

## Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel      Übungsleiter: Dipl.-Ing. Gustavo Lenis

---

# Klausur

06. September 2013

Beginn: 08:00 Uhr

Familienname:	<b>AUFKLEBER</b>
Vorname:	
Matrikel-Nr.:	

Anzahl der beschriebenen Blätter:	
Diagramm:	kariert:

### Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem Taschenrechner und einem Geodreieck.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein!  
Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare!  
Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug und das offizielle zur Verfügung gestellte Papier!

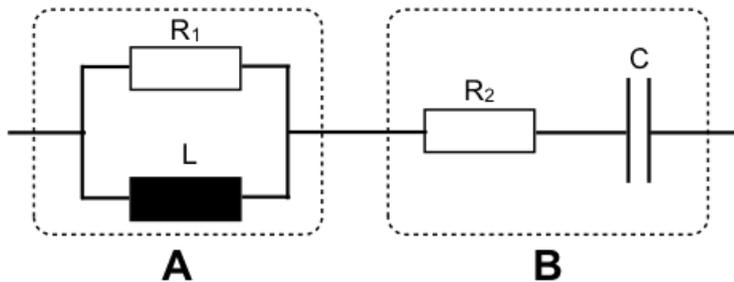
Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	20	
2	17	
3	19	
4	24	
5	14	
Gesamt:	94	

Note: \_\_\_\_\_

**Aufgabe 1****( 20 Punkte )****Ortskurve**

Gegeben sei folgende Schaltung:



Für die Bauelemente der Schaltung gilt Folgendes:

- $R_1 = 200\Omega$
- $L = 10mH$
- $R_2 = 100\Omega$
- $C = 10\mu F$

*Hinweis: Fehlende Achsenbeschriftungen führen zu Punktabzug!*

- (a) Skizzieren Sie die Ortskurven von **A** und **B** aus obiger Schaltung in die Diagramme **1.1** und **1.2**: ( 4 Punkte )

- Zeichnen Sie in **Diagramm 1.1** die Ortskurve der Impedanz von **A**.
- Zeichnen Sie in **Diagramm 1.1** die Ortskurve der Impedanz von **B**.
- Zeichnen Sie in **Diagramm 1.2** die Ortskurve der Admittanz **A**.
- Zeichnen Sie in **Diagramm 1.2** die Ortskurve der Admittanz **B**.

Kennzeichnen Sie, welche Ortskurve zu welcher Schaltung gehört, sowie jeweils  $\omega \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \infty$ .

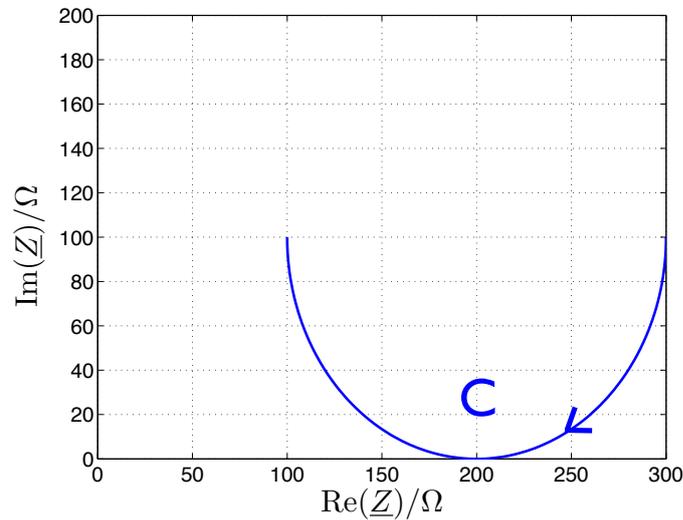
- (b) Wie lautet die Gleichung der Gesamtimpedanz  $\underline{Z}(\omega)$ ? Geben Sie das Ergebnis getrennt nach Real- und Imaginärteil an, ohne Zahlenwerte einzusetzen. ( 3 Punkte )

- (c) Wie könnte die Ortskurve der Gesamtimpedanz  $\underline{Z}(\omega)$  aussehen? Skizzieren Sie  $\underline{Z}(\omega)$  in **Diagramm 1.3** und kennzeichnen Sie  $\omega \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow \infty$ . ( 4 Punkte )

*Hinweis: Bei der Resonanzfrequenz gilt  $Re(\underline{Z}(\omega_0)) \approx 105\Omega$ .*

Die folgenden Teilaufgaben können auch ohne die vorherigen gelöst werden!

Es sei nun folgende von der Kapazität  $C$  abhängige Ortskurve gegeben. Im Gegensatz zum vorherigen Aufgabenteil ist die Frequenz hier fest:

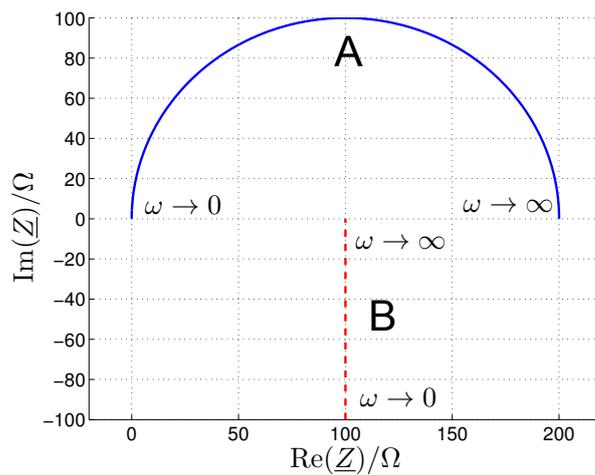


Es gelte  $\omega = 1000s^{-1}$ . In der Ortskurve verläuft  $C$  von 0 bis  $\infty$ .

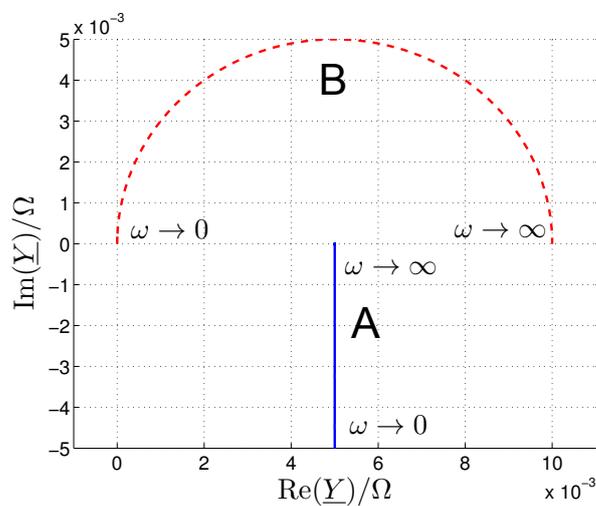
- (d) Leiten Sie aus der Ortskurve das Schaltbild für die zugehörige Schaltung ab. ( 4 Punkte )  
Geben Sie zunächst das Schaltbild an. Geben Sie eine kurze Begründung.  
*Hinweis: Es wurden zwei Widerstände, eine Spule sowie ein variabler Kondensator verwendet.*
- (e) Stellen Sie die Gleichung der Impedanz der Schaltung getrennt nach Realteil und Imaginärteil auf. Rechnen Sie mit allgemeinen Werten. ( 2 Punkte )
- (f) Geben Sie nun die Bauteilgrößen der Schaltung mit ihren Einheiten an. ( 3 Punkte )  
*Hinweis: Überlegen Sie, wie Sie die Punkte der Ortskurve bei  $C \rightarrow 0$  und  $C \rightarrow \infty$  für die Bestimmung der Bauteile verwenden könnten.*

