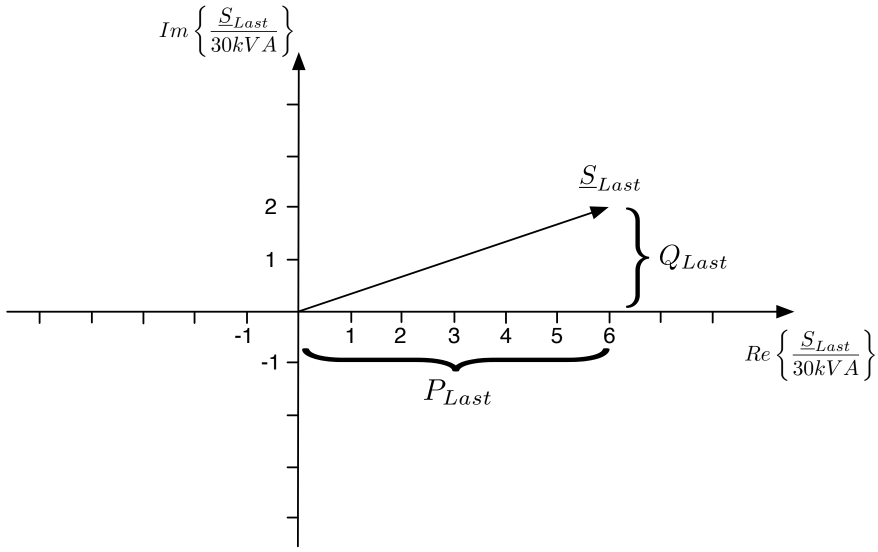
(g) Lesen Sie den Phasenwinkel $\varphi_{\underline{U}_0\underline{U}_V}$ zwischen der Eingangsspannung $\underline{U}_0$ und der Ausgangsspannung $\underline{U}_V$ aus dem Zeigerdiagramm ab und geben Sie diesen explizit an. (1 Punkt)

Lösung:

(a) Für die komplexe Leistung gilt allgemein: $\underline{S} = \underline{U}_{eff} \cdot \underline{I}^*_{eff}$.
Einsetzen der vorgegeben Größen liefert:

$$\underline{S}_V = (6\,kV) \cdot (30 - j10)^*\,A = (180 + j60)\,kVA$$

Für das Zeigerdiagramm der komplexen Leistung gilt dann:



(b) Für die Impedanz gilt:

$$\underline{Z}_V = \frac{6\,kV}{(30 - j10)\,A} = (180 + j60)\,\Omega$$

Diese Impedanz kann durch eine Reihenschaltung aus einem Widerstand und einer Spule dargestellt werden. Für eine solche Reihenschaltung gilt:

$$\underline{Z}_V = R + j\omega L$$

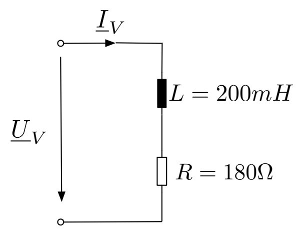
Aus dem Vergleich mit der ausgerechneten Impedanz ergibt sich:

$$R = 180\,\Omega$$
$$\omega L = 60\,\Omega$$

Auflösen für L liefert:

$$L = \frac{60\,\Omega}{300\,s^{-1}} = 200\,mH$$

Die Reihenschaltung sieht folgendermaßen aus:



(c) Für $\underline{U}_2$ gilt:

$$\underline{U}_2 = \underline{I}_V \cdot (R + \underline{Z}_L) = (4 - j2)\,A \cdot (1 + j2)\,\Omega$$
$$= (8 + j6)\,V$$

(d) Aus der Maschenregel gilt $\underline{U}_C = \underline{U}_2 + \underline{U}_V$. Diese Summe wird als Vektorsumme im Zeigerdiagramm dargestellt. Man erhält für die Spannung $\underline{U}_C$:

$$\underline{U}_C = (12 + j6)\,V$$

(e) Für $\underline{I}_C$ gilt:

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{(12 + j6)\,V}{-j3\,\Omega} = (-2 + j4)\,A$$

Aus der Knotenregel gilt $\underline{I}_0 = \underline{I}_C + \underline{I}_V$. Diese Summe wird als Vektorsumme im Zeigerdiagramm dargestellt. Man erhält für die Strom $\underline{I}_0$:

$$\underline{I}_0 = (2 + j2)\,A$$

(f) Für $\underline{U}_1$ gilt:

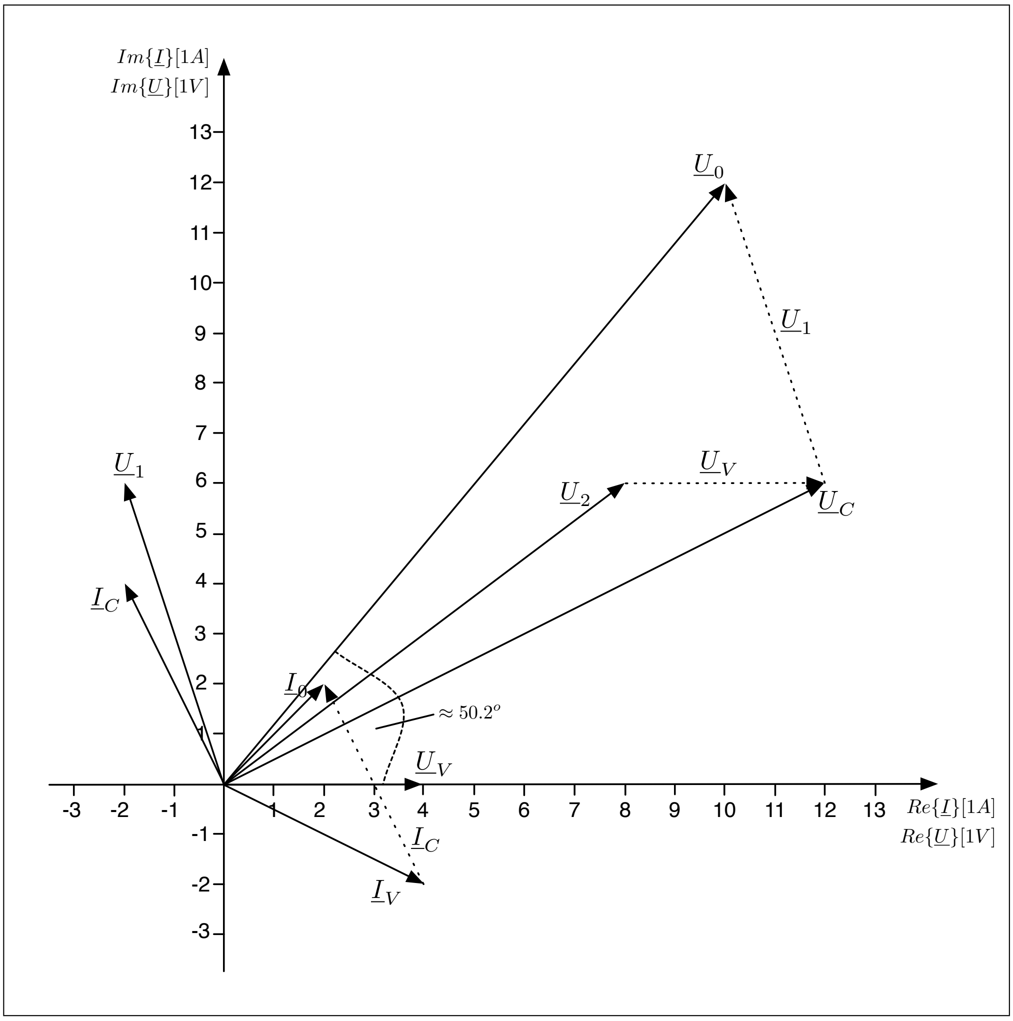
$$\underline{U}_1 = \underline{I}_0 \cdot (R + \underline{Z}_L) = (2 + j2)\,A \cdot (1 + j2)\,\Omega = (-2 + j6)\,V$$

