

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel

Übungsleiter: Dipl.-Ing. Gustavo Lenis

Klausur

07. Oktober 2015

Beginn: 14:00 Uhr

Familienname:	AUFKLEBER
Vorname:	
Matrikel-Nr.:	

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem nicht programmierbaren Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein!
Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare!
Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	5	
2	15	
3	10	
4	6	
5	21	
6	22	
7	15	
Gesamt:	94	

Note:_____

Aufgabe 1**(5 Punkte)****Ortskurve**

- (a) Beweisen Sie, dass die Admittanzkurve zu einer gegebenen Impedanz der Form $\underline{Z}(\omega) = R + j\omega L$ die folgende Gleichung für alle ω erfüllt: (3 Punkte)

$$\left(\operatorname{Re}\{\underline{Y}(\omega)\} - \frac{1}{2R} \right)^2 + \operatorname{Im}\{\underline{Y}(\omega)\}^2 = \frac{1}{4R^2}$$

Bestimmen Sie zunächst $\underline{Y}(\omega)$.

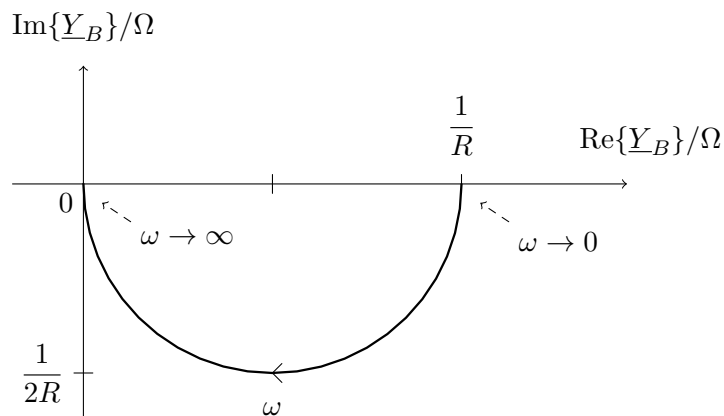
- (b) Zeichnen Sie die Ortskurve der Admittanz $\underline{Y}(\omega)$, für alle $\omega \geq 0$. Verwenden Sie dazu Diagramm 1.1 (2 Punkte)

Lösung:

(a)

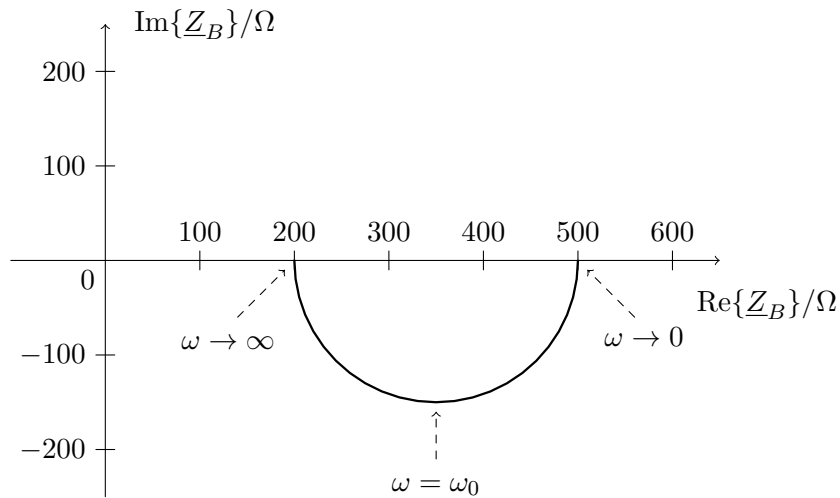
$$\underline{Y}(\omega) = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{Re}\underline{Y}(\omega) - \frac{1}{2R} \right)^2 + (\operatorname{Im}\{\underline{Y}(\omega)\})^2 &= \left(\frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{1}{2R} \right)^2 + \left(\frac{-\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \right)^2 \\ &= \frac{R^2}{(R^2 + (\omega L)^2)^2} - \frac{1}{R^2 + (\omega L)^2} + \frac{1}{4R^2} + \frac{(\omega L)^2}{(R^2 + (\omega L)^2)^2} \\ &= \frac{R^2 + (\omega L)^2}{(R^2 + (\omega L)^2)^2} - \frac{1}{R^2 + (\omega L)^2} + \frac{1}{4R^2} \\ &= \frac{1}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{1}{R^2 + (\omega L)^2} + \frac{1}{4R^2} \\ &= \frac{1}{4R^2} \end{aligned}$$

(b) **Admittanzkurve:**

Aufgabe 2**(15 Punkte)****Ortskurve**

Von einer Black-Box-Schaltung sei die Impedanzkurve mit $\omega_0 = 1000 \text{ s}^{-1}$ gegeben:

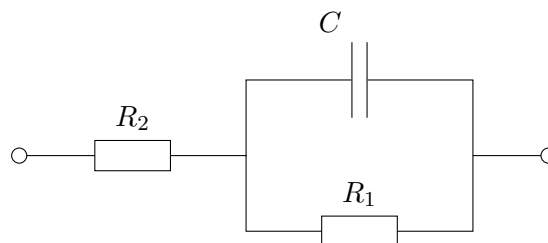


- (a) Leiten Sie das Schaltbild der zugehörigen Schaltung ab. Begründen Sie kurz. Die Schaltung besteht aus drei Bauteilen. (3 Punkte)
- (b) Stellen Sie die Gleichung für die Impedanz dieser Schaltung getrennt nach Real- und Imaginärteil auf. Rechnen Sie mit allgemeinen Werten und vereinfachen Sie soweit wie möglich. (3 Punkte)
- (c) Geben Sie Werte für die Bauteilgrößen einschließlich Einheiten an. Begründen Sie kurz. (4 Punkte)
- (d) Zeichnen Sie in Diagramm 2.1 die zugehörige Ortskurve der Admittanz ein. Übernehmen Sie sämtliche charakteristischen Werte und Grenzwerte, die auch in der Impedanzkurve angegeben sind. Beschriften Sie die Achsen. (5 Punkte)