**Lösung:**

(a) **Impedanz**



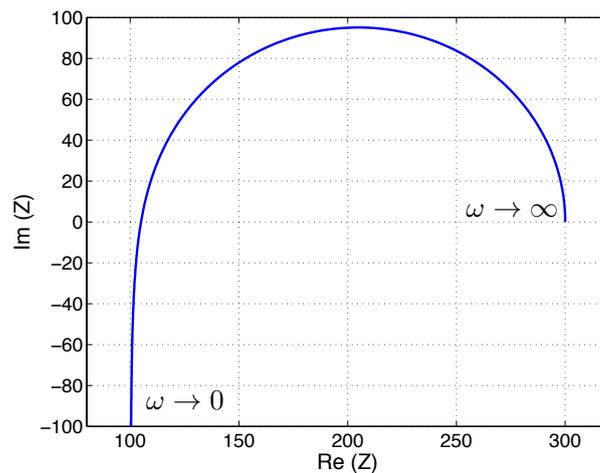
## Admittanz



(b)

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}(\omega) &= \frac{R_1 \cdot j\omega L}{R_1 + j\omega L} + R_2 + \frac{1}{j\omega C} \\
 \Leftrightarrow \underline{Z}(\omega) &= \frac{jR_1^2\omega L + R_1\omega^2 L^2}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + R_2 - j\frac{1}{\omega C} \\
 \Leftrightarrow \underline{Z}(\omega) &= \frac{R_1\omega^2 L^2}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + R_2 + j\left(\frac{R_1^2\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (1)
 \end{aligned}$$

## (c) Impedanz

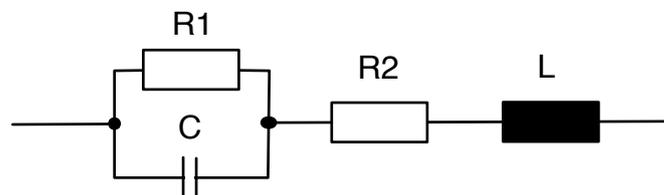


- (d) In der Ortskurve sehen wir einen Halbkreis, ähnlich wie er entsteht, wenn man die Impedanz einer Parallelschaltung aus Widerstand und Kondensator für  $\omega$  zwischen 0 und  $\infty$  plottet. Das gleiche Verhalten ist zu erwarten, wenn die Frequenz fest ist und die Impedanz der Kapazität für  $C$  zwischen 0 und  $\infty$  geplottet wird.

Daraus ergibt sich, dass eine Parallelschaltung aus Kondensator und Widerstand  $R_1$  vorliegt.

Weiterhin ist der Ursprung der Kurve um  $100\Omega + j100\Omega$  verschoben. Dies Verhalten kann bei fester Frequenz mit Hilfe einer Reihenschaltung aus Widerstand  $R_2$  und Induktivität erzielt werden.

## Schaltbild



## (e) Allgemeine Formel der Impedanz

$$\underline{Z}(C) = \frac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} + R_2 + j\omega L$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}(C) = \frac{R_1}{1 + j\omega C R_1} + R_2 + j\omega L$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}(C) = \frac{R_1}{1 + (\omega C R_1)^2} + R_2 + j \left( \omega L - \frac{\omega C R_1^2}{1 + (\omega C R_1)^2} \right) \quad (2)$$

## (f) Bauteilwerte

$$R_1 = 200\Omega$$

$$R_2 = 100\Omega \quad (3)$$

Für  $C \rightarrow \infty$  geht  $\underline{Z}$  gegen  $\underline{Z} = R_2 + j\omega L = 100\Omega + j100\Omega$

$$\Rightarrow L = \frac{100\Omega}{1000s^{-1}} = 100\text{mH} \quad (4)$$

## Aufgabe 2

(17 Punkte)

## Netzwerk

Das Netzwerk in Abbildung 2.1 sei so versorgt, dass der daran angeschlossene Lastwiderstand ( $R_L$ ) die Leistung ( $P_L = 2,5\text{ W}$ ) verbraucht.

*Allgemeiner Hinweis: Runden Sie wenn nötig auf vier Nachkommastellen. Alle Teilaufgaben sind unabhängig lösbar. Denn noch können (Teil-)ergebnisse aus den vorherigen Teilaufgaben hilfreich sein.*

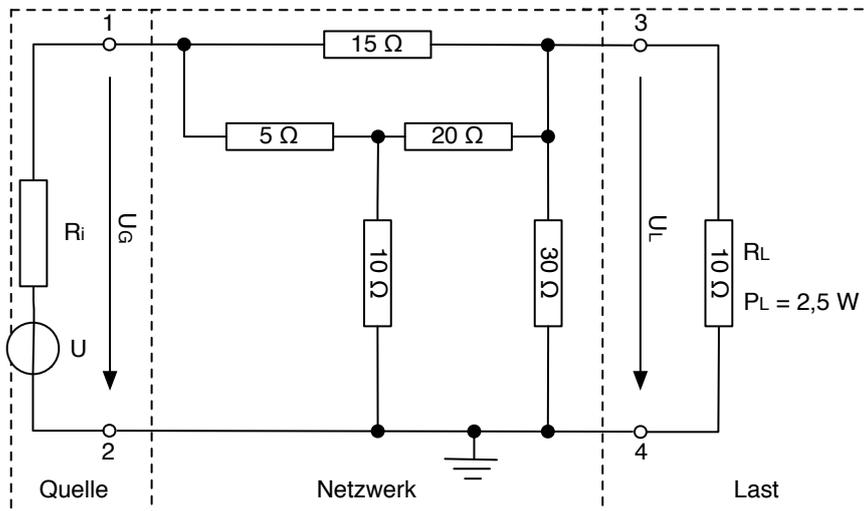


Abbildung 2.1

## (a) Allgemeine Fragen:

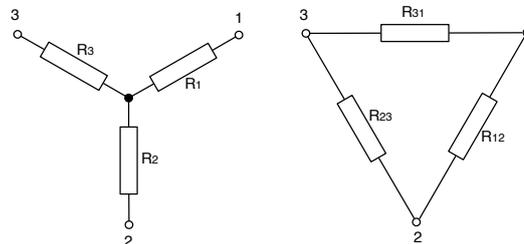
(5 Punkte)

- Nennen Sie die beiden Gesetze von Kirchhoff, Name und Aussage.
- Welche physikalischen Erhaltungssätze liegen den Kirchhoffschen Gesetzen zugrunde? Welcher gehört zu welchem Gesetz?
- Welche Beschränkung gilt beim Helmholtzschen Überlagerungsprinzip für die Bauelementeigenschaften?

## (b) Vereinfachen Sie das Netzwerk in Abbildung 2.1 so weit wie möglich. Achten Sie darauf, dass die Quelle und der Lastwiderstand in ihrer ursprünglichen Darstellung erhalten bleiben.

