Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel Übungsleiter: Dipl.-Ing. Gustavo Lenis

Klausur

05. September 2014
Beginn: 11:00 Uhr

Familienname:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

AUFKLEBER

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Die Klausur muss selbstständig bearbeitet werden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein! Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare! Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	20	
2	12	
3	7	
4	10	
5	11	
6	15	
7	5	
8	14	
Gesamt:	94	

Note:

Aufgabe 1 **(20 Punkte)**

Ortskurve

Gegeben sei folgende Schaltung:

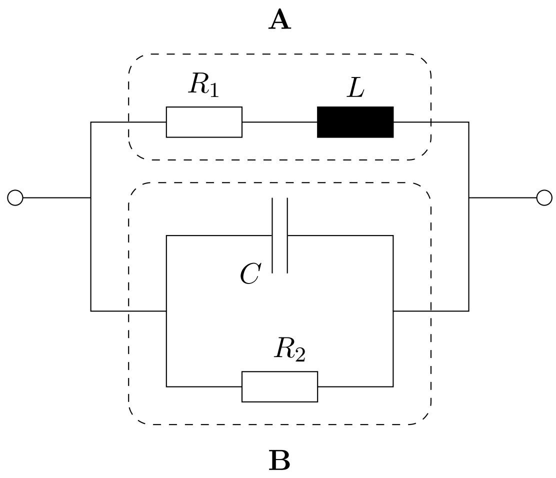


Abbildung 1.1

Hinweis: Fehlende Achsenbeschriftungen führen zu Punktabzug!

(a) Skizzieren Sie schematisch die Ortskurven von **A** und **B** aus obiger Schaltung in die Diagramme **1.1** und **1.2**: (4 Punkte)
Zeichnen Sie

- in **Diagramm 1.1** die Ortskurve der *Admittanz* $\underline{Y}_A$ von **A**,
- in **Diagramm 1.2** die Ortskurve der *Impedanz* $\underline{Z}_B$ von **B**.

Kennzeichnen Sie jeweils die *charakteristische Frequenz* $\omega = \omega_c$, $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass die Admittanz $\underline{Y}_A(\omega)$ aus Aufgabenteil a) die folgende Kreisgleichung erfüllt: (3 Punkte)

$$\left(\mathrm{Re}\{\underline{Y}_A(\omega)\} - \frac{1}{2R_1}\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\{\underline{Y}_A(\omega)\}\right)^2 = \frac{1}{4R_1^2} \quad \forall\, 0 < \omega < \infty \qquad (1)$$

(c) Wie lautet die Gleichung der Gesamtadmittanz $\underline{Y}_{\mathrm{ges}}(\omega)$? Geben Sie das Ergebnis in geschlossener Form und getrennt nach Real- und Imaginärteil an. (2 Punkte)

(d) Berechnen Sie die Impedanzen $\lim\limits_{\omega\to 0} \underline{Z}_{\mathrm{ges}}(\omega)$ und $\lim\limits_{\omega\to\infty} \underline{Z}_{\mathrm{ges}}(\omega)$. (2 Punkte)
Hinweis: Verwenden Sie dazu die Grenzwerte der Admittanzen $\underline{Y}_A$ und $\underline{Y}_B$.

Die folgenden Teilaufgaben können auch ohne die vorherigen gelöst werden!

Für die Bauelemente der Schaltung in Abbildung 1.1 gelte ab jetzt

- $R_1 = 0\,\Omega$,
- $R_2 = 50\,\Omega$,
- $L = 10\,mH$ und
- $C = 1\,\mu F$.

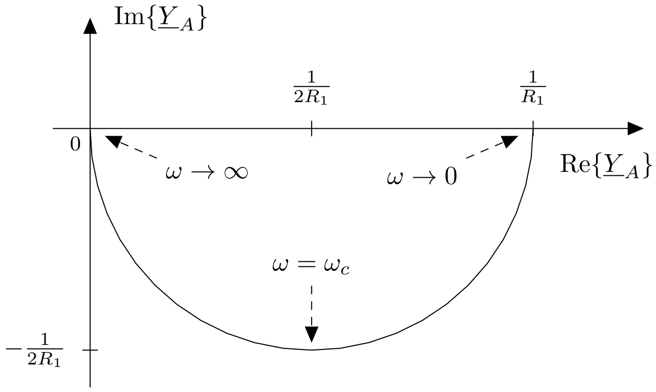
(e) Der Widerstand R_1 beträgt $0\,\Omega$. Welche Art von Schaltung ergibt sich? Geben Sie den Namen möglichst präzise an. (1 Punkt)

(f) Leiten Sie die Formeln für Resonanzfrequenz f_0, Bandbreite b_w sowie Güte Q dieser Schaltung her und berechnen Sie deren Werte. (6 Punkte)

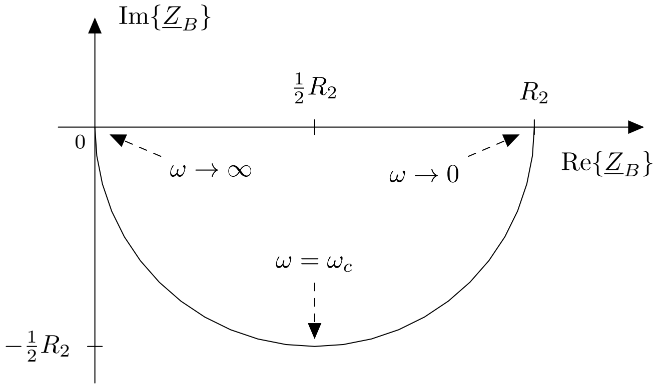
(g) Der Widerstand R_2 soll nun so verändert werden, dass die Güte der Schaltung mindestens 100 beträgt. Welche Werte sind für R_2 zulässig, damit $Q > 100$ ist? (2 Punkte)

Lösung:

(a) **Admittanz**



Impedanz



(b) Für die Admittanz $\underline{Y}_A$ gilt:

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{R_1 + j\omega L} = \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} = \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + j\frac{-\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}$$

In die Kreisgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned}
&\left(\mathrm{Re}\{\underline{Y}_A(\omega)\} - \frac{1}{2R_1}\right)^2 + (\mathrm{Im}\,\underline{Y}_A\{\omega\})^2 \\
&= \left(\frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{2R_1}\right)^2 + \left(\frac{-\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{R_1^2 + \omega^2 L^2}\right)^2 R_1^2 - \frac{1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{1}{4R_1^2} + \left(\frac{1}{R_1^2 + \omega^2 L^2}\right)^2 \omega^2 L^2 \\
&= \left(\frac{1}{R_1^2 + \omega^2 L^2}\right)^2 (R_1^2 + \omega^2 L^2) - \frac{1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{1}{4R_1^2} = \frac{1}{4R_1^2} \qquad \square
\end{aligned}$$

(c) **Gesamtadmittanz**

Mit $\underline{Y}_A$ aus Aufgabenteil (b) und $\underline{Y}_B = \frac{1}{R_2} + j\omega C$ gilt für die Gesamtadmittanz:

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_{ges} &= \underline{Y}_B + \underline{Y}_A \\
&= \frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L} \\
&= \frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{R_1 - j\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} \\
&= \frac{1}{R_2} + \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} + j\left(\frac{-\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \omega C\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\{\underline{Y}_{ges}\} = \frac{1}{R_2} + \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Im}\{\underline{Y}_{ges}\} = \frac{-\omega L}{R_1^2 + (\omega L)^2} + \omega C$$

(d) **Grenzwerte**

Es gilt für

- $\omega \to 0$:

$$\lim_{\omega\to 0} \underline{Z}_A = \lim_{\omega\to 0}(R_1 + j\omega L) = R_1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\omega\to 0} \underline{Y}_A = \lim_{\omega\to 0} \frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{R_1}$$

$$\lim_{\omega\to 0} \underline{Y}_B = \lim_{\omega\to 0}\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right) = \frac{1}{R_2}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\omega\to 0} \underline{Y}_{ges} = \lim_{\omega\to 0} \underline{Y}_A + \lim_{\omega\to 0} \underline{Y}_B = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\omega\to 0} \underline{Z}_{ges} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

- $\omega \to \infty$:

$$\lim_{\omega\to\infty} \underline{Z}_A = \lim_{\omega\to\infty}(R_1 + j\omega L) = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\omega\to\infty} \underline{Y}_A = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{\underline{Z}_A} = 0$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \underline{Y}_B = \lim_{\omega\to\infty}\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C\right) = \infty$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{\omega\to\infty} \underline{Y}_{ges} = \lim_{\omega\to\infty} \underline{Y}_A + \lim_{\omega\to\infty} \underline{Y}_B = \infty$$

$$\Rightarrow \lim_{\omega\to\infty} \underline{Z}_{ges} = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{\underline{Y}_{ges}} = 0$$

(e) Es ergibt sich das Schaltbild eines RLC-Parallelschwingkreises.

(f) Gesamtadmittanz:

$$Y = \frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R_2} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Resonanzfrequenz ω_0:

$$\omega = \omega_0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\{\underline{Y}\} = 0 \Rightarrow \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Da hier nur positive Frequenzen sinnvoll sind, entfällt die Lösung mit negativem Vorzeichen.

Charakteristische Frequenzen:

$$\frac{1}{R_2} = \omega C - \frac{1}{\omega L} \Rightarrow \omega^2 - \omega\frac{1}{R_2 C} - \frac{1}{LC} = 0$$
$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{2R_2C} + \sqrt{\frac{1}{4R_2^2C^2} + \frac{1}{LC}}$$

Die zweite Lösung ist negativ, dadurch entfällt sie.

$$-\frac{1}{R_2} = \omega C - \frac{1}{\omega L} \Rightarrow \omega^2 + \omega\frac{1}{R_2 C} - \frac{1}{LC} = 0$$
$$\Rightarrow \omega_2 = -\frac{1}{2R_2C} + \sqrt{\frac{1}{4R_2^2C^2} + \frac{1}{LC}}$$

Auch hier sind nur die Lösungen mit positivem Vorzeichen vor der Wurzel sinnvoll. Damit ergeben sich die folgenden Formeln:

Bandbreite	$b_w = \omega_1 - \omega_2 = \frac{1}{R_2C}$
Dämpfung	$d = \frac{b_w}{\omega_0} = \frac{\sqrt{LC}}{R_2C} = \frac{1}{R_2}\sqrt{\frac{L}{C}}$
Güte	$Q_P = \frac{1}{d} = R_2\sqrt{\frac{C}{L}}$

Einsetzen der Werte ergibt:

$$\omega_0 = \sqrt{\tfrac{1}{LC}} = \sqrt{\tfrac{1}{10^{-2}\cdot 10^{-6}}}\, s^{-1} = 10^4\, s^{-1}$$
$$f_0 = 1.59\, kHz$$
$$b_w = \tfrac{1}{R_2C} = \tfrac{1}{50\cdot 10^{-6}}\, s^{-1} = 20\, s^{-1} \mathrel{\hat{=}} 3.18\, kHz$$
$$Q = R_2\sqrt{\frac{C}{L}} = 50 \cdot \sqrt{\tfrac{10^{-6}}{10^{-2}}} = 0.5$$

(g) Veränderung des Widerstandes

$$Q_p = R_2\sqrt{\tfrac{C}{L}} > 100 \quad \Rightarrow \quad R_2 > 100\sqrt{\tfrac{L}{C}} = 100\sqrt{\tfrac{10^{-2}}{10^{-6}}}\,\Omega = 10^4\,\Omega = 10\,k\Omega$$

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**
Netzwerk

Allgemeiner Hinweis: Runden Sie wenn nötig auf vier Nachkommastellen. Alle Teilaufgaben sind unabhängig lösbar. Dennoch können (Teil-)ergebnisse aus den vorherigen Teilaufgaben hilfreich sein.

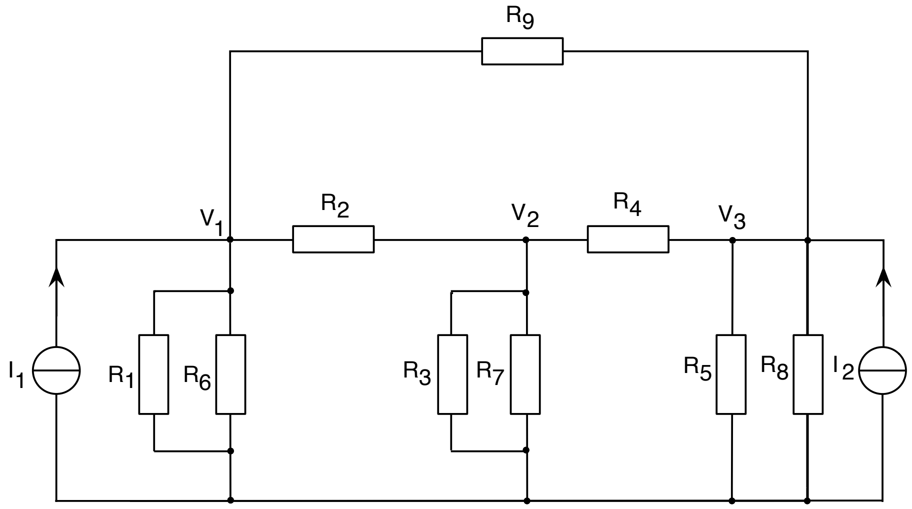


Abbildung 2.1

(a) **Allgemeine Fragen:** (4 Punkte)

- Skizzieren Sie die Strom- Spannungs- Kennlinie sowohl einer *idealen* als auch einer *realen linearen* Spannungsquelle mit angeschlossener Last. Wie wird der Innenwiderstand Ri allgemein bestimmt?
- Definieren Sie den Begriff Leistungsanpassung. Was muss für den Innenwiderstand der Quelle bei der Leistungsanpassung gelten?
- In welchem Fall hat ein System aus Quelle und Verbraucher immer einen hohen Wirkungsgrad?