Lösung:

- (a)
- Halbkreis auf der unteren Impedanzhalbebene $\Rightarrow$ Parallelschaltung aus R_1 und C
 - Verschiebung nach rechts auf der reellen Achse $\Rightarrow$ zusätzlich Reihenschaltung mit R_2

Schaltbild:

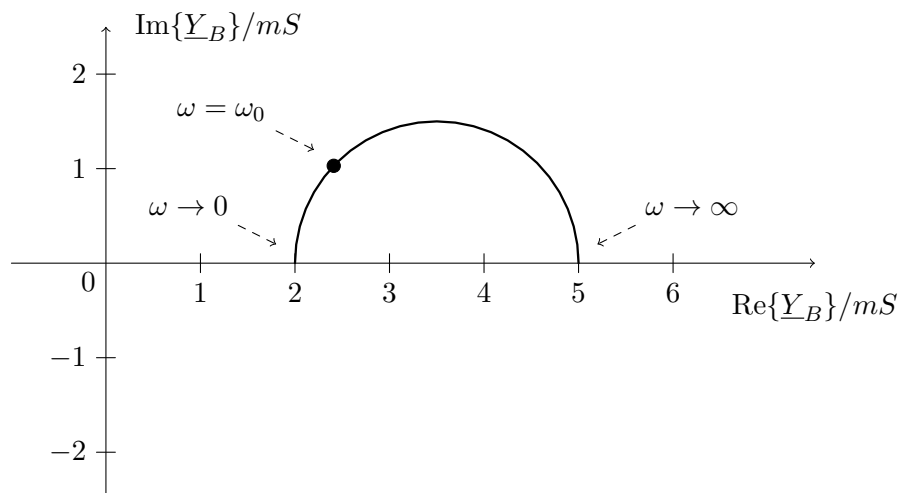


(b)

$$\begin{aligned}
 \underline{Z} &= R_2 + R_1 \parallel \underline{Z}_C \\
 &= R_2 + \frac{R_1 \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} \\
 &= R_2 + \frac{R_1}{1 + j\omega C R_1} \\
 &= R_2 + \frac{R_1(1 - j\omega C R_1)}{1 + (\omega C R_1)^2} \\
 &= R_2 + \frac{R_1}{1 + (\omega C R_1)^2} - j \frac{\omega C R_1^2}{1 + (\omega C R_1)^2}
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} &= R_2 = 200 \, \Omega \\
 \underline{Z}(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} &= R_1 + R_2 = 500 \, \Omega \quad \Rightarrow \quad R_1 = 300 \, \Omega \\
 \text{Im}\{\underline{Z}(\omega)\}|_{\omega=\omega_0} &= -\frac{\omega_0 C R_1^2}{1 + (\omega_0 C R_1)^2} = -\frac{R_1}{2} \\
 \Rightarrow \quad \frac{\omega_0 C R_1^2}{1 + (\omega_0 C R_1)^2} &= \frac{R_1}{2} \\
 2\omega_0 C R_1 &= 1 + (\omega_0 C R_1)^2 \\
 (\omega_0 C R_1)^2 - 2\omega_0 C R_1 + 1 &= 0 \\
 (\omega_0 C R_1 - 1)^2 &= 0 \\
 C &= \frac{1}{\omega_0 R_1} = 3.33 \, \mu F
 \end{aligned}$$

(d) **Admittanzkurve:**

Aufgabe 3

Netzwerk

(10 Punkte)

Gegeben sei das folgende Netzwerk bestehend aus 2 Stromquellen und 9 Widerständen.

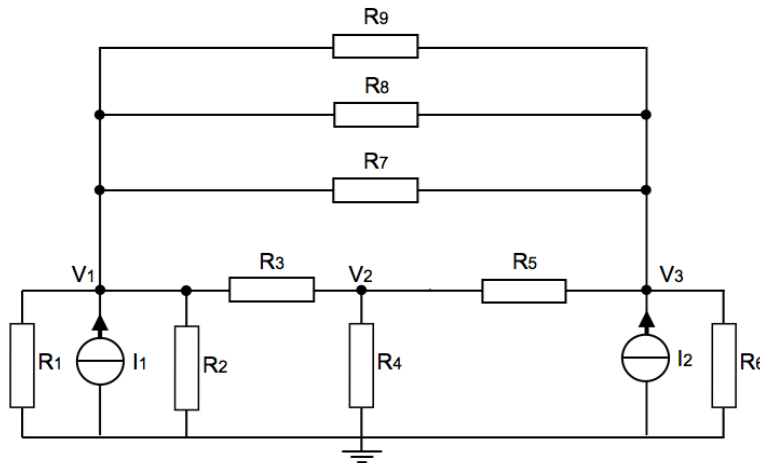


Abbildung 2.1

(a) Allgemeine Fragen:

(2 Punkte)

- Definieren Sie den Begriff Leistungsanpassung. Was muss für den Innenwiderstand der Quelle bei der Leistungsanpassung gelten, wenn eine ohmsche Last vorliegt?
- In welchem Fall hat ein System aus Quelle und Verbraucher immer einen hohen Wirkungsgrad?

(b) Die in Abbildung 2.1 dargestellte Schaltung enthält 9 Widerstände, mit den Werten $R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=R_6=1\ \Omega$ und $R_7=R_8=R_9=3\ \Omega$. Die Quellströme haben die Werte $I_1=9\ \text{A}$ und $I_2=12\ \text{A}$.

(8 Punkte)

- Bestimmen Sie mit dem formalisierten Knotenpunktpotentialverfahren das Gleichungssystem für die Potentiale V_1 , V_2 und V_3 . Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Hinweis: Geben Sie jeden Zwischenschritt an und achten Sie auf eine verständliche Beschriftung und berechnen Sie die Determinanten nachvollziehbar.