(3 Punkte)

*Hinweis: Skizzieren Sie jeden Zwischenschritt und achten Sie auf eine verständliche Beschriftung. Verwenden Sie die Stern-Dreieckstransformation.*



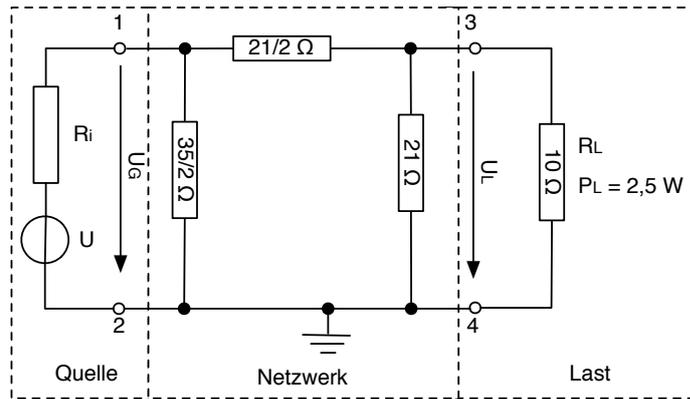
$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}, \quad R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}, \quad R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

bzw.

$$R_{12} = R_1 + R_2 + R_1 \frac{R_2}{R_3}, \quad R_{23} = R_2 + R_3 + R_2 \frac{R_3}{R_1}, \quad R_{31} = R_3 + R_1 + R_3 \frac{R_1}{R_2}$$

## (c) Berechnen Sie den Wirkungsgrad des zuvor vereinfachten Netzwerks mit der angegebenen Last. Sollten Sie den vorherigen Aufgabenteil nicht gelöst haben, verwenden Sie die folgende Schaltung:

(3 Punkte)



- (d) Wie groß muss der Innenwiderstand der Quelle sein, wenn sie eine Leerlaufspannung von  $15\text{ V}$  aufweist, und die Leistungsaufnahme der Last ( $P_L = 2.5\text{ W}$ ) gleich bleibt? ( 1 Punkt )

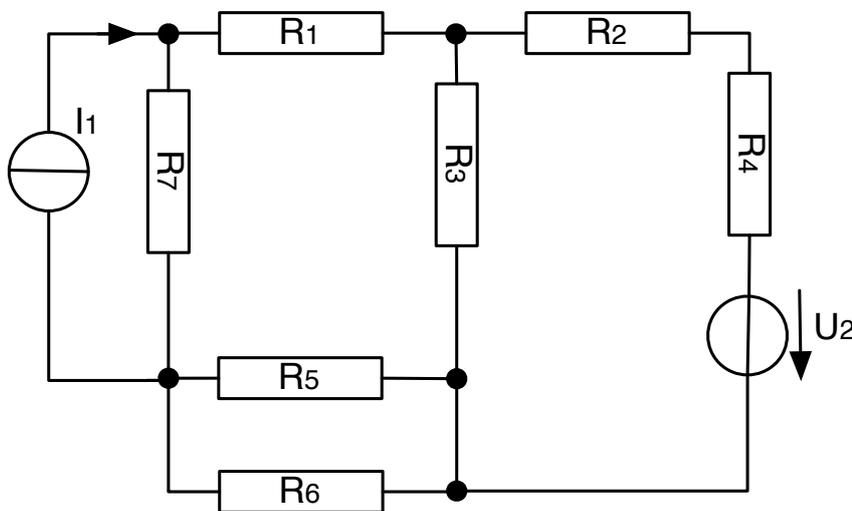


Abbildung 2.2

- (e) Geben Sie die Matrix-Schreibweise des Knotenpunktpotentialverfahrens der Schaltung in Abbildung 2.2 an. Gehen Sie wie in der Vorlesung gelernt vor. Vereinfachen Sie **nichts!** Die **Zweigströme sollen nicht ermittelt werden!** ( 5 Punkte )

**Lösung:**

- (a) • Kirchhoffsche Gesetze:

1. Gesetz: Knotenregel. Die Summe aller Ströme an einem Knoten muss 0 sein.

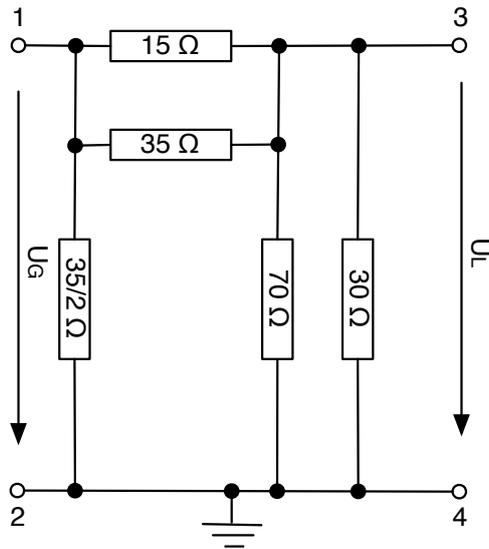
$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$

2. Gesetz: Maschenregel. Alle Teilspannungen in einer Masche addieren sich zu 0.

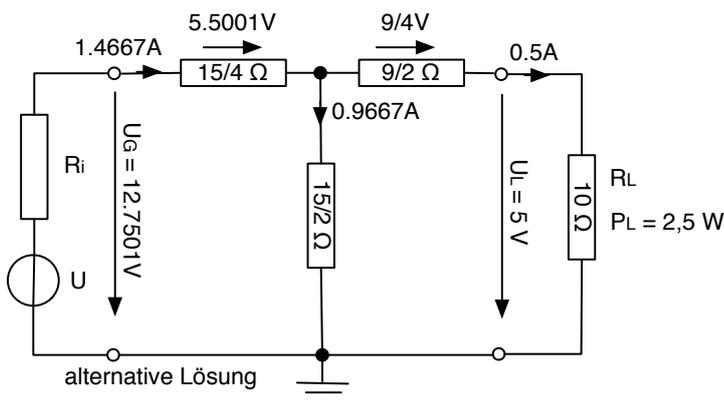
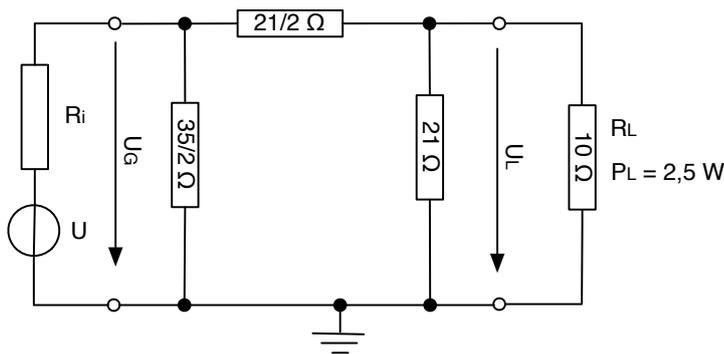
$$\sum_{k=1}^n U_k = 0$$

- 1. Gesetz: Erhaltungssatz für Ladungen.
- 2. Gesetz: Erhaltungssatz der Energie.
- Der Überlagerungssatz gilt nur für lineare Bauelemente.

- (b) Die drei Widerstände  $5\ \Omega$ ,  $10\ \Omega$  und der  $20\ \Omega$  können mit der Stern-Dreieck-Transformation gewandelt werden.



Damit erhalten wir zwei parallelgeschaltete Widerstände  $15\ \Omega \parallel 35\ \Omega$  und  $70\ \Omega \parallel 100\ \Omega$  die sich zusammenfassen lassen.