Aus der Maschenregel gilt $\underline{U}_0 = \underline{U}_1 + \underline{U}_C$. Diese Summe wird als Vektorsumme im Zeigerdiagramm dargestellt. Man erhält für die Spannung $\underline{U}_0$:

$$\underline{U}_0 = (10 + j12)\,V$$

(g) Aus dem Diagramm kann man den Winkel $\varphi_{\underline{U}_0\underline{U}_V} \approx 50.2^o$ ablesen.

Das Zeigerdiagramm sieht folgendermaßen aus:



$Im\{\underline{I}\}[1A]$
$Im\{\underline{U}\}[1V]$
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
$Re\{\underline{I}\}[1A]$
$Re\{\underline{U}\}[1V]$
$\underline{U}_0$
$\underline{U}_1$
$\underline{U}_V$
$\underline{U}_2$
$\underline{U}_C$
$\underline{U}_1$
$\underline{I}_C$
$\underline{I}_0$
$\approx 50.2^o$
$\underline{U}_V$
$\underline{I}_C$
$\underline{I}_V$

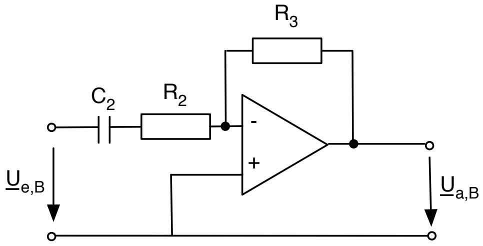
Aufgabe 4 **(21 Punkte)**

Bodediagramm

Gegeben seien eine Übertragungsfunktion:

$$A : \frac{\underline{U}_{a,A}}{\underline{U}_{e,A}} = \frac{1}{1 + j\omega C_1 R_1};$$

und eine Schaltung:
B:



$$R_1 = 10k\Omega, R_2 = 1k\Omega, R_3 = 10k\Omega, C_1 = C_2 = 20nF.$$

(a) Geben Sie für die Übertragungsfunktion A die dazugehörige Schaltung an (verwenden Sie möglichst wenige Bauteile). (4 Punkte)

(b) Geben Sie für die Schaltung B die entsprechende Übertragungsfunktion an. *(Hinweis: um nachfolgend eine Normierung durchzuführen, ziehen Sie den Verstärkungsfaktor vor den Bruch)* (1 Punkt)

(c) Benennen Sie die Schaltungen. (2 Punkte)

(d) Geben Sie für beide Schaltungen den Betrag av in der Einheit Dezibel und die Phase allgemein an, vereinfachen Sie die Ausdrücke. (Herleitung benötigt!) (4 Punkte)

(e) Normieren Sie die Schaltung A auf eine geeignete Normierungsfrequenz Ω_A und ermitteln Sie die zugehörige Grenzfrequenz f in Hz für die gegebenen Werte von R_1 und C_1. (2 Punkte)

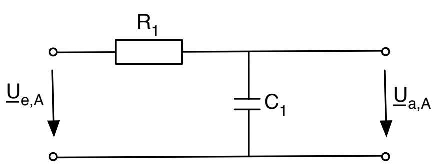
(f) Normieren Sie nun die Schaltung B auf die gleiche Normierungsfrequenz Ω_A und ermitteln Sie ebenfalls die Grenzfrequenz f in Hz für die gegebenen Werte von R_2, R_3 und C_2. Geben Sie die normierte Übertragungsfunktion an. (2 Punkte)

(g) Zeichnen Sie in die Diagramme D4 das Bodediagramm nach Betrag und Phase für beide Schaltungen ein (normiert auf ω_A, verwenden Sie hierzu zwei nicht rote Farben). (4 Punkte)