Lösung:

- (a)
- Leistungsanpassung: Die Leistung im Verbraucher ist dann maximal, wenn der Lastwiderstand genau so groß wie der Innenwiderstand der Quelle gewählt wird. In diesem Falle spricht man von Leistungsanpassung.
 - Ein System aus Quelle und Verbraucher hat immer dann einen hohen Wirkungsgrad, wenn gilt:
Lastwiderstand » Innenwiderstand der Quelle

(b) Formalisiertes Knotenpunktpotentialverfahren:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9} & \frac{-1}{R_3} + \frac{-1}{R_4} + \frac{1}{R_5} & \frac{-1}{R_7} + \frac{-1}{R_8} + \frac{-1}{R_9} \\ \frac{-1}{R_7} + \frac{-1}{R_8} + \frac{-1}{R_9} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Das Einsetzen in die obige Gleichung liefert:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} S \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix} A$$

Mit der Cramerschen Regel werden folgende LGS gelöst.

Zunächst wird die Determinante der Matrix D bestimmt.

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} S^3 \quad (1)$$

$$= ((4)(3)(3) + (-1)(-1)(-1) + (-1)(-1)(-1)) \quad (2)$$

$$- (-1)(3)(-1) - (-1)(-1)(4) - (3)(-1)(-1) \quad (3)$$

$$= ((36) + (-1) + (-1) - (3) - (4) - (3)) S^3 \quad (4)$$

$$= 24 S^3 \quad (5)$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 12 & -1 & 3 \end{vmatrix} A S^2}{D} = \frac{120}{24} V = 5V,$$

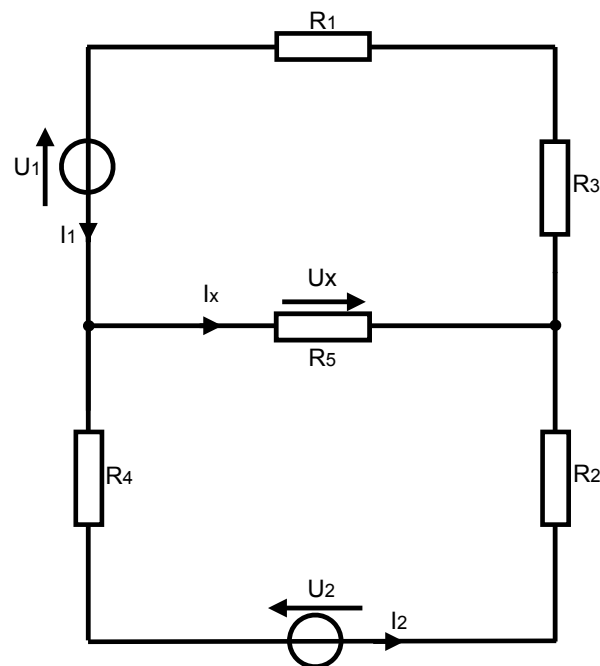
$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 9 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 12 & 3 \end{vmatrix} A S^2}{D} = \frac{96}{24} V = 4V,$$

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 9 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 12 \end{vmatrix} A S^2}{D} = \frac{168}{24} V = 7V$$

Die Lösungen lauten $V_1=5V$, $V_2=4V$ und $V_3=7V$.

Aufgabe 4**(6 Punkte)****Netzwerk**

Gegeben sei ein Widerstandsnetzwerk bestehend aus 2 Spannungsquellen und 5 Widerständen

**Abbildung 3.1**

Die Widerstände haben folgende Werte: $R_1=R_2=R_3=R_4=1\ \Omega$ und $R_5=2\ \Omega$. Weiter gilt: $U_1=3\text{ V}$ und $U_2=6\text{ V}$.

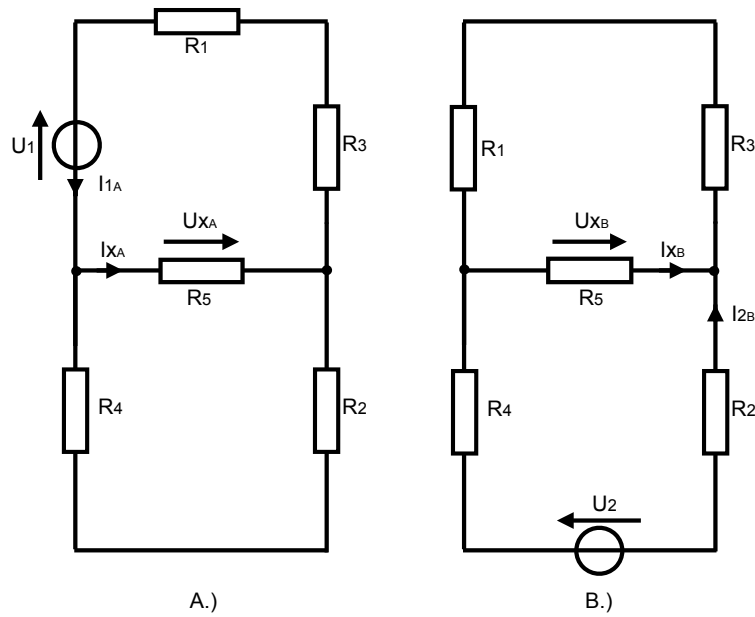
- (a) Welchen Wert hat die Spannung U_x und der Strom I_x ?

(6 Punkte)

Verwenden Sie das Überlagerungsverfahren und skizzieren Sie dazu die 2 Teillösungen.