- (c) Jetzt da das Netz etwas Übersichtlicher ist, kann der aus der Quelle in die Schaltung fließende Strom und die über ihr abfallende Spannung berechnet werden. Die über dem Lastwiderstand abfallende Spannung lässt sich aus der Leistung ermitteln.

$$P = U \cdot I \quad \text{bzw.} \quad P = \frac{U^2}{R}$$

damit ist

$$U_L = \pm \sqrt{P_L \cdot R_L} = \pm \sqrt{2.5 \text{ VA} \cdot 10 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = \pm 5 \text{ V}.$$

Die Richtung der Spannung ist in der Zeichnung angegeben, weshalb nur das positive Ergebnis d.h. der Betrag interessiert. Mit der Spannung lässt sich der Strom durch den  $21 \Omega$  Widerstand berechnen:

$$I_{21} = \frac{5 \text{ V}}{21 \Omega} \approx 0.2381 \text{ A}$$

Damit ist der Strom durch den  $21/2 \Omega$  Widerstand

$$I_{21/2} = I_L + I_{21} = \frac{P_L}{U_L} + 0.2381 \text{ A} \approx 0.7381 \text{ A}$$

und die über ihm abfallende Spannung

$$U_{21/2} = I_{21/2} \cdot \frac{21}{2} \Omega \approx 7.7501 \text{ V}$$

Womit die über der Schaltung abfallende Spannung ( $U_G$ )

$$U_G = U_L + U_{21/2} \approx 12.7501 \text{ V}$$

ermittelbar ist. Es fehlt noch der in die Schaltung fließende Strom ( $I_G$ ). Dieser lässt sich nun ebenfalls einfach mit dem Ohmschen Gesetz ermitteln

$$I_G = I_{21/2} + I_{35/2} = I_{21/2} + \frac{U_G}{35/2 \Omega} \approx 1.4667 \text{ A}.$$

Der Wirkungsgrad ( $\eta$ ) erhalten wir damit zu

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{P_L}{U_G \cdot I_G} \approx 13.37\%$$

- (d) Mit dem Gesamtwiderstand der Schaltung ( $R_G$ ) bildet der Innenwiderstand der Quelle ( $R_i$ ) einen Spannungsteiler

$$\frac{U}{U_G} = \frac{R_i + R_G}{R_G}.$$

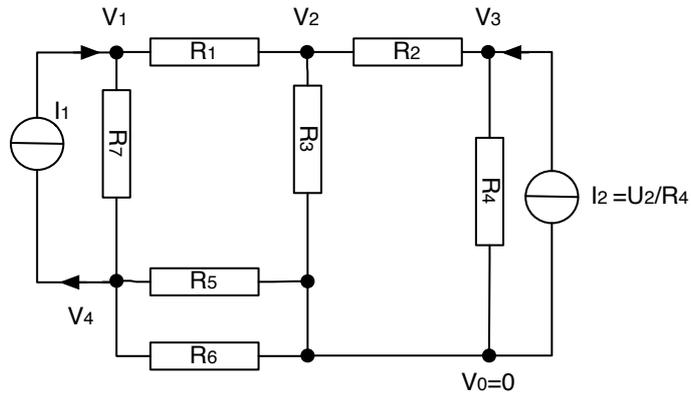
Nach  $R_i$  umgestellt

$$R_i = \left( \frac{U}{U_G} - 1 \right) R_G = \left( \frac{15 \text{ V}}{12.7501 \text{ V}} - 1 \right) \frac{12.7501 \text{ V}}{1.4667 \text{ A}} \approx 1.5340 \Omega.$$

- (e) Vorgehen (nach dem Vorlesungsskript):

1. Umwandeln aller Spannungsquellen in Stromquellen,
2. Bezeichnung aller Knotenpotentiale und Auswahl des Bezugspotentials,
3. Aufstellen aller linear-unabhängigen Knotengleichungen, wobei die Ströme durch  $(V_i - V_k) \cdot G_{ik}$  ausgedrückt werden,
4. Gleichungssystem nach den Knotenpotentialen auflösen,
5. Zweigströme aus den Knotenpunktpotentialen berechnen.

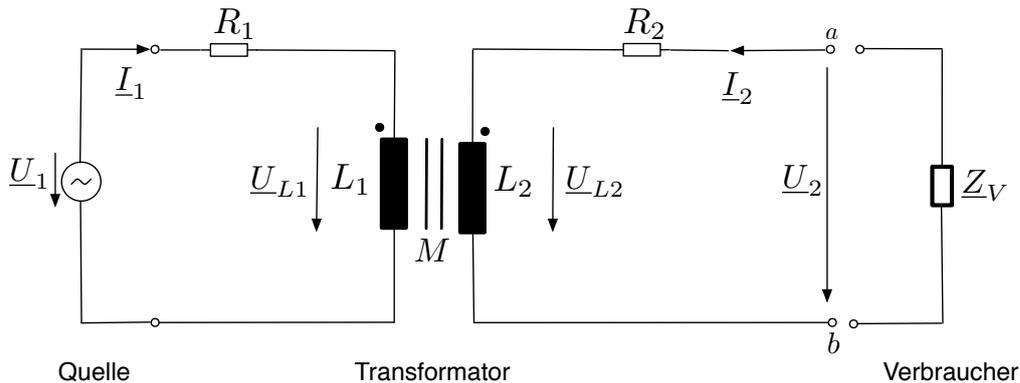
Hierbei sind Punkt 3. und 4. durch die Vektor-Matrix-Notation zusammengefasst und Punkt 5. entfällt ganz.



$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_7}\right) & -\frac{1}{R_1} & 0 & -\frac{1}{R_7} \\ -\frac{1}{R_1} & \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) & -\frac{1}{R_2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) & 0 \\ -\frac{1}{R_7} & 0 & 0 & \left(\frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ \frac{U_2}{R_4} \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

**Aufgabe 3****( 19 Punkte )****Wechselstromlehre**

Gegeben sei die folgende Schaltung mit einem Transformator:



Für die komplette Aufgabe gilt:

- $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$

Berücksichtigen Sie die magnetische Kopplung zwischen den zwei Spulen. Die Spannungen  $\underline{U}_{L1}$  und  $\underline{U}_{L2}$  in der magnetischen Kopplung werden durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{L1} &= j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega M \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_{L2} &= j\omega M \cdot \underline{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \underline{I}_2\end{aligned}$$

Die Bauteile dieser Schaltung sind allerdings unbekannt. Um die Bauteile zu bestimmen, werden zwei Messungen durchgeführt.

- (a) Bei der ersten Messung werden die Klemmen  $a$  und  $b$  offen gelassen. Eine Quellspannung  $\underline{U}_1 = 435 \text{ V}$  wird angeschlossen. Ein Strom  $\underline{I}_1 = (3 - j36) \text{ A}$  wird dabei gemessen. Zeigen Sie, dass für  $R_1$  und  $L_1$  Folgendes gilt: ( 3 Punkte )

- $R_1 = 1 \Omega$
- $L_1 = 120 \text{ mH}$

*Hinweis: Überlegen Sie sich, was mit dem Strom  $\underline{I}_2$  passiert, wenn die Klemmen  $a$  und  $b$  offen gelassen werden.*

- (b) Unter den selben Bedingungen wie bei der Teilaufgabe a) wird eine Leerlaufspannung  $\underline{U}_2 = (648 + j54) \text{ V}$  an den offenen Klemmen  $a$  und  $b$  gemessen. Zeigen Sie, dass für die Gegeninduktivität  $M$  Folgendes gilt: ( 2 Punkte )

- $M = 180 \text{ mH}$

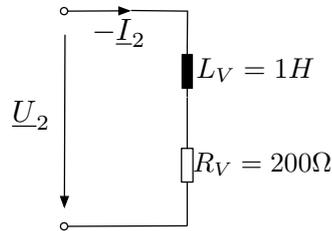
- (c) Bei der zweiten Messung werden die Klemmen  $a$  und  $b$  kurzgeschlossen. Die selbe Quellspannung  $\underline{U}_1 = 435 \text{ V}$  bleibt angeschlossen. Der Strom  $\underline{I}_1 \approx (22.2421 - j75.5837) \text{ A}$  wird gemessen. Außerdem wird der Strom  $\underline{I}_2 \approx (-10.6290 + j27.4581) \text{ A}$  auch gemessen. Zeigen Sie, dass für  $R_2$  und  $L_2$  Folgendes gilt: ( 3 Punkte )

- $R_2 = 4 \Omega$
- $L_2 = 480 \text{ mH}$

*Hinweis: Überlegen Sie sich, was mit der Spannung  $\underline{U}_2$  passiert, wenn die Klemmen  $a$  und  $b$  kurzgeschlossen werden.*