(h) Bilden Sie graphisch das Bodediagramm (nur die Amplitude) für die Reihenschaltung aus A und B. (2 Punkte)

Lösung:

(a) A:



(b) B:

$$\frac{\underline{U}_{a,B}}{\underline{U}_{e,B}} = -\frac{R_3}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = -\frac{j\omega C_2 R_3}{1 + j\omega C_2 R_2} = -\frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega C_2 R_2}$$

(c) A: Passiver Tiefpass 1. Ordnung
B: Aktiver Hochpass 1. Ordnung

(d)

$$\begin{aligned}
\frac{a_v}{\text{dB}} &= 20 \log \left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right| \quad \varphi = \arctan \left(\frac{\text{Im}\left(\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right)}{\text{Re}\left(\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right)} \right) \\
a_{v,A} &= 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega C_1 R_1} \right| = \\
&= 20 \log |1| - 20 \log |1 + j\omega C_1 R_1| = \\
&= -20 \log |1 + j\omega C_1 R_1| \\
a_{v,B} &= 20 \log \left| -\frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega C_2 R_2} \right| = \\
&= 20 \log \left| \frac{R_3}{R_2} \right| + 20 \log \left| \frac{j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega C_2 R_2} \right| = \\
&= 20 + 20 \log |j\omega C_2 R_2| - 20 \log |1 + j\omega C_2 R_2| \\
\varphi_A &= -\arctan \left(\frac{\omega C_1 R_2}{1} \right) = -\arctan(\omega C_1 R_2) \\
\varphi_B &= \arctan \left(-\frac{R_3}{R_2} \right) + \arctan \left(\frac{\omega C_2 R_2}{0} \right) - \arctan(\omega C_2 R_2) \\
&= -\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega C_2 R_2) = -\frac{\pi}{2} - arctan(\omega C_2 R_2)
\end{aligned}$$

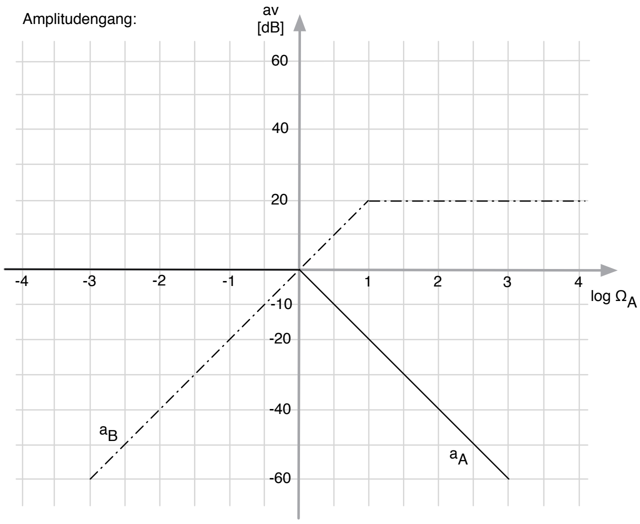
(e)

$$\begin{aligned}
\Omega_A &= \frac{\omega}{\omega_A}; \quad \omega_A = \frac{1}{C_1 R_1}; \quad \Omega_A = \omega C_1 R_1 \\
f_A &= \frac{1}{2\pi C_1 R_1} \approx 795.8Hz \\
\frac{\underline{U}_{a,A}}{\underline{U}_{e,A}} &= \frac{1}{1 + j\Omega_A}
\end{aligned}$$

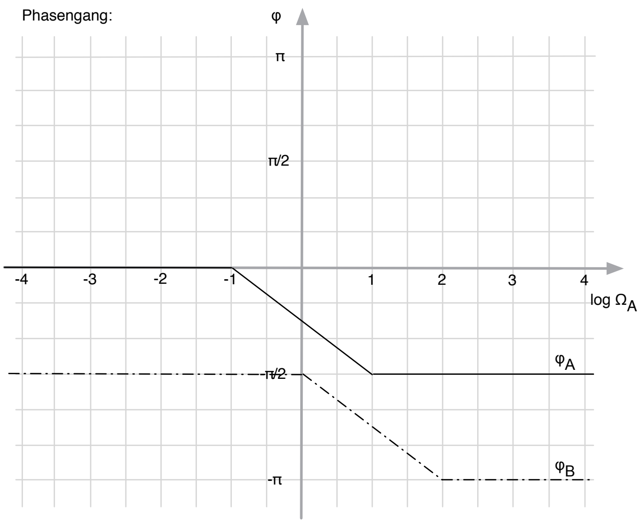
(f)

$$\begin{aligned}
\Omega_B &= \frac{\omega}{\omega_B}; \quad \omega_B = \frac{1}{C_2 R_2}; \quad \Omega_B = \omega C_2 R_2 \\
f_B &= \frac{1}{2\pi C_2 R_2} \approx 7.958kHz \\
\frac{\omega_B}{\omega_A} &= \frac{C_1 R_1}{C_2 R_2} = 10 \\
\omega_B &= 10\omega_A \rightarrow \text{Verschiebung um 1 Dekade} \\
\frac{\Omega_A}{\Omega_B} &= \frac{\omega_B}{\omega_A} = 10 \\
\frac{\underline{U}_{a,B}}{\underline{U}_{e,B}} &= -\frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{j10^{-1}\Omega_A}{1 + j10^{-1}\Omega_A}
\end{aligned}$$

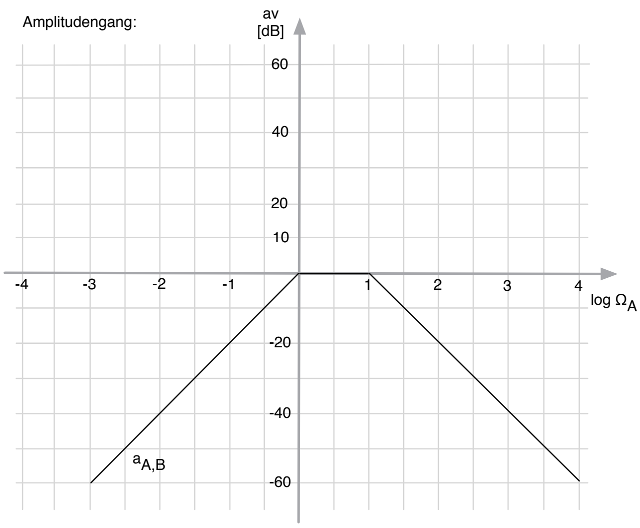
(g) Bode-Diagramm für die Amplitude:



Bode-Diagramm für die Phase:



(h) Bode-Diagramm für die Amplitude für die Reihenschaltung A,B:



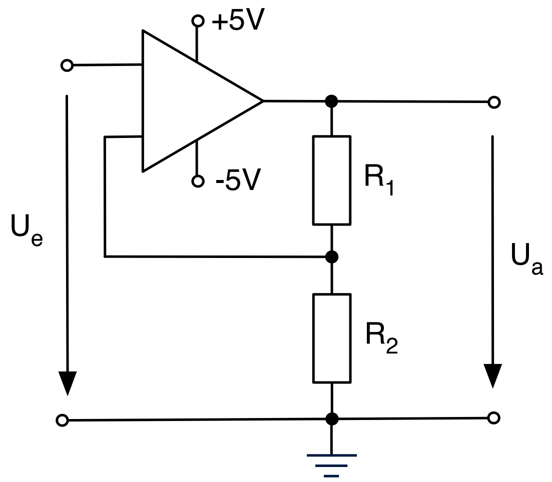
Aufgabe 5 **(16 Punkte)**

Operationsverstärker

(a) Welche goldene Regel gilt für die Eingangsspannungsdifferenz eines idealen Operationsverstärkers in Gegenkopplung? (2 Punkte)
Welche Annahme gilt für die Eingangsströme der invertierenden und nichtinvertierenden Eingänge?