Lösung:

- (a) Die Teillösungen sehen wie folgt aus:

**Abbildung 3.2**

Nach dem Überlagerungsverfahren gilt:

Wird die Spannung U_2 kurzgeschlossen, vgl. (Abbildung 3.2 A.), gilt:

$$I_{1A} = \frac{U_1}{R_1 + R_3 + (R_5 \parallel (R_4 + R_2))} = 1\text{A}$$

$$U_{xA} = (R_5 \parallel (R_4 + R_2)) \cdot I_{1A} = 1\text{V}$$

$$I_{xA} = \frac{U_{xA}}{R_5} = 0,5\text{A}$$

Wird die Spannung U_1 kurzgeschlossen, vgl. (Abbildung 3.2 B.), gilt:

$$I_{2B} = \frac{U_2}{R_2 + (R_5 \parallel (R_3 + R_1)) + R_4} = 2\text{A}$$

$$U_{xB} = (R_5 \parallel (R_3 + R_1)) \cdot (-I_{2B}) = -2\text{V}$$

$$I_{xB} = \frac{U_{xB}}{R_5} = -1\text{A}$$

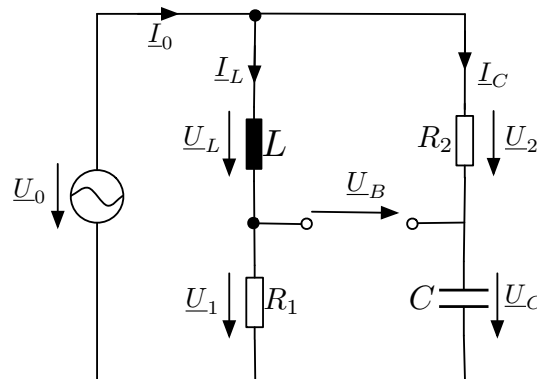
Daraus ergibt sich:

$$I_x = I_{xA} + I_{xB} = 0,5\text{A} - 1\text{A} = -0,5\text{A}$$

$$U_x = U_{xA} + U_{xB} = 1\text{V} - 2\text{V} = -1\text{V}$$

Aufgabe 5**(21 Punkte)****Wechselstromlehre**

Ein Hobby-Bastler ist dabei, eine neue Schaltung zu konstruieren. Dazu braucht er noch eine Spule. Er sucht seine Schubladen durch und findet eine. Allerdings kennt er die Induktivität der Spule nicht. Er überlegt weiter und erinnert sich daran, dass er noch eine Brückenschaltung herumliegen hat. Damit könnte er die Induktivität der Spule bestimmen. Er holt dann die alte Brückenschaltung und schließt die Spule an (siehe Schaltung). Er stellt aber fest, dass er die Werte der Widerstände in der Brückenschaltung nicht mehr kennt. Weiterhin ist das Rädchen zur Einstellung des Kondensators kaputt. Die Kapazität des Kondensators ist dadurch unveränderbar, aber auch noch unbekannt. Die Brücke kann also nicht abgeglichen werden und enthält nur unbekannte Bauteile.



Der Bastler ist trotzdem der Meinung, dass er alle vier Bauteile bestimmen kann. Deswegen entscheidet er sich dafür, die Brückenschaltung mit Spule an eine Wechselspannungsquelle anzuschließen. Er verfügt über ein einfaches Multimeter und kann dadurch einige Spannungen und Ströme messen:

- $\underline{U}_0 = 10 \text{ V}$
- $\underline{I}_0 = (5 + j2) \text{ A}$
- $\underline{U}_B = (-3 + j1) \text{ V}$

Weiterhin kann er auch noch den Betrag der Spannung an der Spule messen. Die Phase ist noch unbekannt:

- $|\underline{U}_L| = \sqrt{80} \text{ V}$

- Bestimmen Sie $\underline{U}_L$ und $\underline{U}_1$. Geben Sie $\underline{U}_L$ und $\underline{U}_1$ zahlenmäßig an und tragen Sie diese in das Zeigerdiagramms (Diagramm 5.1) ein. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise. *Hinweis: Real- und Imaginärteil von $\underline{U}_L$ sind ganze Zahlen.* (5 Punkte)
- Bestimmen Sie nun $\underline{U}_C$ und $\underline{U}_2$ rechnerisch und tragen Sie diese in das Zeigerdiagramm ein. (3 Punkte)
- Bestimmen Sie $\underline{I}_L$ und $\underline{I}_C$ graphisch mit Hilfe des Zeigerdiagramms. Geben Sie diese zahlenmäßig an. *Hinweis: Real- und Imaginärteil von $\underline{I}_L$ sind ganze Zahlen.* (5 Punkte)
- Bestimmen Sie die Reaktanz der Spule $X_L = \omega L$, die Reaktanz des Kondensators $X_C = -\frac{1}{\omega C}$ und die Widerstände R_1 und R_2 . (5 Punkte)
- Bestimmen Sie die von der Quelle abgegebene komplexe Leistung. Weist die Schaltung eher induktives, eher kapazitives oder rein resistives Verhalten auf? (3 Punkte)

Lösung:

(a) Die Spannungen $\underline{U}_L$ und $\underline{U}_1$ müssen 3 Bedingungen erfüllen:

- $|\underline{U}_L| = \sqrt{80} V = \sqrt{8^2 + 4^2} V$
- $\underline{U}_1 \perp \underline{U}_L$ und $\underline{U}_1$ verspätet bzgl. $\underline{U}_L$
- $\underline{U}_L + \underline{U}_1 = \underline{U}_0$

Es gibt nur eine mögliche Konfiguration, die diese drei Bedingungen erfüllt (siehe Zeigerdiagramm). Aus dem Zeigerdiagramm ergibt sich dann:

- $\underline{U}_L = (8 + j4) V$
- $\underline{U}_1 = (2 - j4) V$

(b) Mit bekannten $\underline{U}_L$, $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_B$ kann man zwei Maschengleichungen stellen.