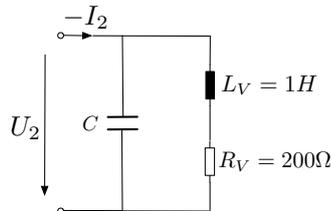
- (d) Jetzt wird eine Verbraucherimpedanz bestehend aus einer Reihenschaltung aus einer Spule und einem Widerstand an die Schaltung angeschlossen. Für die Bauteile der Verbraucherimpedanz gilt:

- $R_V = 200 \Omega$
- $L_V = 1 H$



Die Reaktanz (Imaginärteil der Impedanz) der Verbraucherimpedanz  $\underline{Z}_V$  ist nicht erwünscht. Sie soll durch einen Parallel geschalteten Kondensator kompensiert werden. Bestimmen Sie die Kapazität  $C$  des Kondensators, so dass die resultierende Impedanz  $\underline{Z}_{VK}$  keinen Imaginärteil besitzt. Zeigen Sie anschließend, dass für die Kompensierte Impedanz Folgendes gilt:

- $Z_{VK} = 250 \Omega$



- (e) An die kompensierte Lastimpedanz  $Z_{VK}$  soll eine reine Wirkleistung von  $P_V = 1 kW$  übertragen werden. Zeigen Sie, dass die folgende Quellspannung  $\underline{U}_1$  gewählt werden muss, so dass die genannte Wirkleistung exakt übertragen wird.

- $\underline{U}_1 \approx (344 - j0.2222) V$

*Hinweis: Bestimmen Sie zuerst den Strom  $I_2$ , der durch die kompensierte Lastimpedanz  $Z_{VK}$  fließen muss, um die genannte Wirkleistung zu erzielen. Gehen Sie von einem rein reellen Strom  $I_2$  aus.*

### Lösung:

- (a) Bei offenen Klemmen  $a$  und  $b$  gilt  $\underline{I}_2 = 0$ . Dadurch gilt für die Primärseite der Schaltung Folgendes:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{I}_1 \cdot (R_1 + j\omega L_1) \\ \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} &= (1 + j12) \Omega = R_1 + j\omega L_1 \\ R_1 + j\omega L_1 &= \frac{435}{3 - j36} \Omega = (1 + j12) \Omega \\ \Rightarrow R_1 &= 1 \Omega \\ \omega L_1 &= 12 \Omega \\ \Rightarrow L_1 &= 120 mH \end{aligned}$$

- (b) Hier gilt weiterhin  $\underline{I}_2 = 0$ . Für die Sekundärseite der Schaltung gilt dann Folgendes:

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 &= \underline{I}_1 \cdot j\omega M \\ M &= \frac{\underline{U}_2}{j\omega \underline{I}_1} = 180 \text{mH}\end{aligned}$$

- (c) Bei kurzgeschlossenen Klemmen  $a$  und  $b$  gilt  $\underline{U}_2 = 0$ . Dadurch gilt für die Sekundärseite der Schaltung Folgendes:

$$\begin{aligned}0 &= \underline{I}_1 \cdot j\omega M + \underline{I}_2 \cdot (R_2 + j\omega L_2) \\ R_2 + j\omega L_2 &= -\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \cdot j\omega M \\ R_2 + j\omega L_2 &= \frac{22.2421 - j75.5837}{-10.6290 + j27.4581} \cdot j18 \Omega = (4 + j48) \Omega \\ \Rightarrow R_2 &= 4 \Omega \\ \omega L_2 &= 48 \Omega \\ \Rightarrow L_2 &= 480 \text{mH}\end{aligned}$$

- (d) Für die Admittanz der kompensierten Impedanz gilt:

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{VK} &= j\omega C + \frac{1}{R_V + j\omega L_V} \\ \underline{Y}_{VK} &= \frac{R_V}{(R_V)^2 + (\omega L_V)^2} + j \left( \omega C - \frac{\omega L_V}{(R_V)^2 + (\omega L_V)^2} \right)\end{aligned}$$

Bei der Kompensation gilt:

$$\begin{aligned}\text{Im}\{\underline{Y}_{VK}\} &= 0 \\ \omega C - \frac{\omega L_V}{R_V^2 + (\omega L_V)^2} &= 0 \\ C &= \frac{L_V}{R_V^2 + (\omega L_V)^2} \\ \Rightarrow C &= 20 \mu\text{F}\end{aligned}$$

Für die kompensierte Lastimpedanz gilt dann:

$$\begin{aligned}Z_{VK} &= \frac{1}{Y_{VK}} \\ Z_{VK} &= \frac{R_V^2 + (\omega L_V)^2}{R_V} \\ Z_{VK} &= 250 \Omega\end{aligned}$$

- (e) Unter Berücksichtigung der auf der Abbildung vorgegebenen Pfeilrichtung des Stromes  $I_2$  und unter der Voraussetzung, dass der Strom rein reell sein soll, gilt für diesen Strom Folgendes:

$$\begin{aligned}
 P_V &= I_2^2 \cdot Z_{VK} \\
 I_2 &= -\sqrt{\frac{P}{Z_{VK}}} \\
 I_2 &= -2 \text{ A}
 \end{aligned}$$

Um die Spannung  $\underline{U}_1$  zu bestimmen, muss das folgende Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{U}_1 &= \underline{I}_1(R_1 + j\omega L_1) + I_2 \cdot j\omega M \\
 2) \quad 0 &= \underline{I}_1 \cdot j\omega M + I_2 \cdot (R_2 + j\omega L_2 + Z_{VK})
 \end{aligned}$$

Aus der Gleichung 2) folgt:

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 &= -\underline{I}_2 \frac{(R_2 + j\omega L_2 + Z_{VK})}{j\omega M} \\
 \underline{I}_1 &= -(-2) \frac{4 + j48 + 250}{j18} \text{ A} \\
 \underline{I}_1 &= (5.3333 - j28.2222) \text{ A}
 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung 1) liefert:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_1 &= (5.3333 - j28.2222)(1 + j12) \text{ V} + (-2)(j18) \text{ V} \\
 \underline{U}_1 &= (344 - j0.2222) \text{ V}
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 4****( 24 Punkte )****Bodediagramm**

- (a) • Stellen Sie eine Leistung von 80 mW in Bezug auf eine Leistung von 1 W in Dezibel dar. ( 2 Punkte )
- Stellen Sie einen Strom von 20 mA in Bezug auf einen Strom von 1 mA in Dezibel dar.

**Die folgenden Teilaufgaben können auch ohne die vorherige gelöst werden!**

- (b) Stellen Sie die angegebene Übertragungsfunktion als Produkt von einfacheren Übertragungsfunktionen dar. Zeichnen Sie das Bode-Diagramm der resultierenden Übertragungsfunktion nach Betrag und Phase: ( 9 Punkte )

$$\frac{U_a}{U_e} = 100 \frac{1 + 2j\Omega - \Omega^2}{1 + j(10^3 + 10^{-2})\Omega - 10\Omega^2}$$

Verwenden Sie die Diagramme 4.1 und 4.2 für die Zeichnung.