Die folgenden Teilaufgaben können auch ohne die vorherige gelöst werden!

Gegeben sei folgende Schaltung:



(b) Benennen Sie die Schaltung! (2 Punkte)
Geben Sie die Übertragungsfunktion der Schaltung an!
(Keine Rechnung erforderlich)

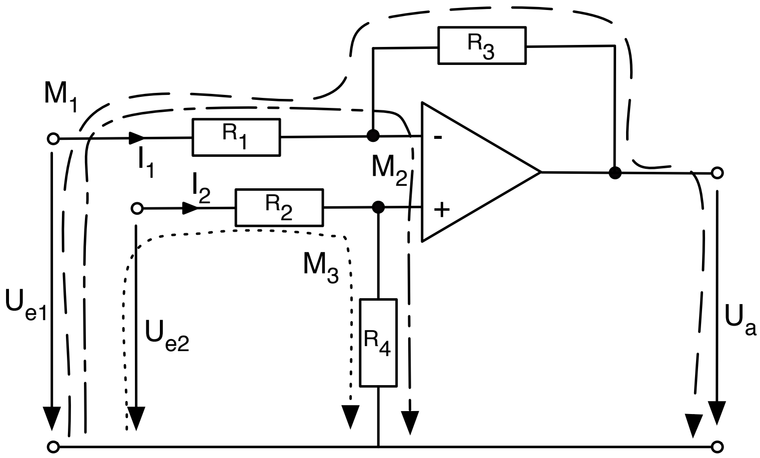
(c) Es gelten nun folgende Werte für die Bauteile: $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 100\,\Omega$ (3 Punkte)
Die Betriebsspannung des Operationsverstärkers betrage $\pm 5\,V$ und an den Eingang der Schaltung wird eine sinusförmige Wechselspannung U_e angelegt.
Zeichnen Sie jeweils eine Periode der Länge T der Eingangsspannung U_e und der Ausgangsspannung U_a für

- eine Amplitude von U_e =2 V in **Diagramm 5.1**
- eine Amplitude von U_e =3 V in **Diagramm 5.2**

Kennzeichnen Sie U_e und U_a deutlich!

Die folgenden Teilaufgaben können auch ohne die vorherigen gelöst werden!

Gegeben sei der folgende Differenzverstärker:



Die Schaltung soll nun mit Hilfe des Maschenstromverfahrens analysiert und dimensioniert werden.

(d) Stellen Sie die Maschengleichungen für die Maschen M1, M2 und M3 auf! (3 Punkte)

(e) Leiten Sie aus diesen Maschengleichungen die folgende Formel für die Ausgangsspannung U_a her: (3 Punkte)

$$U_a = \frac{R_4\,(R_1 + R_3)}{R_1\,(R_2 + R_4)} U_{e2} - \frac{R_3}{R_1} U_{e1}$$

Die folgenden Teilaufgaben können mit Hilfe der Angabe aus (e) auch ohne die vorherigen gelöst werden!

(f) Es gelte nun $R_1 R_4 = R_2 R_3$. Vereinfachen Sie damit das Ergebnis von Aufgabe (e) so weit wie möglich! (1 Punkt)

(g) Der Differenzverstärker soll nun genutzt werden, um eine betragsmäßige Verstärkung der Differenz um den Faktor 1000 zu erreichen. Wie muss der Widerstand R_1 gewählt werden, wenn die Bedingung aus Teil (f) erfüllt ist und R_3 den Wert $50\,k\Omega$ besitzt? (2 Punkte)

Lösung:

(a) Nach den goldenen Regeln für einen idealen Operationsverstärker in Gegenkopplung gilt:

- Tue einfach so, als ob $U_d = 0\,V$.
- Tue einfach so, als ob die Eingangsströme in den Operationsverstärker verschwindnen.

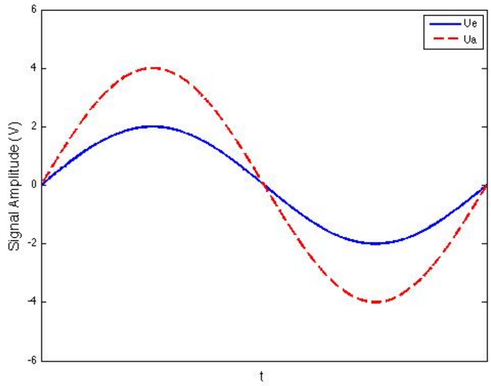
(b) Bei der Schaltung handelt es sich um einen nichtinvertierenden Spannungsverstärker. Für die Übertragungsfunktion folgt:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

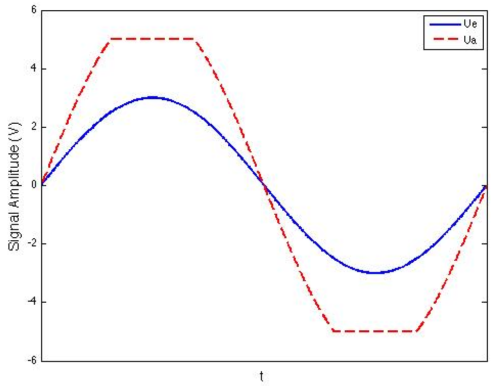
(c) Aus den Widerstandswerten ergibt sich die Verstärkung zu

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{100\,\Omega + 100\,\Omega}{100\,\Omega} = 2$$

Für eine Eingangswechselspannung mit der Amplitude 2 V ergibt sich der Ausgangsspannungsverlauf als ebenfalls sinusförmige Wechselspannung gleicher Frequenz und doppelter Amplitude zu:



Der Betrag der Ausgangsspannung kann den Betrag der Versorungsspannung des OP nicht überschreiten. Für eine Eingangsspannung mit der Amplitude 3 V ergibt sich der Ausgangsspannungsverlauf somit zu:



(d) Die gegebenen Maschen führen auf folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(M1)\quad & -U_{e1} + R_1 I_1 + R_3 I_1 + U_a = 0\\
(M2)\quad & -U_{e1} + R_1 I_1 + R_4 I_2 = 0\\
(M3)\quad & -U_{e2} + R_2 I_2 + R_4 I_2 = 0
\end{aligned}$$

(e) Lösen des Gleichungssystems aus (d) führt auf die gesuchte Ausgangsspannung U_a. Ein möglicher Weg dazu führt über das Auflösen von M3 in

$$I_2 = \frac{U_{e2}}{R_2 + R_4} \quad ,$$

was in M2 eingesetzt werden kann um I_1 zu erhalten:

$$I_1 = \frac{U_{e1}}{R_1} - \frac{R_4}{R_1}\frac{U_{e2}}{R_2 + R_4}$$

Nun kann I_1 in M1 eingesetzt werden. Auflösen dieser Gleichung nach U_a ergibt den gesuchten Term.

(f) Das Ergebnis von Teilaufgabe (d) kann umgeformt werden zu

$$U_a = \frac{R_3\left(R_1R_4 + R_3R_4\right)}{R_1\left(R_2R_3 + R_3R_4\right)}U_{e2} - \frac{R_3}{R_1}U_{e1} \quad ,$$

woraus durch die gegebene Beziehung $R_1R_4 = R_2R_3$ folgt

$$U_a = \frac{R_3}{R_1}(U_{e2} - U_{e1})$$

(g) Aus

$$U_a = \frac{R_3}{R_1}(U_{e2} - U_{e1}) = \frac{R_3}{R_1}\Delta U_e$$

folgt mit der gewünschten betragsmäßigen Verstärkung

$$\frac{U_a}{|\Delta U_e|} = \frac{R_3}{R_1} = 1000$$

und dem gegeben Wert für R_3 der Wert von R_1 zu

$$R_1 = R_3\frac{|\Delta U_e|}{U_a} = 50 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{10^3}\Omega = 50\Omega$$