- $\underline{U}_C = \underline{U}_1 - \underline{U}_B = (5 - j5) V$
- $\underline{U}_2 = \underline{U}_L + \underline{U}_B = (5 + j5) V$

(c) Die Ströme $\underline{I}_L$ und $\underline{I}_C$ müssen 3 Bedingungen erfüllen:

- $\underline{I}_L \parallel \underline{U}_1$ und $\underline{I}_L$ verspätet bzgl. $\underline{U}_L$
- $\underline{I}_C \parallel \underline{U}_2$ und $\underline{I}_C$ eilt $\underline{U}_C$ voraus
- $\underline{I}_L + \underline{I}_C = \underline{I}_0$

Es gibt nur eine mögliche Konfiguration, die diese drei Bedingungen erfüllt. Aus dem Zeigerdiagramm ergibt sich dann:

- $\underline{I}_L = (1 - j2) A$
- $\underline{I}_C = (4 + j4) A$

(d) Die Widerstände und Reaktanzen lassen sich mit Hilfe des Ohmschen Gesetz bestimmen:

Für die Spule gilt:

$$j\omega L = jX_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_L} = \frac{(8 + j4) V}{(1 - j2) A} = j4 \Omega \quad (6)$$

$$\Rightarrow X_L = 4 \Omega \quad (7)$$

Für den Kondensator gilt:

$$\frac{1}{j\omega C} = jX_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{I}_C} = \frac{(5 - j5) V}{(4 + j4) A} = -j1.25 \Omega \quad (8)$$

$$\Rightarrow X_C = -1.25 \Omega \quad (9)$$

Für die Widerstände R_1 und R_2 gilt:

$$R_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_L} = \frac{(2 - j4) V}{(1 - j2) A} = 2 \Omega \quad (10)$$

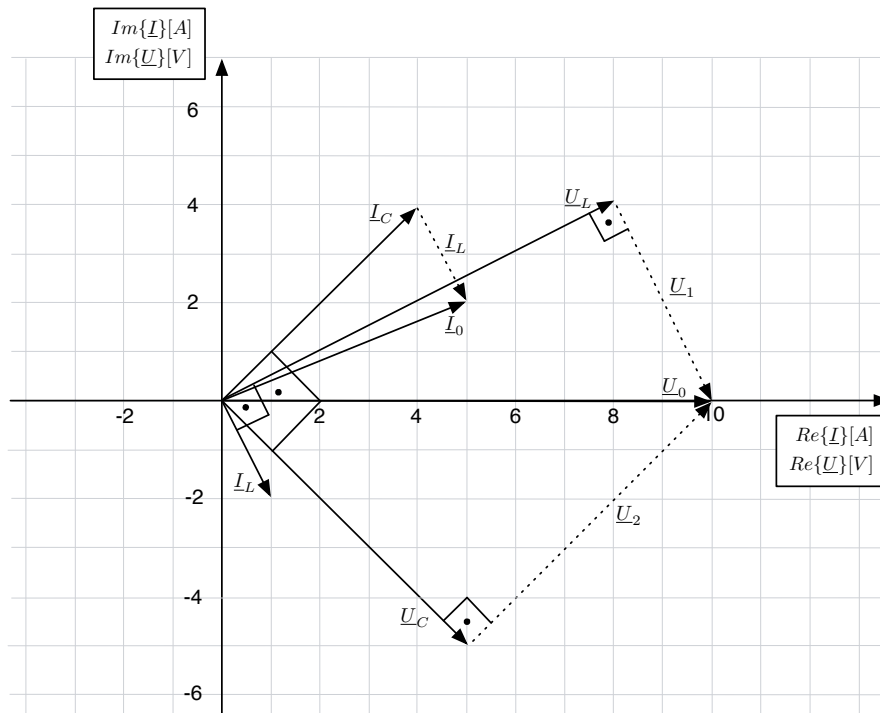
$$R_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_C} = \frac{(5 + j5) V}{(4 + j4) A} = 1.25 \Omega \quad (11)$$

(e) Für die von der Quelle abgegebene komplexe Leistung gilt:

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_0^* \quad (12)$$

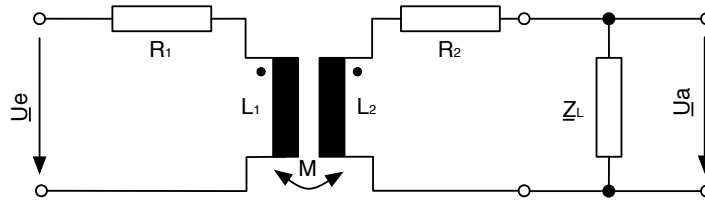
$$= (10) \cdot (5 - j2) \text{ VA} = (50 - j20) \text{ VA} \quad (13)$$

Da $Q = -20 \text{ VAR} < 0$ weist die Schaltung kapazitives Verhalten auf.



Aufgabe 6**(22 Punkte)****Bodediagramm****In dieser Aufgabe sind alle Teilaufgaben separat lösbar!**

Gegeben ist ein Transformator mit bekannter Last. Dieser soll auf seine Frequenzeigenschaften untersucht werden.



Als Hilfe werden die drei Grundgleichungen für Transformatoren gegeben:

$$\begin{aligned}\underline{U}_e &= (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ \underline{U}_a &= j\omega M \underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 \\ \underline{U}_a + \underline{Z}_L \cdot \underline{I}_2 &= 0\end{aligned}$$

- (a) Verwenden Sie die drei Grundgleichungen für Transformatoren um zu zeigen, (5 Punkte)
dass die Übertragungsfunktion der Schaltung

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{j\omega M \underline{Z}_L}{(R_1 + j\omega L_1)(\underline{Z}_L + R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}$$

ist.

- (b) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion auf eine solche Form (4 Punkte)

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{jA\Omega}{1 + jB\Omega + jC\Omega - \Omega^2} \quad (14)$$

normiert werden kann, wenn die Normierkreisfrequenz durch

$$\omega_n = \sqrt{\frac{R_1(R_L + R_2)}{L_1 L_2 - M^2}}$$

gegeben ist. Die komplexe Last soll an dieser Stelle durch einen realen Widerstand R_L ersetzt werden. Geben Sie die Terme A , B und C an und vereinfachen Sie wenn sinnvoll. Gehen Sie wie folgt vor:

- Multiplizieren Sie die Klammern im Nenner aus.
- Erweitern Sie anschließend die Funktion mit dem Inversen des von ω unabhängigen Terms (ganzer Term!).
- Führen Sie dann einen Koeffizientenvergleich durch, um die gefragten Terme abzulesen.
- Geben Sie die Terme in normierter Form explizit an.