**Die folgenden Teilaufgaben können auch ohne die vorherige gelöst werden!**

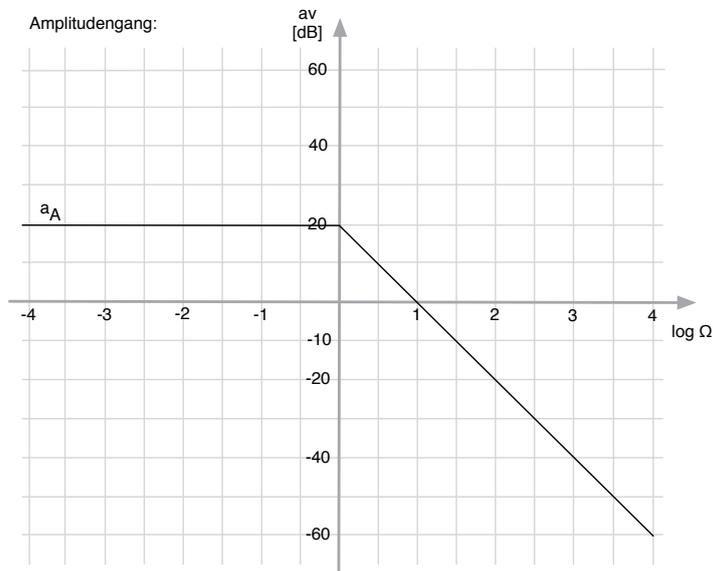
- (c) Gegeben sei folgende Übertragungsfunktion: ( 6 Punkte )

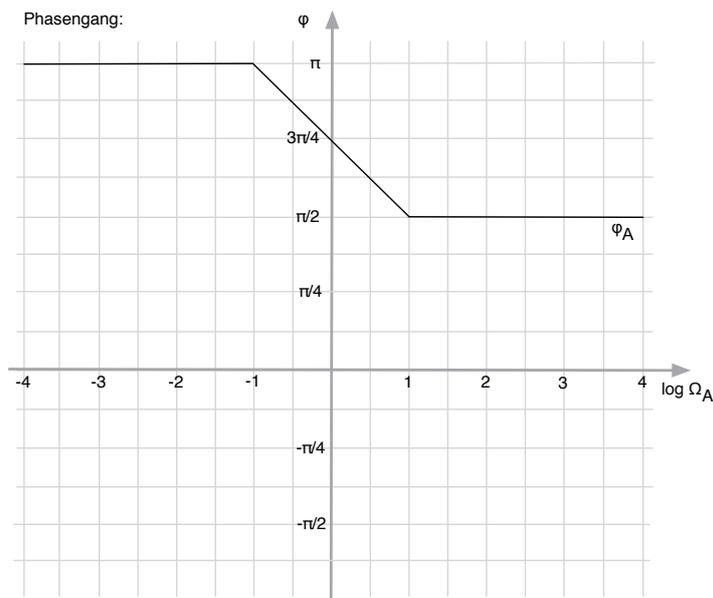
$$\frac{U_a}{U_e} = - \frac{\Omega^2}{(1 + j\Omega)(1 + j10^{-1}\Omega)}$$

Zeichnen Sie das Bode-Diagramm der resultierenden Übertragungsfunktion nach Betrag und Phase. Verwenden Sie die Diagramme 4.3 und 4.4 für die Zeichnung.

**Die folgenden Teilaufgaben können auch ohne die vorherige gelöst werden!**

- (d) Gegeben sei folgendes Bodediagramm nach Betrag und Phase: ( 7 Punkte )





Bekannt ist folgendes:

Normierung  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_1}$ ,  $\omega_1 = \frac{1}{R_2 C}$ ,  $R_1 = 10k\Omega$  und  $C = 1.59nF$ .

- Um welche Schaltung handelt es sich bei diesem Diagramm (aktiv/passiv)?
- Zeichnen Sie die entsprechende Schaltung. Benutzen Sie möglichst wenig Bauteile.
- Wie groß ist der Verstärkungsfaktor (Betrag der Übertragungsfunktion) im Durchlassbereich ( $f < f_k$ )?
- Stellen Sie die Übertragungsfunktion (als Funktion von  $R_1$ ,  $R_2$  und  $C$ ) der Schaltung auf.
- Geben Sie die Knickfrequenz  $f_k$  der Schaltung an.
- Welche Ausgangsspannung  $\underline{U}_a$  hat die Schaltung für die Frequenzen  $f_1 = 100Hz$  und  $f_2 = 10kHz$  hinsichtlich der Eingangsspannung  $\underline{U}_e$ ?

**Lösung:**

(a)

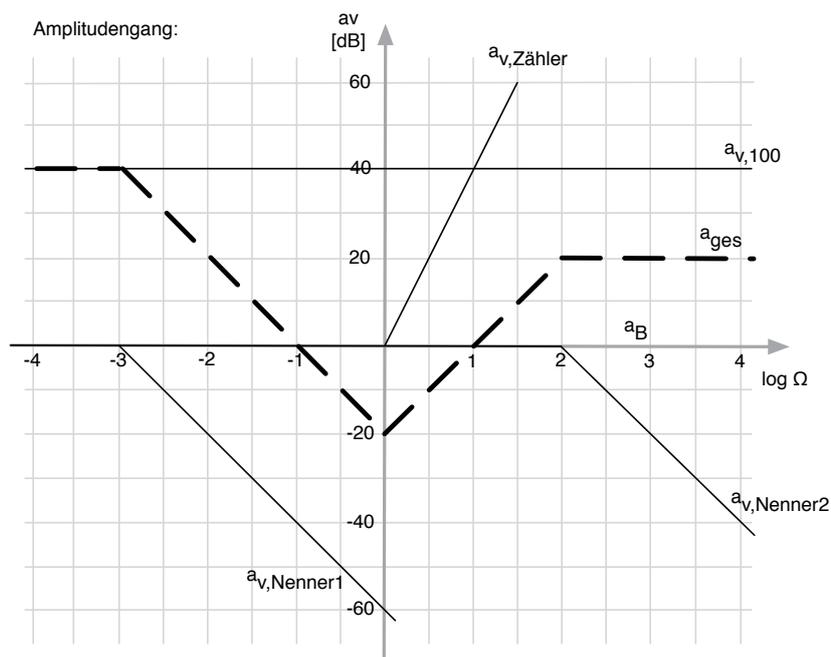
$$10 \log(80 \cdot 10^{-3}) \approx -11 \text{ dB}$$

$$20 \log(20) \approx 26 \text{ dB}.$$

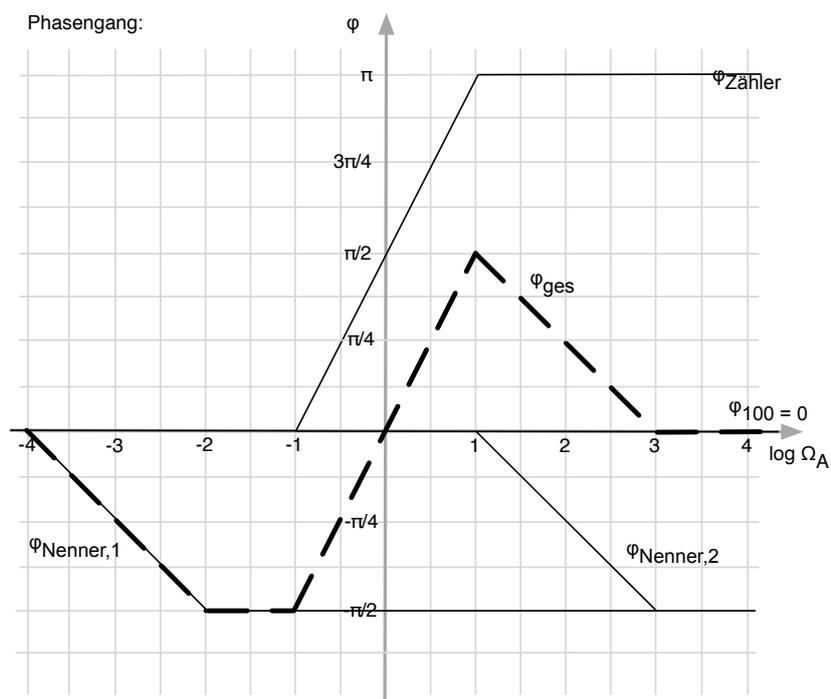
(b)