(b) Die in Abbildung 2.1 dargestellte Schaltung enthält 8 Widerstände, mit den Werten R_1=R_3=R_5=R_6=R_7=R_8=$2\,\Omega$, R_2=R_4=R_9=$1\,\Omega$. Die Quellströme haben die Werte I_1=8 A und I_2=16 A. (8 Punkte)

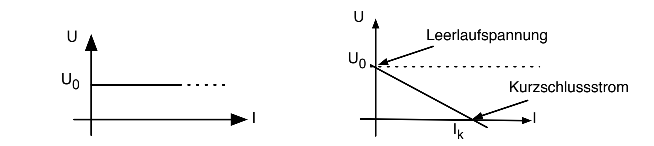
- Bestimmen Sie mit dem formalisierten Knotenpunktpotentialverfahren das Gleichungssystem für die Potentiale V_1, V_2 und V_3. Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel und geben Sie die Lösung explizit an.

Hinweis: Geben Sie jeden Zwischenschritt an und achten Sie auf eine verständliche Beschriftung.

Lösung:

(a)
- Ideale Spannungsquelle: Eine ideale Spannungsquelle würde immer die gleiche Spannung liefern unabhänging der Schaltung die damit versorgt wird. Tatsächlich nimmt die Spannung mit zunehmender Stromstärke ab. Der Innenwiderstand wird bestimmt durch

$$Innenwiderstand = \frac{Leerlaufspannung}{Kurzschlussstrom} = \frac{U_0}{I_K}.$$



a.) Kennlinie einer idealen Spannungsquelle b.) Kennlinie einer realen Spannungsquelle

- Leistungsanpassung: Die Leistung im Verbraucher ist dann maximal, wenn der Lastwiderstand genau so groß gewählt wird wie der Innenwiderstand der Quelle. In diesem Falle spricht man von Leistungsanpassung.
- Ein System aus Quelle und Verbraucher hat immer dann einen hohen Wirkungsgrad, wenn gilt:
  Lastwiderstand » Innenwiderstand

(b) Formalisierten Knotenpunktpotentialverfahren:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_9} & \frac{-1}{R_2} & \frac{-1}{R_9} \\ \frac{-1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_7} & \frac{-1}{R_4} \\ \frac{-1}{R_9} & \frac{-1}{R_4} & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_8}+\frac{1}{R_9} \end{bmatrix} \mathrm{S}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \mathrm{S} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix} \text{ A.}$$

Mit der Cramerschen Regel werden folgende LGS gelöst.

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 16 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}} \mathrm{V} = \tfrac{128}{16} \mathrm{V} = 8\mathrm{V},$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 8 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 16 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}} \mathrm{V} = \tfrac{96}{16} \mathrm{V} = 6\mathrm{V},$$

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 8 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}} \mathrm{V} = \tfrac{160}{16} \mathrm{V} = 10\mathrm{V}$$

Die Lösungen lauten V_1=8V, V_2=6V und V_3=10V.

Aufgabe 3 **(7 Punkte)**
Netzwerk

Hinweis: Rechnen Sie zunächst allgemeinen und setzten Sie dann die Werte ein.

(a) Die in Abbildung 3.1 dargestellte Schaltung enthält eine Stromquelle mit I_0=2,4 A und eine Spannungsquelle mit U_0=8V. Die Widerstände besitzen die Werte R_1=30 Ω und R_2=50 Ω. (7 Punkte)

- Welchen Wert hat der Strom I_2 und die Spannung U_2?
  Verwenden Sie dazu das Überlagerungsverfahren und skizzieren Sie die zwei Teillösungen.

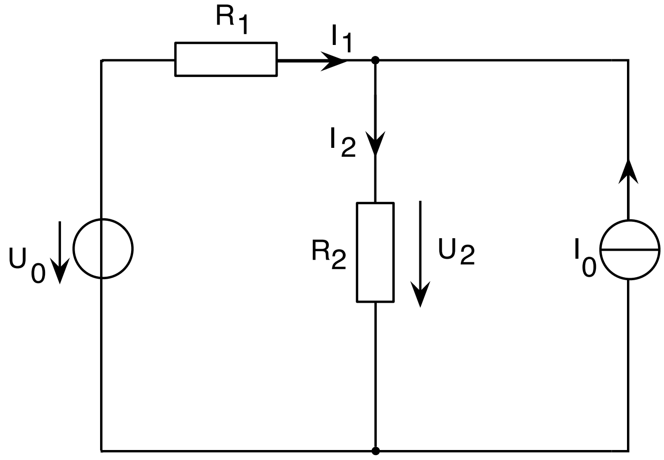
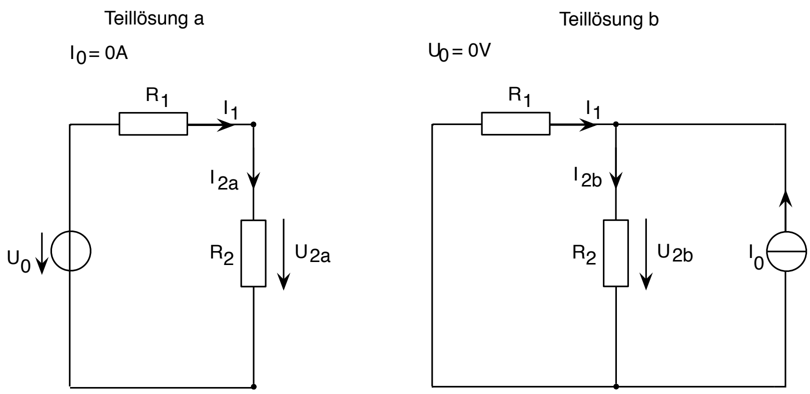


Abbildung 3.1

Lösung:

(a) Die Teillösungen sehen wie folgt aus:



$I_{2a}= \frac{U_0}{R_1+R_2}$

$I_{2b}= \frac{R_1 I_0}{R_1+R_2}$

Zuammengesetzt ergibt sich:

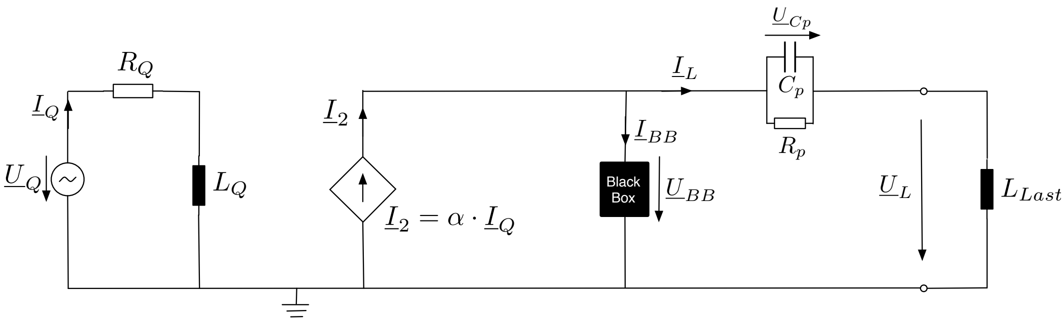
$I_2=I_{2a}+I_{2b} = \frac{U_0+R_1 I_0}{R_1+R_2}=\frac{8V+30\,\Omega\cdot 2{,}4A}{80\,\Omega}=1\text{A}$

$U_2= R_2\cdot I_2=(U_0+R_1 I_0)\cdot\frac{R_2}{R_1+R_2}=50\,\Omega\cdot\ 1\text{A}=50\text{V}$

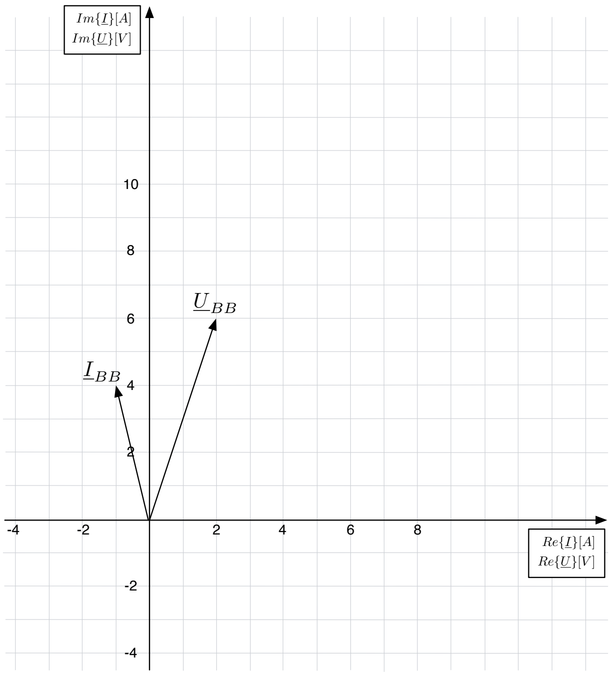
Aufgabe 4 **(10 Punkte)**

Wechselstromlehre

Gegeben sei die unten stehende Schaltung:



In dieser Schaltung befindet sich eine Black Box. Von dieser Black Box sind die darüber abfallende Spannung $\underline{U}_{BB}$ und der hinein fließende Strom $\underline{I}_{BB}$ bekannt:



Weiterhin gilt für die Aufgabe Folgendes:

- $\omega = 500\,s^{-1}$
- $\underline{U}_Q = 65\,V$
- $R_Q = 8\,\Omega$
- $L_Q = 28\,mH$
- $\alpha = j2$
- $L_{Last} = 2\,mH$

Für das Zeigerdiagramm dieser Aufgabe soll das **Diagramm: Zeigerdiagramm 1** verwendet werden.

(a) Bestimmen Sie den Strom $\underline{I}_2$ rechnerisch und tragen Sie diesen in das Zeigerdiagramm ein. *Hinweis: Beachten Sie, dass der Parameter α komplex ist.* (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie den Strom $\underline{I}_L$ zeichnerisch mit Hilfe des Zeigerdiagramms. Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_L$ und tragen Sie diese in das Zeigerdiagramm ein. (3 Punkte)

(c) Bestimmen Sie Spannung $\underline{U}_{Cp}$ zeichnerisch mit Hilfe des Zeigerdiagramms. (2 Punkte)

(d) Bestimmen Sie die Ströme $\underline{I}_{Cp}$ und $\underline{I}_{Rp}$ zeichnerisch mit Hilfe des Zeigerdiagramms und geben Sie diese zahlenmässig an. (3 Punkte)

Lösung:

(a) Für den Strom $\underline{I}_2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_2 &= \alpha \cdot \underline{I}_Q \\
&= \alpha \left(\frac{\underline{U}_Q}{R_Q + j\omega L_Q} \right) \\
&= j2 \cdot \left(\frac{65\,V}{8\,\Omega + j \cdot 500s^{-1} \cdot 28\,mH} \right) \\
&= (7 + j4)\,A
\end{aligned}$$

(b) Die folgende Konstruktion wird zur Ermittlung des Stromes $\underline{I}_L$ im Zeigerdiagramm durchgeführt:

$$\underline{I}_L = \underline{I}_2 + (-\underline{I}_{BB}) = 8\,A$$

Für $\underline{U}_L$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_L &= \underline{I}_L \cdot j\omega L_{Last} \\
&= (8\,A \cdot j \cdot 500\,s^{-1} \cdot 2\,mH) \\
&= j8V
\end{aligned}$$

(c) Die folgende Konstruktion wird zur Ermittlung der Spannung $\underline{U}_{Cp}$ im Zeigerdiagramm durchgeführt:

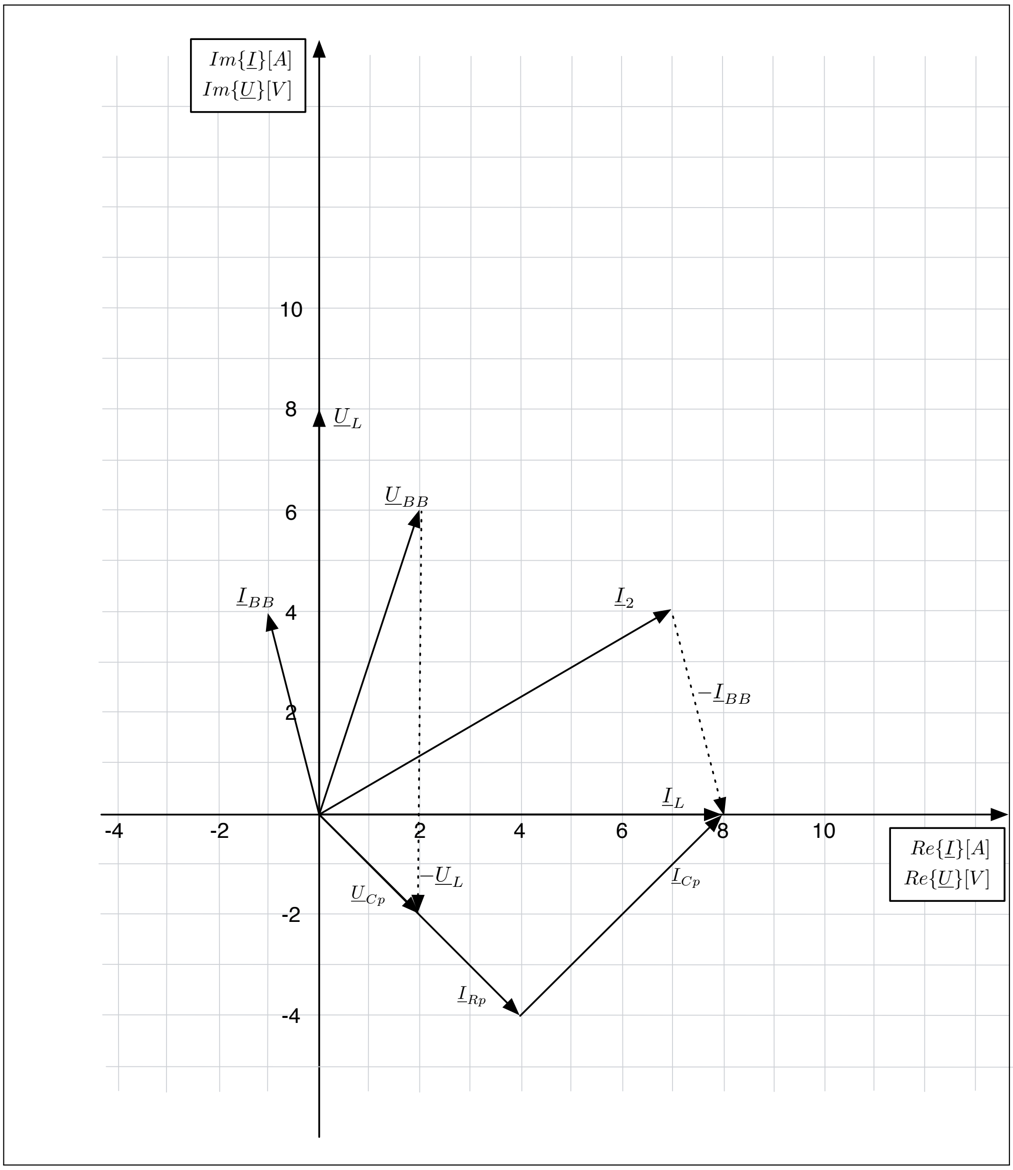
$$\underline{U}_{Cp} = \underline{U}_{BB} + (-\underline{U}_L) = (2 - j2)\,V$$

(d) Für die Konstruktion der gesuchten Ströme müssen die folgenden drei Punkte gelten:

- $\underline{I}_{Rp}$ zeigt in die gleiche Richtung wie $\underline{U}_{Cp}$
- $\underline{I}_{Cp}$ liegt senkrecht auf $\underline{U}_{Cp}$
- Die Summe der zwei Ströme $\underline{I}_{Rp}$ und $\underline{I}_{Cp}$ muss $\underline{I}_L$ ergeben

Für die Ströme gilt dann:

$$\underline{I}_{Cp} = (4 + j4)\,A$$
$$\underline{I}_{Rp} = (4 - j4)\,A$$



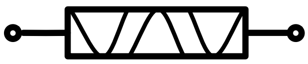
$Im\{\underline{I}\}[A]$
$Im\{\underline{U}\}[V]$
$Re\{\underline{I}\}[A]$
$Re\{\underline{U}\}[V]$
10
8
6
4
2
-2
-4
-4
-2
2
4
6
8
10
$\underline{U}_L$
$\underline{U}_{BB}$
$\underline{I}_{BB}$
$\underline{I}_2$
$-\underline{I}_{BB}$
$\underline{I}_L$
$-\underline{U}_L$
$\underline{U}_{Cp}$
$\underline{I}_{Cp}$
$\underline{I}_{Rp}$

Aufgabe 5 **(11 Punkte)**

Wechselstromlehre

Ein neues Bauteil wurde vor Kurzem am KIT entdeckt und LENator genannt. Die Impedanz des LENators wurde festgelegt und das elektrische Symbol eingeführt:

$$\underline{Z}_{LEN} = \alpha \cdot (j\omega)^{\beta}$$



Dabei sind α und β zwei Parameter, die vom Material des LENators abhängig sind. Für diese Werkstoffparameter gilt:

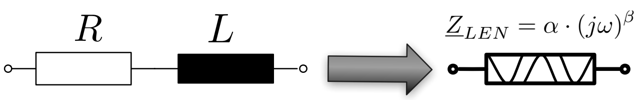
$$\begin{aligned} \alpha &\in \mathbf{R}^{+} \\ \beta &\in [-1; 1] \end{aligned}$$

Der gigantische Vorteil des LENators liegt darin, dass sich durch geeignete Wahl der Werkstoffparameter das Verhalten aller klassischen passiven Bauelemente (Widerstand, Kondensator und Spule) realisieren lässt.

(a) Was muss für α und β gelten, wenn: (3 Punkte)

- der LENator sich wie ein ohmscher Widerstand mit dem Widerstandswert R verhalten soll? Welcher Zusammenhang existiert dann zwischen R, α und β?
- der LENator sich wie eine Spule mit der Induktivität L verhalten soll? Welcher Zusammenhang existiert dann zwischen L, α und β?
- der LENator sich wie ein Kondensator mit der Kapazität C verhalten soll? Welcher Zusammenhang existiert dann zwischen C, α und β?

(b) Ein LENator soll eingesetzt werden, um ein RL-Glied zu ersetzen. Das RL-Glied wird bei der Kreisfrequenz ω betrieben: (6 Punkte)



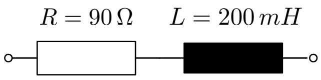
Gesucht ist nun der allgemeine funktionelle Zusammenhang zwischen den Werkstoffparametern α und β in Abhängigkeit von R, L und ω. Zeigen Sie, dass eine mögliche Lösung für α und β wie folgt aussieht:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2}{\pi} \cdot tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \\ \alpha &= \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{\omega^{\frac{2}{\pi} \cdot tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)}} \end{aligned}$$

Hinweis: Fangen Sie damit an, dass Sie die Impedanz des LENators und die vom RL-Glied in die Euler'sche Darstellung bringen:

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot e^{j\varphi_z}$$

(c) Das unten stehende RL-Glied soll durch einen LENator ersetzt werden. Wie groß müssen α und β sein, wenn der Schaltkreis bei der Kreisfrequenz $\omega = 450\,s^{-1}$ betrieben wird? (2 Punkte)



Lösung:

(a) Um das gewünschte Verhalten zu erzielen, muss Folgendes gelten:

- Für $\alpha = R$ und $\beta = 0$ gilt $\underline{Z}_{LEN} = R$
- Für $\alpha = L$ und $\beta = +1$ gilt $\underline{Z}_{LEN} = j\omega L$
- Für $\alpha = \frac{1}{C}$ und $\beta = -1$ gilt $\underline{Z}_{LEN} = \frac{1}{j\omega C}$

(b) Um den gesuchten funktionellen Zusammenhang zu finden, werden die jeweiligen Impedanzen in die Eulersche Darstellung gebracht. Durch Koeffizientenvergleich wird zuerst β und danach α bestimmt.
Für das RL-Glied gilt:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{RL} &= R + j\omega L \\
\underline{Z}_{RL} &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cdot e^{j \cdot tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)}
\end{aligned}$$

Für den LENator gilt:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{LEN} &= \alpha \cdot (j\omega)^{\beta} = \alpha \cdot (\omega)^{\beta} (e^{j \cdot \frac{\pi}{2}})^{\beta} \\
\underline{Z}_{LEN} &= \alpha \cdot \omega^{\beta} \cdot e^{j \cdot \beta \cdot \frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

Die Phase der zwei komplexen Impedanzen muss gleich sein. Dadurch gilt:

$$\begin{aligned}
\beta \cdot \frac{\pi}{2} &= tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \\
\beta &= \frac{2}{\pi} \cdot tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)
\end{aligned}$$

Der Betrag der zwei Impedanzen muss gleich sein. Dadurch gilt:

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot \omega^{\beta} &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \\
\alpha &= \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{\omega^{\beta}} \\
\alpha &= \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{\omega^{\frac{2}{\pi} \cdot tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)}}
\end{aligned}$$

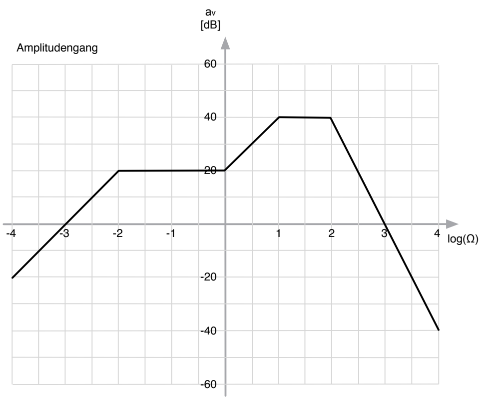
(c) Das angegebene RL-Glied lässt durch die folgenden Werkstoffparametern eines LENators realisieren:

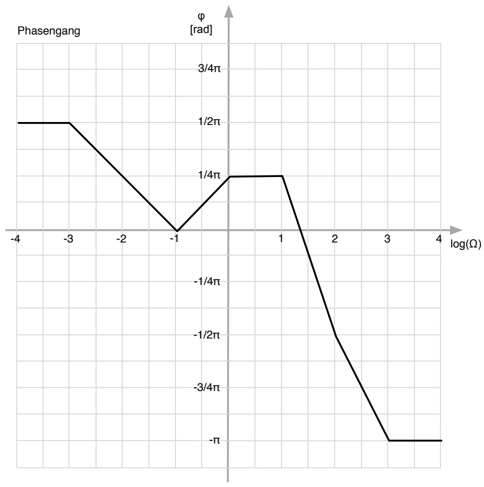
$$
\begin{aligned}
\beta &= \frac{2}{\pi} \cdot tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \\
&= \frac{2}{\pi} \cdot tan^{-1}\left(\frac{90\,\Omega}{90\,\Omega}\right) \\
\beta &= \frac{1}{2} \\
\alpha &= \frac{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{\omega^\beta} \\
&= \frac{\sqrt{90^2 + (90)^2}}{(450)^{\frac{1}{2}}} \Omega\, s^{\frac{1}{2}} \\
\alpha &= 6\,\Omega\, s^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6 **(15 Punkte)**

Bodediagramm

Gegeben ist das folgende Bodediagramm mit einer Normierungsfrequenz von $100\,kHz$:





Im Folgenden soll die Übertragungsfunktion der dargestellten Schaltung rekonstruiert werden. Es sollen dafür nur Filter erster Ordung eingesetzt werden. Zerlegen Sie die Schaltung in fünf Teilschaltungen und einen Verstärkungsfaktor. *Hinweis: Gehen Sie von entkoppelten Schaltungsteilen aus.*

(a) Versuchen Sie den oben dargestellten Amplitudengang und Phasengang zu rekonstruieren. (8 Punkte)

- Verwenden Sie vier Filter erster Ordnung und eine konstante Verstärkung wobei ein Filter doppelt verwendet werden muss. Dieser soll im Folgenden jeweils nur einfach gezeichnet und als doppelt markiert werden (zum Beispiel mit "2x").
- Zeichnen Sie die Amplitudengänge der verwendeten Filter in **Diagramm 6.1** und die Phasengänge in **Diagramm 6.2**.
- Markieren Sie die Kurven der Filter alphabetisch (A,B,C,...).
- Summieren Sie die Kurven der Filter wieder zum oben dargestellten Bodediagramm (Amplituden- und Phasengang).

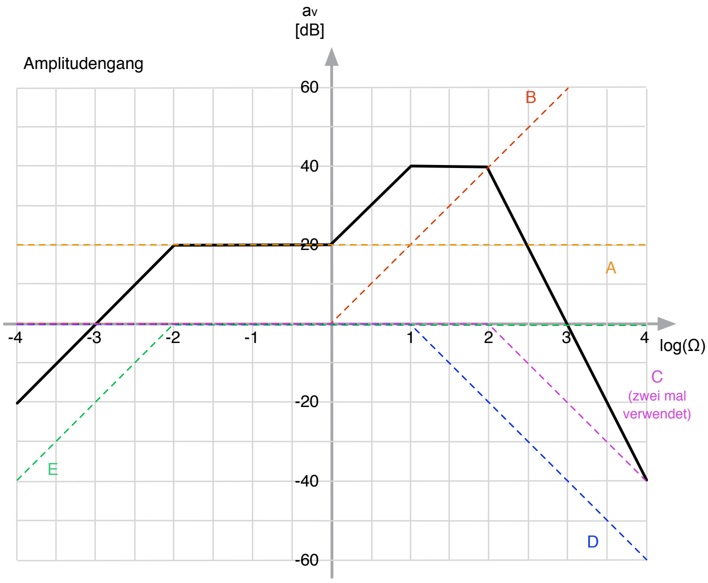
Hinweis: Beginnen Sie mit der Rekonstruktion des Amplitudengangs von links nach rechts.

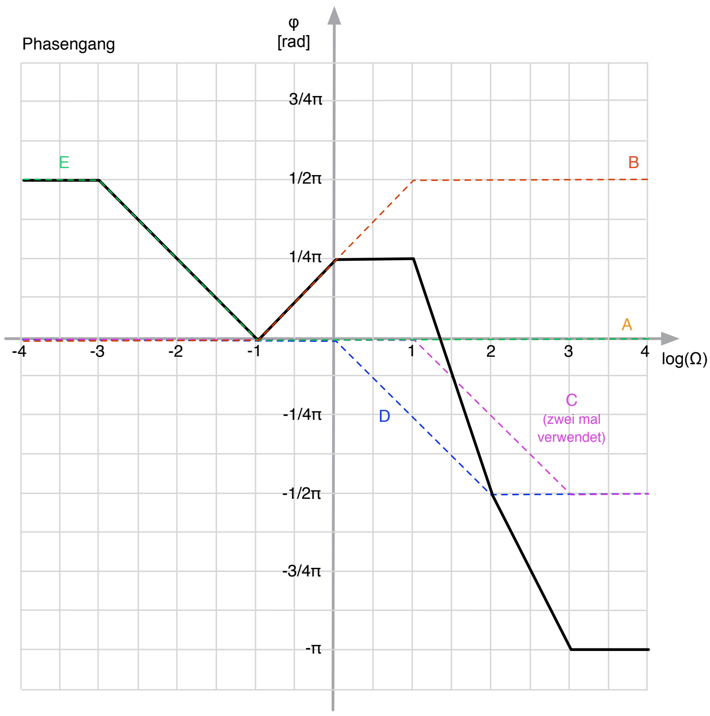
(b) Geben Sie die normierte Übertragungsfunktion zum Bodediagramm oben an. Schreiben Sie zunächst die normierten Übertragungsfunktionen der vier nicht gleichen Schaltungsteile und den Verstärkungsfaktor auf und markieren Sie diese passend mit A, B, C, ... Vereinfachen Sie die Gleichung wenn möglich. *Hinweis: Achten Sie darauf, dass alle Teile die gleiche Normierung besitzen.* (5 Punkte)

(c) Geben Sie für alle Schaltungsteile die Knickfrequenzen in Herz an. (2 Punkte)

Lösung:

(a) Eine Lösung könnte etwa so aussehen:





(b) Die Teilschaltungen aus (a) sind:

$$A: \quad V = 10$$

$$B: \quad 1 + j\Omega \qquad C: \quad \frac{1}{1+j10^{-2}\Omega}$$

$$D: \quad \frac{1}{1+j10^{-1}\Omega} \qquad E: \quad \frac{j10^2\Omega}{1+j10^2\Omega}$$

und die gesamte Übertragungsfunktion ist:

$$G(\Omega) = 10 \cdot \frac{(1+j\Omega)\cdot j10^2\Omega}{(1+j10^{-1}\Omega)\cdot(1+j10^2\Omega)\cdot(1+j10^{-2}\Omega)^2}$$

(c)

$$B: \quad f_c = 100\,kHz \quad C: \quad f_c = 10\,MHz$$

$$D: \quad f_c = 1\,MHz \quad E: \quad f_c = 1\,kHz$$

Aufgabe 7 **(5 Punkte)**

Bodediagramm

Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$\frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{(1 - jR_4C_1\omega)jR_2C_2\omega}{(1 + jR_1C_3\omega)^2}$$

und die Bauteilwerte: $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = 200\,m\Omega$, $R_4 = 50\,\Omega$, $C_1 = 400\,nF$, $C_2 = 100\,\mu F$, $C_3 = 1000\,\mu F$.

(a) Normieren Sie die oben angegebene Übertragungsfunktion auf $\omega_n = 5000\,s^{-1}$ und geben Sie diese auch in dB an. Bestimmen Sie die Verstärkung der Übertragungsfunktion nach Bode in allgemeiner Form. Setzen Sie dafür die Werte der Bauteile ein. (3 Punkte)

(b) In die von der Übertragungsfunktion repräsentierte Schaltung wird die folgende Spannung (2 Punkte)

$$U_e(t) = 10\,V \cdot \sin(50000\,s^{-1} \cdot (t + 15.7080\,\mu s))$$

eingespeist. Geben Sie die Ausgangsspannung in der Form

$$U_a(t) = A_a \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot (t + t_0))$$

an. Bestimmen Sie dazu die fehlenden Größen: Die Amplitude A_a, die Frequenz f_0 und die Zeitverschiebung t_0. **Runden Sie auf 4 Nachkommastellen.**

Lösung:

(a) Die normierte Übertragungsfunktion erhalten wir zu

$$\frac{U_a}{U_e} = -10^2 \cdot \frac{(1 - j10^{-1}\Omega)j10^1\Omega}{(1 + j10^2\Omega)^2}$$

und in logarithmischer Form

$$20\cdot\log\left|\frac{U_a}{U_e}\right| = 40 + 20\log|(1 - j10^{-1}\Omega)| + 20\log|10\Omega| - 40\log|(1 + j10^2\Omega)|$$

Auch korrekt ist:

$$20\cdot\log\left|\frac{U_a}{U_e}\right| = 60 + 20\log|(1 - j10^{-1}\Omega)| + 20\log|\Omega| - 40\log|(1 + j10^2\Omega)|$$

(b) Wir berechnen zunächst den Wert Ω

$$\Omega_{U_e} = \frac{\omega_{U_e}}{\omega_n} = \frac{50000\,s^{-1}}{5000\,s^{-1}} = 10$$

für unsere normierte Übertragungsfunktion. Dieses wird in die normierte Übertragungfunktion eingesetzt.

$$\frac{U_a}{U_e} = -10^2 \cdot \frac{(1 - j)j \cdot 100}{(1 + j \cdot 1000)^2} \approx 9.9800 \cdot 10^{-3} + j0.0100 \approx 0.0141\angle 0.2503\pi$$

Als Lösung ist auch

$$\frac{U_a}{U_e} = -10^2 \cdot \frac{(1 - j)j \cdot 100}{(1 + j \cdot 1000)^2} \approx -10^4 \cdot \frac{(j + 1) \cdot 100}{j^2 \cdot 10^6} = 10^{-2}\sqrt{(2)}\mathrm{e}^{j45^\circ}$$

erlaubt.

Damit lässt sich die Amplitude A_a, die Frequenz f_0 und die Zeitverschiebung t_0 berechnen:

- Amplitude: $A_a = 141\,mV$
- Frequenz: $f_0 = \frac{50000\,s^{-1}}{2\pi} = 7.9577\,kHz$
- Zeitverschiebung: $t_0 = \frac{0.2503\pi}{50000\,s^{-1}} + 15.7268\,\mu s = 31.4348\,\mu s$

Aufgabe 8 **(14 Punkte)**
Operationsverstärker

(a) Wodurch wird bei einem realen Operationsverstärker die maximale Ausgangsspannung begrenzt? (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben können auch ohne die vorherigen gelöst werden!

Gegeben sei die folgende Schaltung:

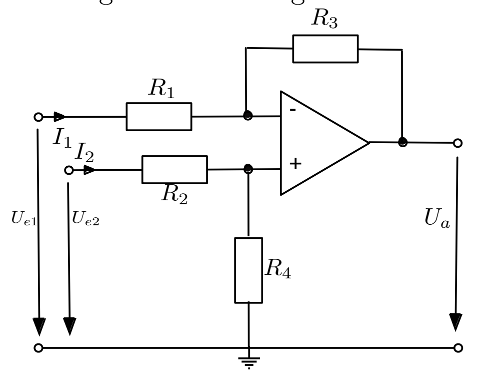


Abbildung 8.1

(b) Um was für eine Schaltung handelt es sich? Geben Sie den allgemeinen Namen der Schaltung an! (1 Punkt)

(c) Stellen Sie drei unabhängige Maschengleichungen für die Schaltung in Abbildung 8.1 auf. (3 Punkte)

Daraus lässt sich ableiten, dass

$$U_a = -U_{e1}\left(\frac{R_3}{R_1}\right) + U_{e2}\left(\frac{R_4}{R_2 + R_4}\right)\left(\frac{R_1 + R_3}{R_1}\right)$$

(d) In welchem Verhältnis muss man die Widerstände (3 Punkte)

$$R_1, R_2, R_3, R_4$$

wählen, damit

$$U_a = U_{e2} - 3U_{e1}$$

gilt? Geben Sie die Verhältnisse $\frac{R_3}{R_1}$ und $\frac{R_2}{R_4}$ an.

Die folgenden Teilaufgaben können auch ohne die vorherigen gelöst werden!

(e) Für eine spezielle Wahl der Widerstände gilt für die Schaltung in Abbildung 8.1. (6 Punkte)

$$U_a = U_{e2} - 2U_{e1}$$

Für die Versorgungsspannung des OP gilt: $U_0 = \pm 5V$. Zeichnen Sie die resultierende Ausgangsspannunge für die unten stehenden Eingangsspannungen zwischen 0 und $2T$ in **Diagramm: Operationsverstärker 1**.

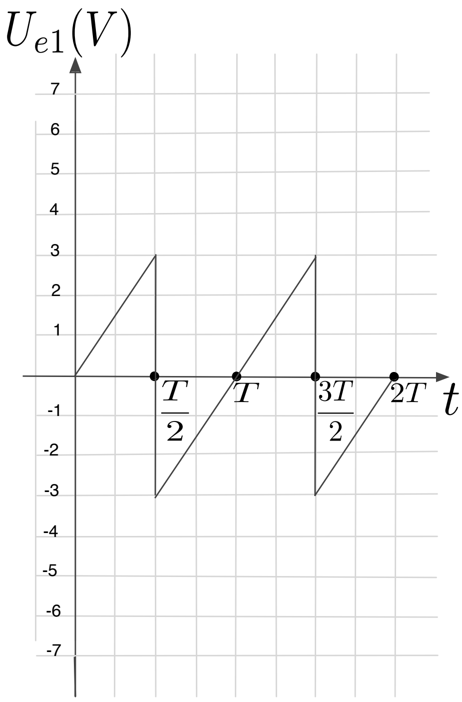


Abbildung 8.2a

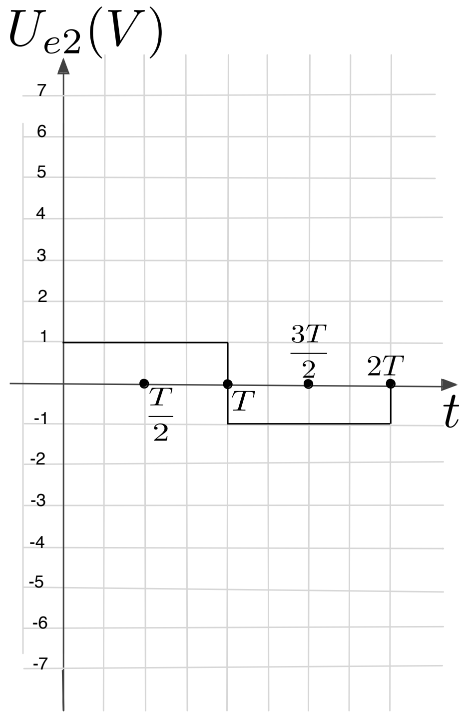


Abbildung 8.2b

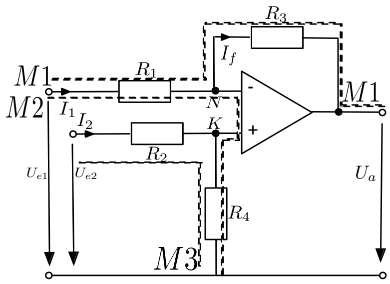
Lösung:

(a) Die Ausgangsspanung kann nicht größer sein als die Versorgungsspannung.

(b) (Teilverstärkender) Differenzverstärker

(c)

$$\begin{aligned} I_f &= I_1 \\ M1: -U_{e1} + I_1 R_1 + R_3 I_1 + U_a &= 0 \\ M2: -U_{e1} + I_1 R_1 + R_4 I_2 &= 0 \\ M3: -U_{e2} + I_2 R_2 + R_4 I_2 &= 0 \end{aligned}$$



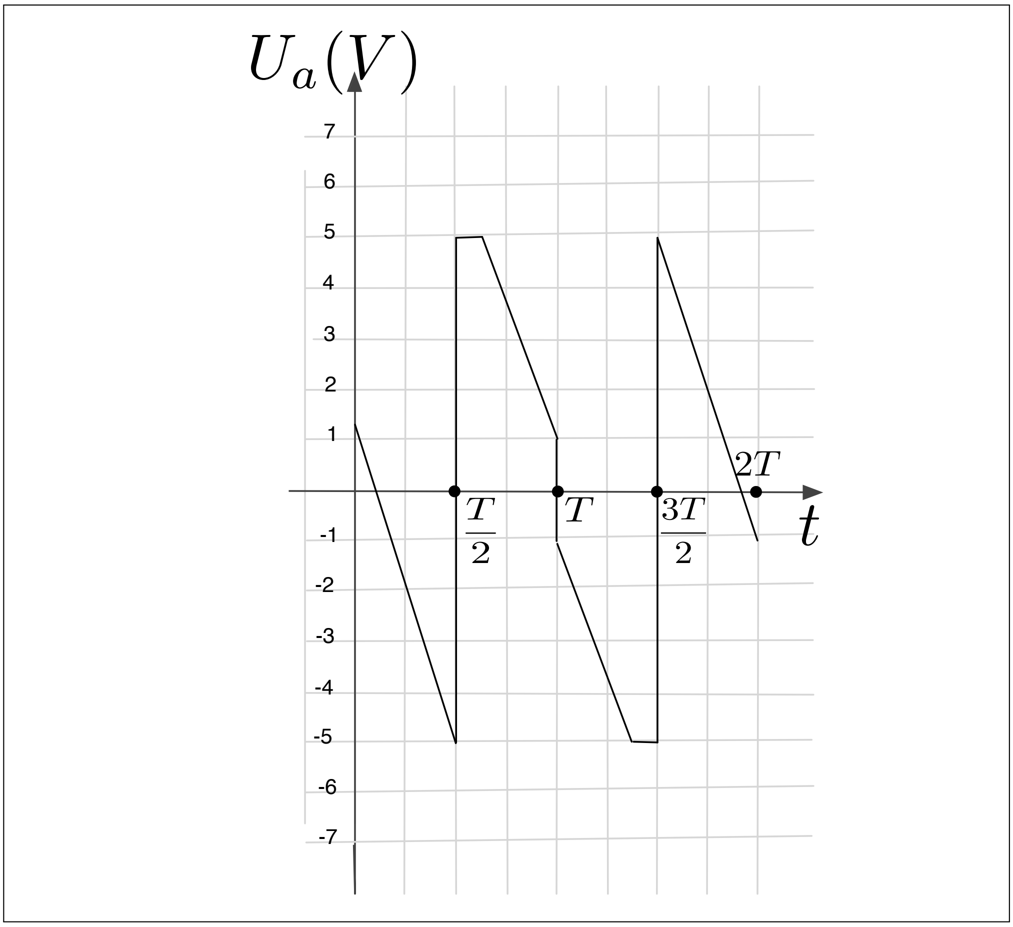
(d)

$$\begin{aligned} U_a &= U_{e2} - 3U_{e1} \\ \frac{R_3}{R_1} &= 3 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left(\frac{R_4}{R_2 + R_4}\right)\left(\frac{R_1 + R_3}{R_1}\right) &= 1 \\ \left(\frac{R_4}{R_2 + R_4}\right)\left(\frac{R_1 + 3R_1}{R_1}\right) &= 1 \\ \left(\frac{R_4}{R_2 + R_4}\right) &= \frac{1}{4} \\ 4R_4 &= R_2 + R_4 \\ \frac{R_2}{R_4} &= 3 \end{aligned}$$

(e) Für $U_a = U_{e2} - 2U_{e1}$ gilt:


$U_a(V)$
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
$\frac{T}{2}$
T
$\frac{3T}{2}$
$2T$
t