In den folgenden Teilaufgaben soll ein allgemeines Filter mit der normierten Übertragungsfunktion aus (b) betrachtet werden.

- (c) Um welche Filterart handelt es sich, wenn die folgenden Werte (3 Punkte)

$$\begin{aligned}A &= 1 \\ B &= 10^2 \\ C &= 10^{-2}\end{aligned}$$

gelten wären? Begründen Sie ihre Antwort. Berücksichtigen Sie die Grenzwerte $\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right|$ und $\lim_{\Omega \rightarrow 0} \left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right|$ der normierten Übertragungsfunktion in Ihrer Antwort.

- (d) Welches Verhalten bezüglich $\left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right|$ zeigt das Filter bei $\omega = \omega_n$? (1 Punkt)
- (e) Zeigen Sie, dass sich Gleichung (14) mit den Werten aus (c) in dieser Form (9 Punkte)

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = 10^{-2} \cdot \frac{j10^2\Omega}{(1 + j10^2\Omega)(1 + j10^{-2}\Omega)}$$

schreiben lässt und zeichnen Sie das Bodediagramm dieser Übertragungsfunktion in Diagramm 6.1 und 6.2 ein.

Lösung:

- (a) Als Erstes kann die dritte Gleichung nach $\underline{I}_2$ umgestellt werden.

$$\underline{I}_2 = -\frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_L}$$

Als Nächstes kann $\underline{I}_2$ in den anderen beiden Gleichungen ersetzt werden.

$$\begin{aligned}\underline{U}_e &= (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 - j\omega M \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_L} \\ \underline{U}_a &= j\omega M \underline{I}_1 - (R_2 + j\omega L_2) \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}_L}\end{aligned}$$

Nun können wir eine der Gleichungen nach $\underline{I}_1$ umstellen.

$$\underline{I}_1 = \underline{U}_a \cdot \frac{1}{j\omega M \underline{Z}_L} (\underline{Z}_L + R_2 + j\omega L_2)$$

Jetzt kann $\underline{I}_1$ in der anderen der beiden Gleichungen ersetzt werden.

$$\underline{U}_e = \left[\frac{(R_1 + j\omega L_1)(\underline{Z}_L + R_2 + j\omega L_2)}{j\omega M \underline{Z}_L} - j\omega M \frac{1}{\underline{Z}_L} \right] \underline{U}_a$$

Die letzten Schritte sind,

$$\underline{U}_e = \left[\frac{(R_1 + j\omega L_1)(\underline{Z}_L + R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{j\omega M \underline{Z}_L} \right] \underline{U}_a$$

und schließlich

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{j\omega M \underline{Z}_L}{(R_1 + j\omega L_1)(\underline{Z}_L + R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}.$$

- (b) Um die Normierkreisfrequenz ableiten zu können, muss zunächst ausgeklammert werden.

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{j\omega M R_L}{(R_1 R_L + R_1 R_2) + j\omega R_1 L_2 + j\omega L_1 (R_L + R_2) - \omega^2 (L_1 L_2 - M^2)}$$

Jetzt teilen wir Zähler und Nenner durch den von ω unabhängigen Teil aus dem Nenner ($R_1 R_L + R_1 R_2$) bzw $R_1 (R_L + R_2)$.

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{j\omega \frac{M R_L}{R_1 (R_L + R_2)}}{1 + j\omega \frac{L_2}{R_L + R_2} + j\omega \frac{L_1}{R_1} - \omega^2 \frac{L_1 L_2 - M^2}{R_1 (R_L + R_2)}}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich mit einem Koeffizientenvergleich die Normierkreisfrequenz ω_n bestimmen,

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = \omega^2 \frac{L_1 L_2 - M^2}{R_1 (R_L + R_2)}$$

und somit ist

$$\omega_n = \sqrt{\frac{R_1(R_L + R_2)}{L_1 L_2 - M^2}}.$$

Nun ergeben sich die anderen gefragten Parameter zu:

$$\begin{aligned} A &= \frac{MR_L}{R_1 R_L + R_1 R_2} \cdot \sqrt{\frac{R_1 R_L + R_1 R_2}{L_1 L_2 - M^2}} \\ &= \frac{MR_L}{\sqrt{R_1(R_L + R_2)(L_1 L_2 - M^2)}} \end{aligned}$$

$$B \vee C = \frac{L_2 \sqrt{R_1}}{\sqrt{(R_L + R_2)(L_1 L_2 - M^2)}}$$

$$C \vee B = \frac{L_1 \sqrt{R_L + R_2}}{\sqrt{R_1(L_1 L_2 - M^2)}}$$

- (c) Es handelt sich hierbei um einen dämpfenden Bandpassfilter. Betrachtet man die Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right| &= \left| \frac{jA}{\frac{1}{\Omega} + jB + jC - \Omega} \right| = 0 \\ \lim_{\Omega \rightarrow 0} \left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right| &= \left| \frac{jA\Omega}{1 + jB\Omega + jC\Omega - \Omega^2} \right| = 0 \end{aligned}$$

So ist sofort erkennbar, dass es sich um einen Bandpassfilter handeln muss.

- (d) Bei $\omega = \omega_n$ ist $\Omega = 1$ Daher gilt:

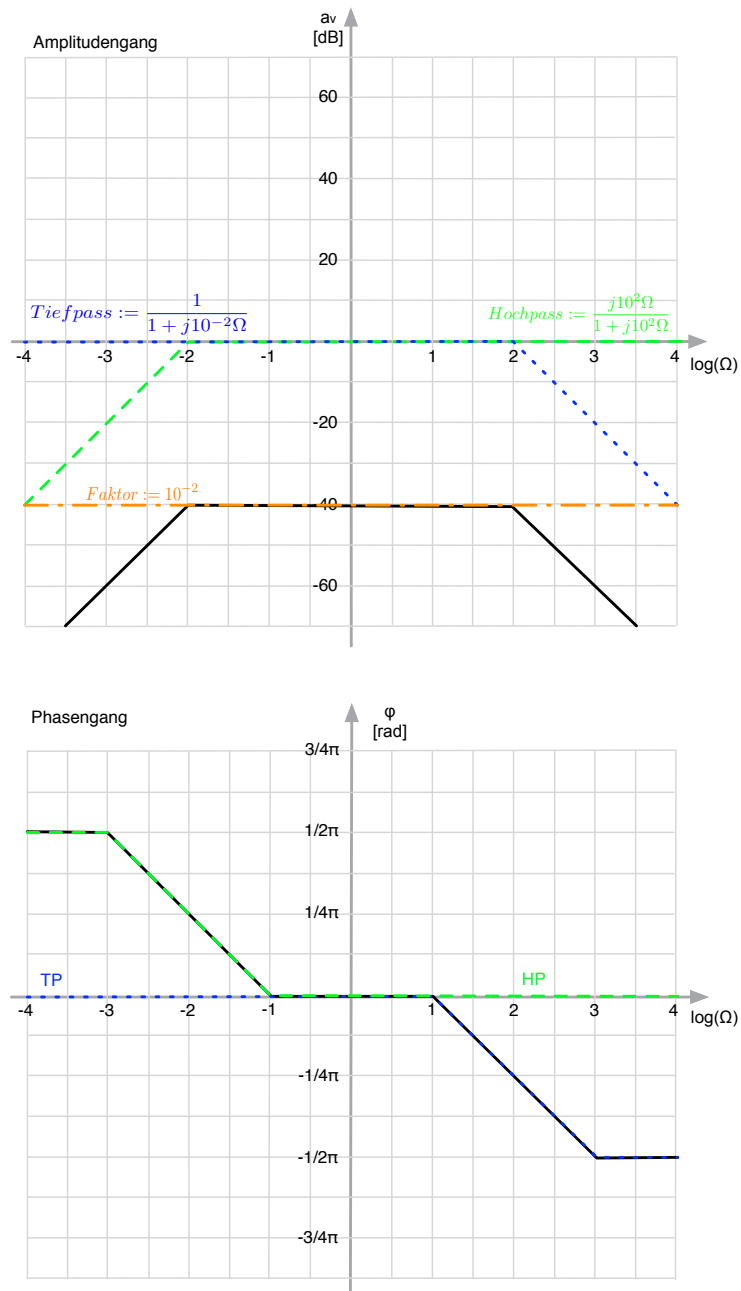
$$\left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right| = \frac{|j1 \cdot 1|}{|1 + j10^2 + j10^{-2} - 1^2|} \approx \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

Der Filter dämpft die Ausgangsspannung um 40 dB.

- (e) Für den Beweis können wir die Klammern in der gegebenen Funktion ausmultiplizieren:

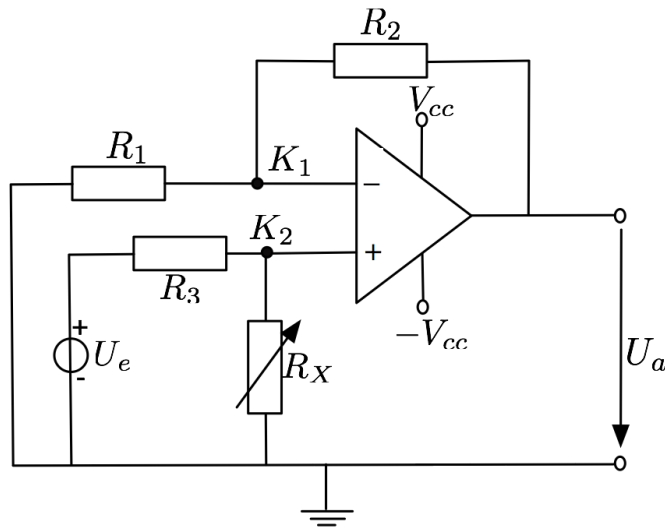
$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} &= 10^{-2} \cdot \frac{j10^2 \Omega}{(1 + j10^2 \Omega)(1 + j10^{-2} \Omega)} = \frac{j10^{(2-2)} \Omega}{1 + j10^2 \Omega + j10^{-2} \Omega - 10^{(2-2)} \Omega^2} \\ &= \frac{j1\Omega}{1 + j10^2 \Omega + j10^{-2} \Omega - \Omega^2} \end{aligned}$$

Die Zeichnungen lassen sich aus den bekannten Bodediagrammen von Tiefpass und Hochpass wie sie im LEN-Skript angegeben sind zusammensetzen.



Aufgabe 7**(15 Punkte)****Operationsverstärker**

Gegeben sei die folgende Operationsverstärker-Schaltung

**(a) Allgemeine Frage:****(3 Punkte)**

Skizzieren Sie in Ihr Lösungsblatt eine typische Kennlinie der Ausgangsspannung über der Differenzspannung eines realistischen Operationsverstärkers.

(b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Schaltung $\frac{U_a}{U_e}$. Gehen Sie wie folgt vor:**(5 Punkte)**

- Stellen Sie eine Knotengleichung für K1 und eine für K2 auf.
- Wie hängen U_{K1} und U_{K2} zusammen?
- Lösen Sie das Gleichungssystem und geben Sie die Übertragungsfunktion an. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

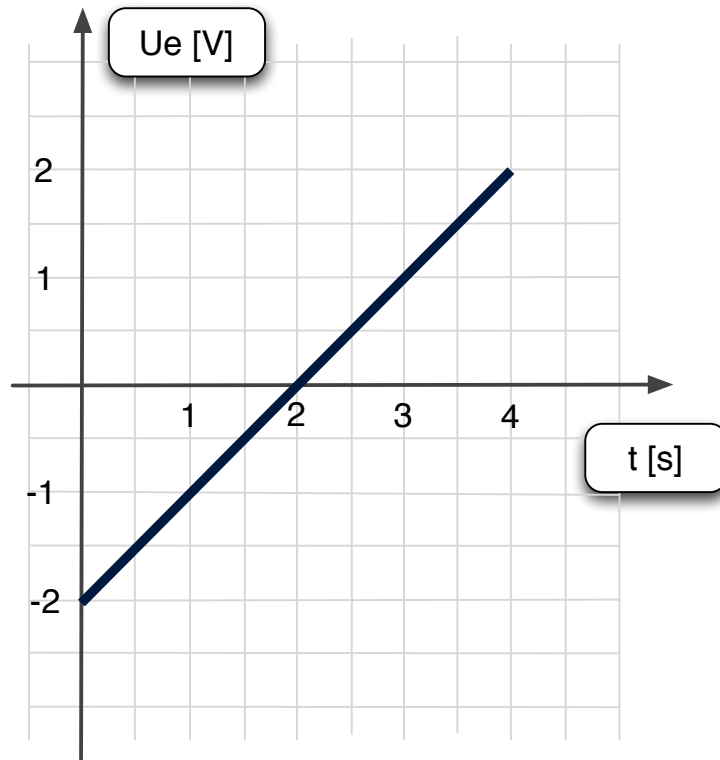
$$\frac{U_a}{U_e} = \left(\frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_3}{R_X}} \right)$$

(c) Nun sollen die folgenden konkreten Werte gelten:**(4 Punkte)**

$$\begin{aligned} R_1 &= 4.5 \, k\Omega \\ R_2 &= 63 \, k\Omega \\ R_3 &= 15 \, k\Omega \\ V_{cc} &= 5 \, V \\ U_e &= 400 \, mV \end{aligned}$$

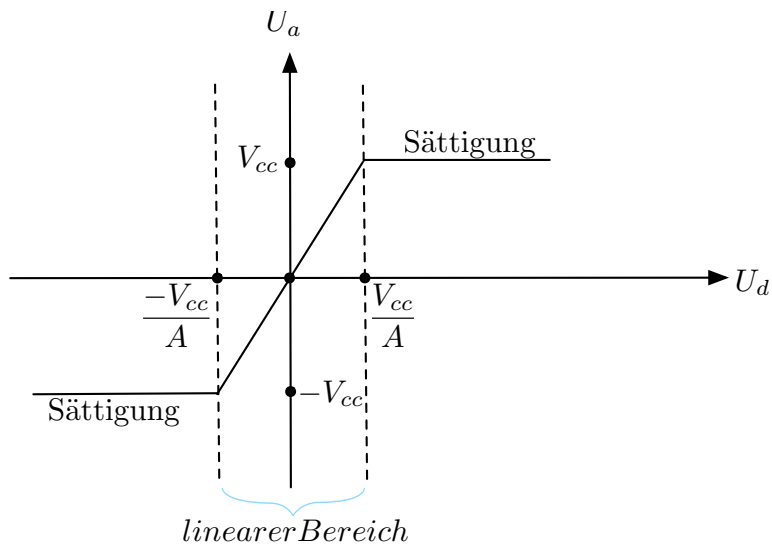
- Wie groß muss R_X gewählt werden, wenn die positive Sättigung gerade so am Ausgang erreicht werden soll. Rechnen Sie allgemein und setzen Sie am Ende ein.
- Kann mit den oben angegebenen Werten ein R_X gefunden werden, mit dem die negative Sättigung erreicht wird.

- (d) Nun soll sich die Eingangsspannung $U_e(t)$ im Laufe der Zeit ändern (siehe Abbildung). $R_X = 7.5\text{ k}\Omega$ soll eingestellt werden. Die restlichen Bauteile bleiben gleich (Teilaufgabe c). Zeichnen Sie die Ausgangsspannung $U_a(t)$ in das Diagramm 7.1 (3 Punkte)



Lösung:

- (a) Die typische Kennlinie eines Operationsverstärkers ist



- (b) 1. Für K_1 gilt:

$$\begin{aligned} \frac{-U_{K1}}{R_1} &= \frac{U_{K1} - U_a}{R_2} \\ U_{K1} &= \frac{U_a \cdot R_1}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

2. Für K_2 gilt:

$$\begin{aligned}\frac{U_e - U_{K2}}{R_3} &= \frac{U_{K2}}{R_X} \\ U_{K2} &= \frac{U_e \cdot R_X}{R_3 + R_X} \\ U_{K2} &= U_{K1} \text{ wegen negativer Gegenkopplung} \\ \frac{U_e R_X}{R_3 + R_X} &= \frac{U_a \cdot R_1}{R_1 + R_2} \\ \frac{U_a}{U_e} &= \left(\frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_3}{R_X}} \right)\end{aligned}$$

(c) •

$$\begin{aligned}R_1 &= 4.5 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 63 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= 15 \text{ k}\Omega \\ V_{cc} &= U_a = 5 \text{ V} \\ U_e &= 400 \text{ mV} \\ \frac{U_a}{U_e} &= \left(\frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{R_3}{R_X}} \right) \\ R_X &= \frac{R_3}{\frac{U_e}{U_a} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) - 1} \\ R_X &= 75 \text{ k}\Omega\end{aligned}$$

- Nein. Die negative Sättigung würde man nur mit einem negativen R_X erreichen.

$$\begin{aligned}\frac{-5}{0.4} &= \left(\frac{1 + \frac{63k}{4.5k}}{1 + \frac{15k}{R_X}} \right) \\ R_X &= \frac{-75}{11} \text{ k}\Omega\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\frac{U_a(t)}{U_e(t)} &= \frac{1 + \frac{63}{4.5}}{1 + \frac{15}{7.5}} = 5 \\ U_a(t) &= 5 \cdot U_e(t)\end{aligned}$$