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = 100 \frac{1 + 2j\Omega - \Omega^2}{1 + j(10^3 + 10^{-2})\Omega - 10\Omega^2} = \frac{100(1 + j\Omega)^2}{(1 + j10^3\Omega)(1 + j10^{-2}\Omega)}$$

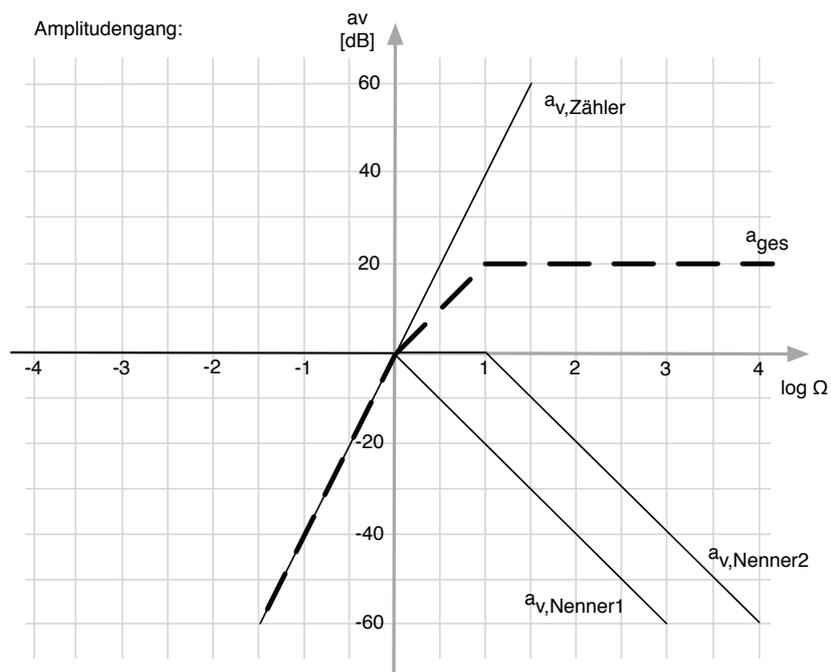
Das Bode-Diagramm für die Amplitude



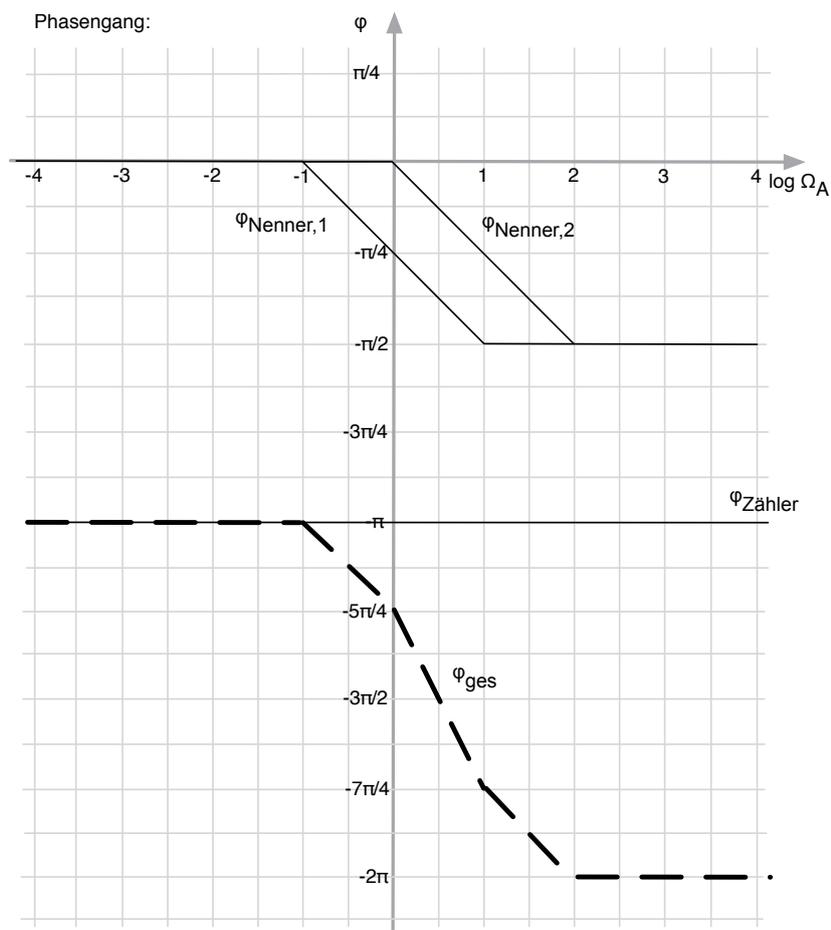
Das Bode-Diagramm für die Phase



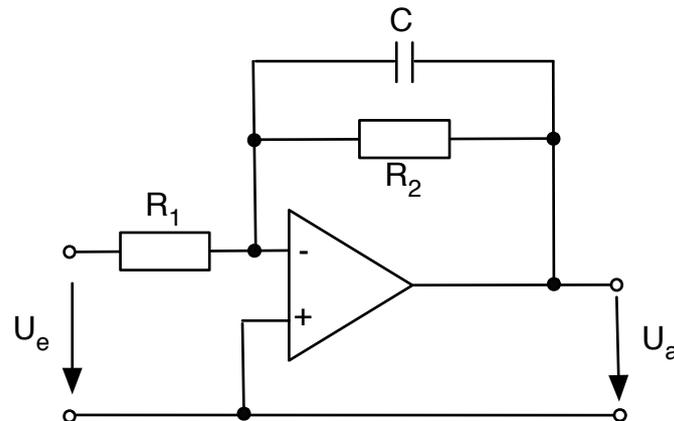
(c) Das Bode-Diagramm für die Amplitude



Das Bode-Diagramm für die Phase



- (d) Es handelt sich um einen aktiven Tiefpass erster Ordnung.  
Die entsprechende Schaltung:



Im Durchlassbereich zeigt das Bodediagramm eine Verstärkung von 20dB:

$$20 \log \frac{U_a}{U_e} = 20 \text{dB}$$

$$\frac{U_a}{U_e} = 10$$

Damit ist die Verstärkung  $V = 10$ .

Für die Schaltung gilt folgende Übertragungsfunktion:

$$\frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\Omega} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C}$$

Aus der Verstärkung im Durchlassbereich folgt:  $R_2 = 10R_1 = 100 \text{k}\Omega$ .

Die Knickfrequenz lässt sich aus der Normierung bestimmen:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_1} = \omega R_2 C = 2\pi f R_2 C$$

Das Kriterium für die Knickfrequenz:  $\log \Omega(f_k) = 0 \rightarrow \Omega(f_k) = 1$ .  
Daraus folgt:

$$f_k = \frac{1}{2\pi R_2 C} = 1 \text{kHz}$$

Die Frequenz  $f_1 = 100 \text{Hz}$  liegt im Durchlassbereich. Dadurch beträgt die Ausgangsspannung:

$$\underline{U}_a = V \cdot e^{-j\pi} \cdot \underline{U}_e = -10 \underline{U}_e$$

Die Frequenz  $f_2 = 10 \text{kHz}$  liegt eine Dekade oberhalb von  $f_k$ . Dort ist  $a_v = 0$ :

$$20 \log \left| \frac{U_a}{U_e} \right| = 0$$

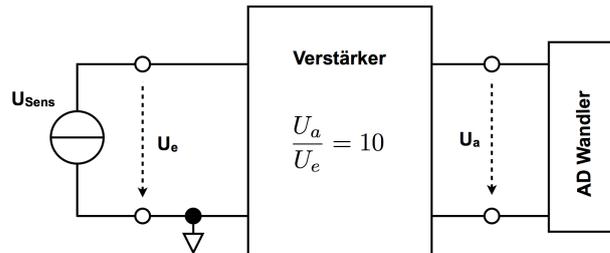
$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = 1$$

$$\underline{U}_a = e^{-j\frac{3\pi}{2}} \underline{U}_e = j \underline{U}_e$$

**Aufgabe 5****( 14 Punkte )****Operationsverstärker**

*Hinweis: Für die folgenden Aufgaben ist ein Operationsverstärker als ideal anzunehmen. Schaltbilder sind vollständig und eindeutig zu beschriften (Bauteile, Eingänge, Spannungen, Versorgungsspannung, Masse, ...).*

Sie möchten eine physikalische Größe mit einem Sensor erfassen, welcher das Messsignal in eine proportionale Gleichspannung zwischen 0 und 330 mV umwandelt. Weil der folgende AD Wandler aber Signale zwischen 0 und 3,3 V erfassen kann, entschließen Sie sich, mit einem nichtinvertierenden Verstärker das Signal um den Faktor 10 zu verstärken.



Dieser Verstärker soll eine positive bzw. negative Versorgungsspannung von  $V^+=5\text{ V}$  und  $V^-=0\text{ V}$  haben.

- Zeichnen Sie das allgemeine Schaltbild eines nichtinvertierenden Spannungsverstärkers. ( 2 Punkte )
- Geben Sie die Gleichung der Übertragungsfunktion  $U_a(t) = f(U_e(t))$  dieser Schaltung in Abhängigkeit der Widerstände an. ( 1 Punkt )
- Sie haben ein Lager mit allen ganzzahligen Widerstandswerten von 100 Ohm bis 1 kOhm. Bestimmen Sie ein Widerstandspaar um die gewünschte Verstärkung zu erzielen! ( 2 Punkte )
- Ihr Kollege möchte eine Versorgungsspannung von  $V^+=0\text{ V}$  und  $V^-=-5\text{ V}$  an den Verstärker anschließen. Kann die Schaltung damit funktionieren? Begründen Sie Ihre Antwort! ( 1 Punkt )

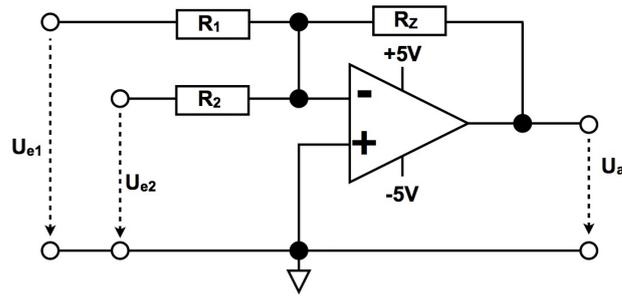
**Die folgenden Teilaufgaben können auch ohne die vorherigen gelöst werden!**

Als umsichtiger Ingenieur möchten Sie kontrollieren, ob der Eingangswiderstand Ihres AD Wandlers ausreichend groß ist um den Verstärker davor betreiben zu können. Leider können Sie diese Angabe nicht finden. Deshalb entschließen Sie sich eine weitere OP-Schaltung hinter den Verstärker zu schalten, um eine stabile Ausgangsspannung Ihrer Anordnung (unabhängig von der Last des AD Wandlers) zu garantieren.

- Welche Schaltung können Sie hierzu verwenden? ( 1 Punkt )
- Geben Sie das Schaltbild der Schaltung an und beschriften Sie es vollständig! ( 1 Punkt )

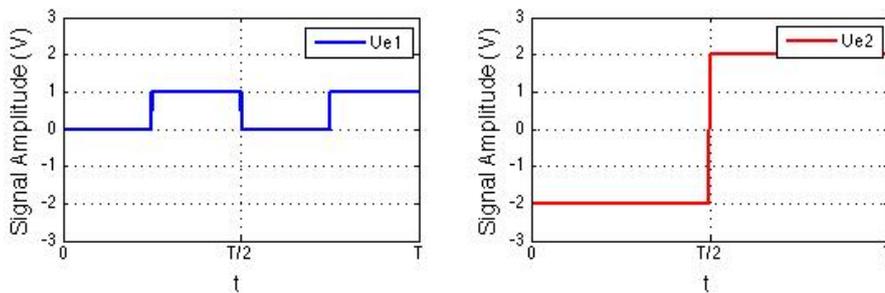
Die folgenden Teilaufgaben können auch ohne die vorherigen gelöst werden!

Gegeben sei die folgende Schaltung eines invertierenden Addierers:



Seine Übertragungsfunktion kann in der Form  $U_a = \alpha \cdot U_{e1} + \beta \cdot U_{e2}$  angegeben werden.

- (g) Bestimmen Sie die Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  in Abhängigkeit der Widerstände. ( 3 Punkte )  
 Die Widerstandswerte seien nun  $R_1 = 2\text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 4\text{ k}\Omega$  und  $R_Z = 8\text{ k}\Omega$ . Zudem werden an die Eingänge folgende Signale angelegt:



- (h) Geben Sie für diese Werte die Übertragungsfunktion  $U_a = f(U_{e1}, U_{e2})$  an. ( 1 Punkt )  
 (i) Zeichnen Sie die resultierende Ausgangsspannung in Diagramm 5.1 ein. ( 2 Punkte )

**Lösung:**

(a) Die Schaltung eines nichtinvertierenden Verstärkers:

(b) Die Übertragungsfunktion ergibt sich zu

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

(c) Für die Dimensionierung folgt

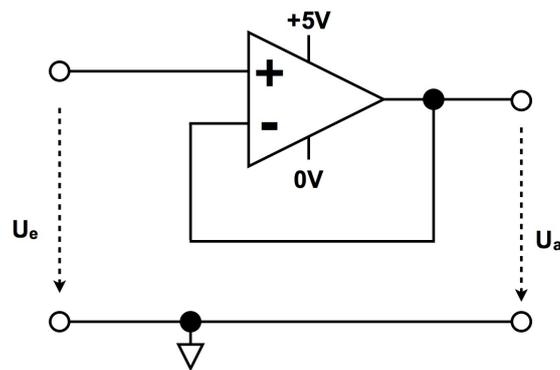
$$\begin{aligned}\frac{U_a}{U_e} &= \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 10 \\ R_1 + R_2 &= 10 \cdot R_2 \\ R_1 &= 9 \cdot R_2\end{aligned}$$

Man kann also  $R_2$  gleich 100 Ohm wählen und  $R_1$  gleich 900 Ohm.

(d) Die Schaltung kann so nicht funktionieren. Die Versorgungsspannung begrenzt die maximale und minimal mögliche Ausgangsspannung des OPs. Mit der vorgeschlagenen Versorgungsspannung wäre es nicht möglich eine positive Ausgangsspannung zu erzeugen.

(e) Ein Spannungsfollower muss an den nichtinvertierenden Verstärker angeschlossen werden.

(f) Schaltbild:



(g) Unter Anwendung der Knotengleichungen oder Maschengleichungen kann man die Übertragungsfunktion erhalten

$$U_a = -\frac{R_Z}{R_1} \cdot U_{e1} - \frac{R_Z}{R_2} \cdot U_{e2} \quad ,$$

aus welcher sich die Koeffizienten ablesen lassen:

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{R_Z}{R_1} \\ \beta &= -\frac{R_Z}{R_2} \quad .\end{aligned}$$

(h) Für diese Widerstandswerte folgt

$$U_a = -4 \cdot U_{e1} - 2 \cdot U_{e2}$$

(i) Unter Berücksichtigung der Versorgungsspannung folgt für die Ausgangsspannung:

