

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel

Übungsleiter: Dipl.-Ing. Gustavo Lenis

Klausur

28. September 2016

Beginn: 08:00 Uhr

Familienname:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

AUFKLEBER

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Die Klausur muss selbständig bearbeitet werden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein!
Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare!
Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	9	
2	13	
3	10	
4	11	
5	20	
6	19	
7	12	
Gesamt:	94	

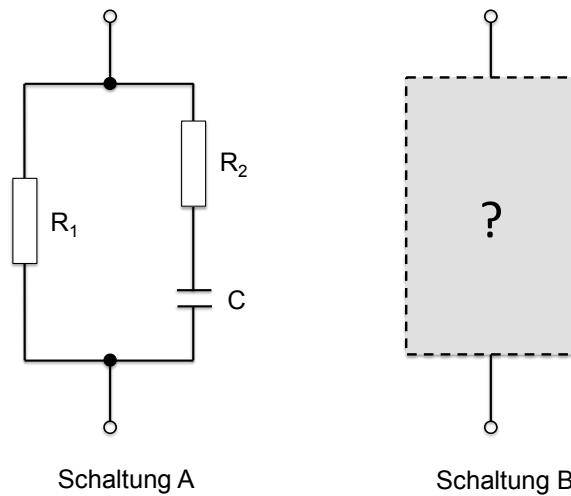
Note:_____

Aufgabe 1

Ortskurve

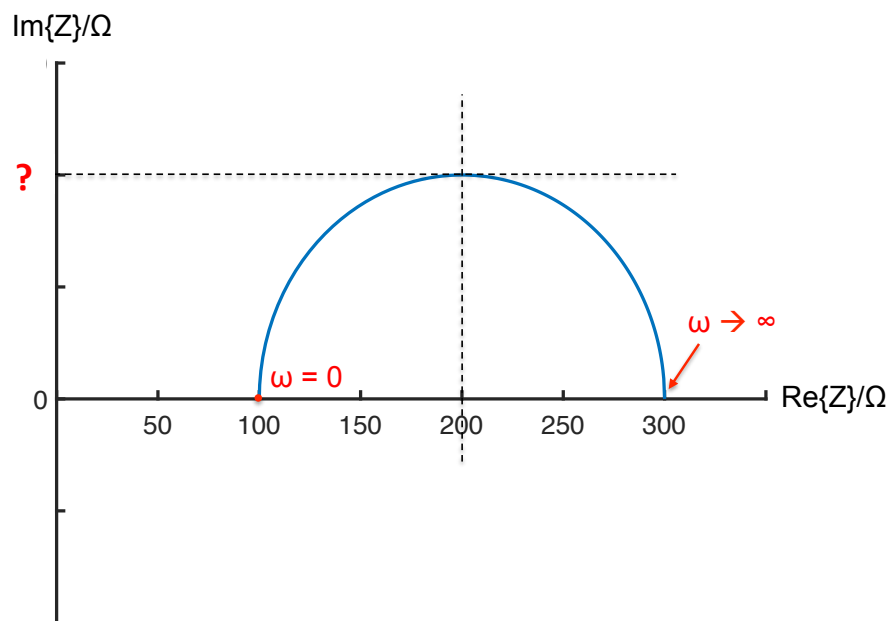
(9 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen zwei verschiedene Schaltungen betrachtet werden:



- (a) Skizzieren Sie zunächst die Ortskurve der Impedanz Z_A der Schaltung A in das Diagramm 1.1. Markieren Sie dabei die Punkte $\omega = 0$ und $\omega \rightarrow \infty$.
Hinweis: Beschriften Sie die x-Achse in Abhängigkeit der Parameter R_1 und R_2 . (4 Punkte)

Im Folgenden soll nun die unbekannte Schaltung B entworfen werden. Die Ortskurve der Schaltung B ist bekannt:

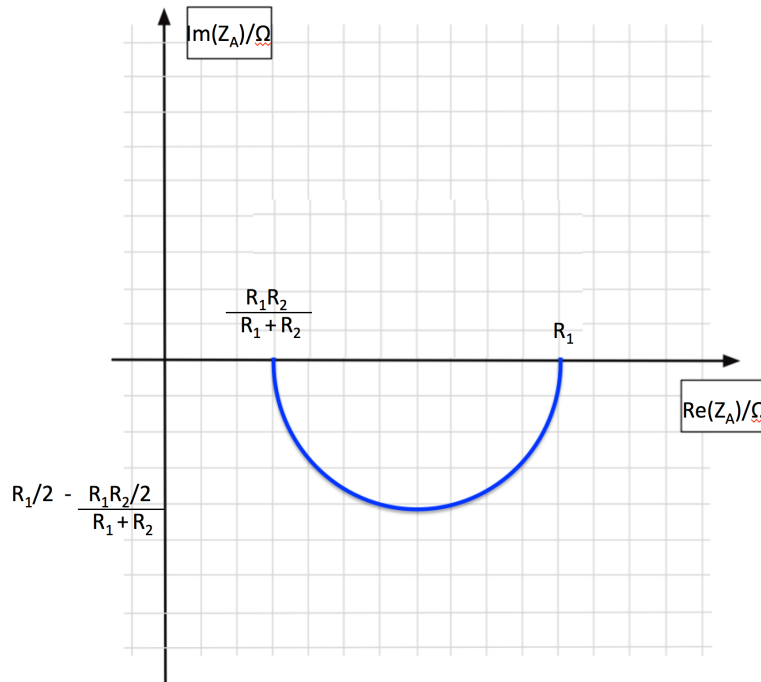


- (b) Entwerfen Sie die Schaltung B strukturell, die zu der gegebenen Ortskurve passt und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise!
Hinweis: Die Schaltung besteht aus zwei Widerständen und einem weiteren Bauteil. In diesem Aufgabenteil müssen die Werte dieser Bauteile noch nicht berechnet werden. (2 Punkte)

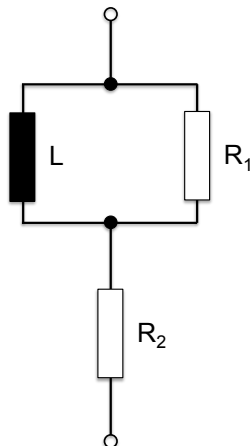
- (c) Bestimmen Sie die Werte der Widerstände! Erklären Sie Ihre Vorgehensweise zur Bestimmung der Werte! (2 Punkte)
- (d) Bestimmen Sie den Wert auf der imaginären Achse, welcher mit einem Fragezeichen gekennzeichnet ist. Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise! (1 Punkt)

Lösung:

- (a) Die Impedanzortskurve ergibt sich zu:



- (b) Die Ortskurve beschreibt einen Halbkreis. Daher muss es sich um eine Parallelschaltung aus einem Widerstand und entweder einer Kapazität oder einer Spule handeln. Da der Kreis in der positiven imaginären Halbebene liegt, muss es sich um eine Parallelschaltung mit einer Spule handeln. Der Halbkreis ist um $100\ \Omega$ auf der reellen Achse nach rechts verschoben. Daraus folgt, dass ein Widerstand in Reihe zu der Parallelschaltung aus Spule und Widerstand geschaltet ist. Man erhält die folgende Schaltung:



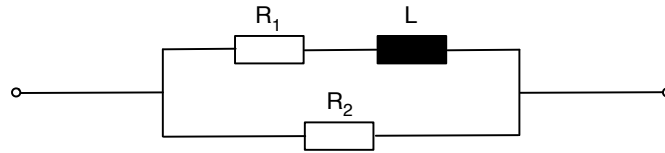
Schaltung B

Es existiert ebenfalls eine alternative Lösung. Siehe dazu unter c).

- (c) Der Halbkreis ist um $100\ \Omega$ auf der reellen Achse nach rechts verschoben. Daher ergibt sich: $R_2 = 100\ \Omega$. Des weiteren hat der Halbkreis einen Durchmesser von $200\ \Omega$. Der Durchmesser wird durch den parallel zur Spule geschalteten Widerstand definiert, es folgt daher: $R_1 = 200\ \Omega$.

Alternative Lösung:

Alternativ ist auch folgende Schaltung möglich:



Die Übertragungsfunktion dieser Schaltung ergibt sich zu:

$$Z(\omega) = \frac{R_2 \cdot (R_1 + j\omega L) \cdot ((R_1 + R_2) - j\omega L)}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2}$$

Für $\omega = 0$ muss gelten:

$$Z(\omega = 0) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \stackrel{!}{=} 100\ \Omega$$

und für $\omega \rightarrow \infty$:

$$Z(\omega \rightarrow \infty) = R_1 \stackrel{!}{=} 300\ \Omega$$

Aus beiden Gleichungen folgt letztendlich $R_2 = 150\ \Omega$.

- (d) Die Impedanz beschreibt wie erwähnt einen Halbkreis. Da es sich bei dem gesuchten Wert um den maximalen imaginären Wert handelt, muss der gesuchte Wert gerade der Radius des Kreises sein: $? = \frac{R_1}{2} = 100\ \Omega$. (Für die alternative Lösung ergibt sich mit der gleichen Begründung:

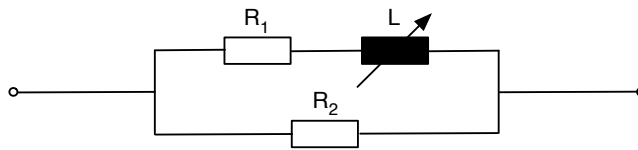
$$\begin{aligned} ? &= \frac{R_1 - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{2} \\ &= \frac{0.5 R_1^2}{R_1 + R_2} \\ &= 100\ \Omega \end{aligned}$$

)

Aufgabe 2
Ortskurve

(13 Punkte)

Gegeben ist folgende Schaltung:



Die Widerstände R_1 und R_2 sind bekannt: $R_1 = 150 \Omega$ und $R_2 = 100 \Omega$. Die Induktivität L soll variiert werden. Die Schaltung wird bei einer Frequenz von $\omega = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz}$ betrieben.

- Stellen Sie die Impedanz $Z(\omega, R_1, R_2, L)$ der Schaltung in Abhängigkeit der Bauteile auf und geben Sie den Real- und Imaginärteil getrennt an. (3 Punkte)
- Bestimmen Sie die Induktivität L_{max} , die den Imaginärteil der Impedanz $Z(L)$ maximiert. Berechnen Sie die Impedanz $Z(L_{max})$ für diese Induktivität. (6 Punkte)
- Vervollständigen Sie Tabelle 2.1 mit den fehlenden Impedanzen $Z(L)$ und zeichnen Sie alle Impedanzen aus der Tabelle 2.1 in das Diagramm 2.1 ein. Skizzieren Sie in dasselbe Diagramm die Impedanzortskurve in Abhängigkeit der Induktivität L . Beschriften Sie die Ortskurve mit $L = 0$ und $L \rightarrow \infty$. Achten Sie auch darauf die Achsen zu beschriften. (4 Punkte)

Lösung:

- (a) Ausgangspunkt der Berechnung ist die folgende Parallelschaltung:

$$Z(L) = (R_1 + j\omega L) \parallel R_2 \quad (1)$$

$$= \frac{(R_1 + j\omega L) \cdot R_2}{R_1 + R_2 + j\omega L} \quad (2)$$

Um die Gleichung nach Real- und Imaginärteil zu trennen, muss mit $\frac{(R_1 + R_2) - j\omega L}{(R_1 + R_2) - j\omega L}$ komplex konjugiert erweitert werden. Man erhält:

$$Z(L) = \frac{R_2 \cdot (R_1 + j\omega L) \cdot ((R_1 + R_2) - j\omega L)}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2} \quad (3)$$

Multipliziert man diese Gleichung aus, so erhält man den Real- und Imaginärteil zu:

$$\text{Re}\{Z(L)\} = R_2 \cdot \frac{R_1(R_2 + R_1) + \omega^2 L^2}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2} \quad (4)$$

$$\text{Im}\{Z(L)\} = \frac{\omega R_2^2 L}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2} \quad (5)$$

- (b) Die Induktivität L_{max} soll den Imaginärteil der Impedanz $Z(L)$ maximieren. Das bedeutet die Ableitung der Impedanz $Z(L)$ nach L ergibt 0 an der Stelle L_{max} : $\text{Im}\{Z(L_{max})\} = 0$. Mit der Quotientenregel erhält man die Ableitung des Imaginärteils:

$$\frac{d\text{Im}\{Z(L)\}}{dL} = R_2^2 \cdot \frac{\omega((R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2) - 2\omega^3 L^2}{((R_1 + R_2)^2 + \omega^2 L^2)^2} = 0 \quad (6)$$

Man erhält schlussendlich die Gleichung:

$$(R_1 + R_2)^2 - \omega^2 L_{max}^2 = 0 \quad (7)$$

Daraus folgt direkt:

$$L_{max} = \frac{R_1 + R_2}{\omega} \quad (8)$$

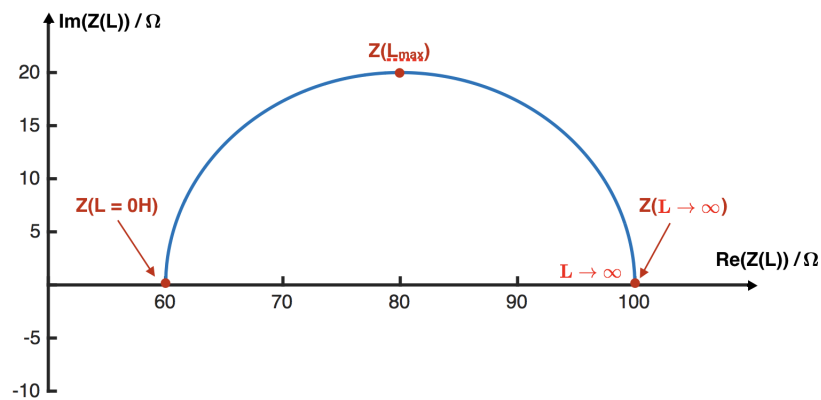
Durch Einsetzen der Werte erhält man: $L_{max} = 0.796 \text{ H} \approx 0.8 \text{ H}$. Die Impedanz für diese Induktivität berechnet sich zu:

$$Z(L_{max}) = 80 \Omega + j20 \Omega.$$

(c) Die Daten in der Tabelle sind wie folgt:

	$\text{Re}\{Z(L)\} / \Omega$	$\text{Im}\{Z(L)\} / \Omega$
$Z(L = 0)$	60	0
$Z(L_{max})$	80	20
$Z(L \rightarrow \infty)$	100	0

Die Ortskurve muss durch die Punkte in der Tabelle gehen und stellt einen Halbkreis dar, da die Impedanz $R_1 + j\omega L$ als Funktion von L_1 eine Gerade parallel zur imaginären Achse ist. Sie ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



Aufgabe 3

Netzwerk

(10 Punkte)

Allgemeiner Hinweis: Runden Sie wenn nötig auf vier Nachkommastellen. Alle Teilaufgaben sind unabhängig lösbar. Dennoch können (Teil-)ergebnisse aus den vorherigen Teilaufgaben hilfreich sein.

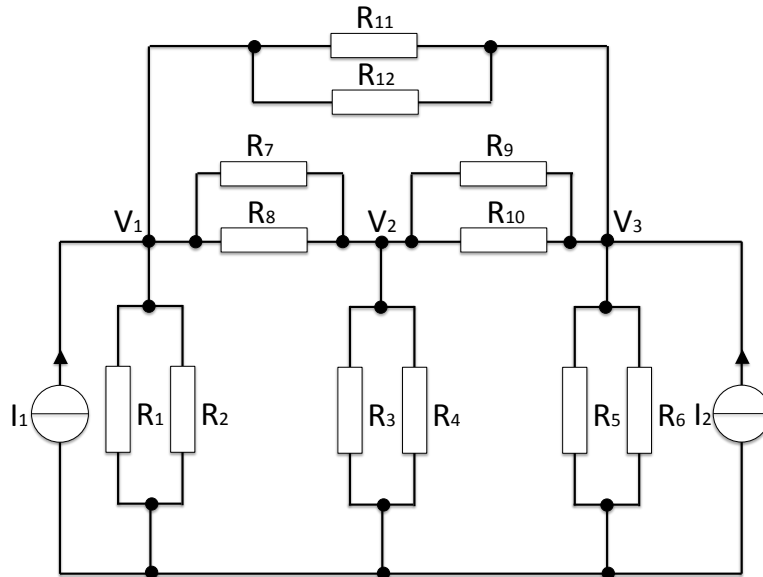


Abbildung 3.1

- (a) Nennen Sie die Kirchhoffschen Gleichungen! (2 Punkte)
- (b) Die in Abbildung 3.1 dargestellte Schaltung enthält 12 Widerstände, jeweils mit dem Wert $1\ \Omega$. Die Quellströme haben die Werte $I_1=6\text{ A}$ und $I_2=10\text{ A}$. (8 Punkte)
- Bestimmen Sie mit dem formalisierten Knotenpunktpotentialverfahren das Gleichungssystem für die Potentiale V_1 , V_2 und V_3 . Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Hinweis: Beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise und geben Sie die Zwischenschritte Ihrer Berechnung an.

Lösung:

- (a) 1. Die Summe aller Ströme, die auf einen Knoten zulaufen, müssen Null sein. (2 Punkte)
2. Die Summe aller Spannungen in einer Masche muss Null sein.

- (b) Formalisierte Knotenpunktpotentialverfahren:

$$\begin{aligned}
 Ga1 &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} \\
 Ga2 &= \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} + \frac{1}{R_9} + \frac{1}{R_{10}} \\
 Ga3 &= \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_9} + \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_{12}} \\
 Gb &= \frac{-1}{R_7} + \frac{-1}{R_8} \\
 Gc &= \frac{-1}{R_{11}} + \frac{-1}{R_{12}} \\
 Gd &= \frac{-1}{R_9} + \frac{-1}{R_{10}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} Ga1 & Gb & Gc \\ Gb & Ga2 & Gd \\ Gc & Gd & Ga3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \text{ S} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ A.}$$

Mit der Cramerschen Regel können die Spannungen berechnet werden. Dazu muss die Determinante einer 3x3 Matrix bestimmt werden. Es gilt für eine allgemeine 3x3 Matrix $\underline{A}$:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= + a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23}) \\ &\quad - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23}) \\ &\quad + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22}) \end{aligned}$$

Diese Formel zur Determinatenberechnung wird zum Lösen des LGS mit Hilfe der Cramerschen Regel verwendet:

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 0 & 6 & -2 \\ 10 & -2 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix}} V = \frac{352}{128} V = \frac{11}{4} V,$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 10 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix}} V = \frac{256}{128} V = 2V,$$

$$V_3 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix}} V = \frac{416}{128} V = \frac{13}{4} V$$

Die Lösungen lauten $V_1 = \frac{11}{4} V$, $V_2 = 2V$ und $V_3 = \frac{13}{4} V$.

Aufgabe 4
Netzwerk

(11 Punkte)

- (a) Skizzieren Sie die Strom-Spannungs-Kennlinie einer idealen und einer realen linearen Spannungsquelle. Beschriften Sie die Achsen! (2 Punkte)

Nun sei folgende Schaltung gegeben:

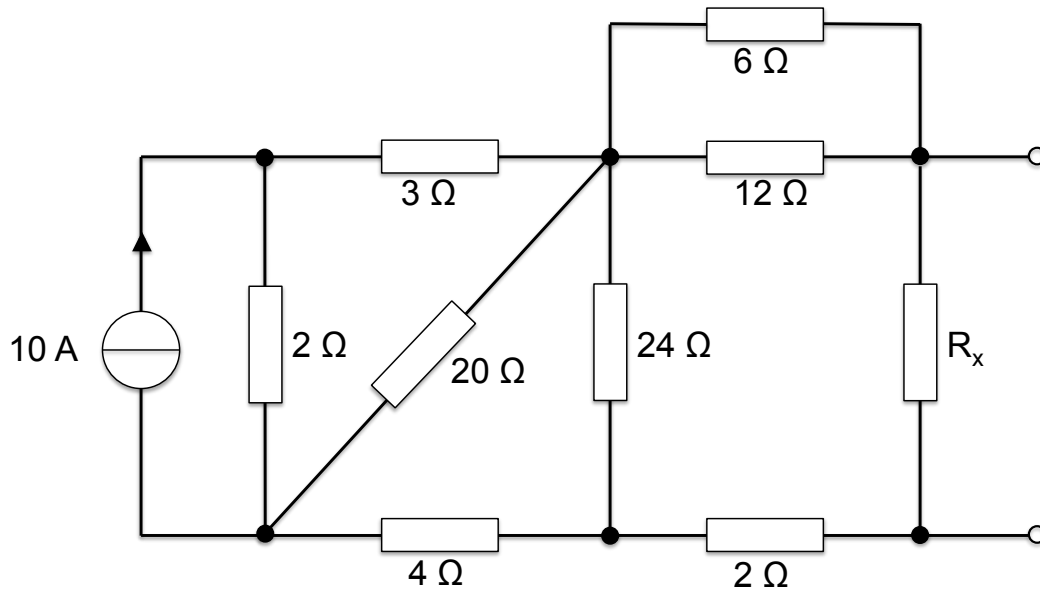
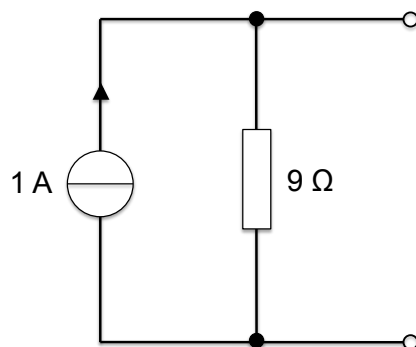


Abbildung 4.1

Für diese Schaltung ist das Ersatzschaltbild nach Norton gesucht. Die Widerstandswerte sind in Abbildung 4.1 abzulesen. Der Widerstand R_x muss bestimmt werden.

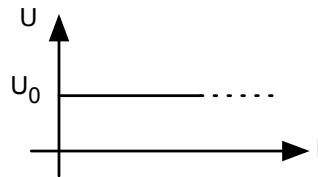
- (b) Wie groß muss der Widerstand R_x gewählt werden, sodass für das Norton Ersatzschaltbild folgendes gilt: (9 Punkte)



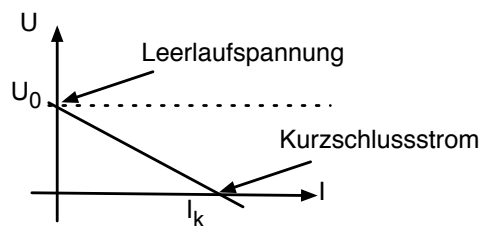
Vereinfachen Sie die Schaltung durch schrittweises Umformen. Fangen Sie mit der Umwandlung der Stromquelle 10 A in eine Spannungsquelle an. Auch im Weiteren ist die Umformung von Spannungs- in Stromquellen und andersherum zu empfehlen. *Hiweis: Die Umformung muss nachvollziehbar sein, zeichnen Sie daher zu jedem Umformungsschritt ein Ersatzschaltbild.*

Lösung:

- (a) Die Spannung einer idealen Spannungsquelle ist unabhängig von der Beschaltung der Quelle! Daher ist die Strom-Spannungs-Kennlinie eine waagrechte Gerade parallel zu Stromachse!

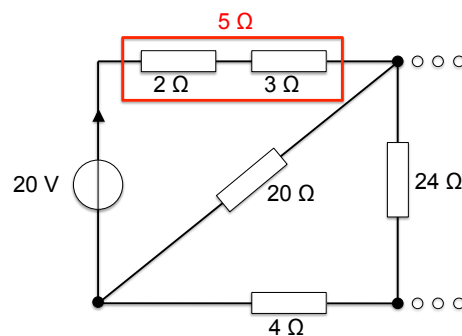


Eine reale Spannungsquelle ist abhängig von ihrer Beschaltung und damit vom fließenden Strom. Die Beschreibung einer realen Stromquelle kann daher durch eine ideale Quelle in Serie mit einem Innenwiderstand modelliert werden. Die Kennlinie ergibt sich dann zu:

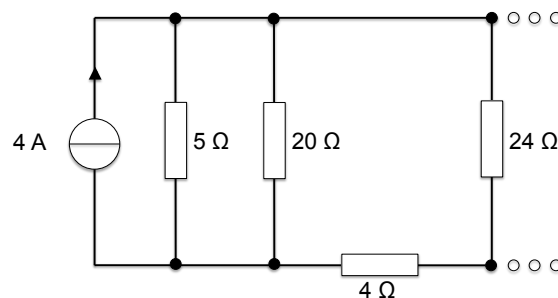


Die Steigung der Geraden entspricht dabei dem Innenwiderstand der realen Quelle!

- (b) Wandeln sie zunächst die Stromquelle in eine Spannungsquelle um. Die Spannung ergibt sich zu $U_{Quelle} = 2\Omega \cdot 10A$. Fassen sie anschließend die beiden seriellen Widerstände im selben Strang zusammen.

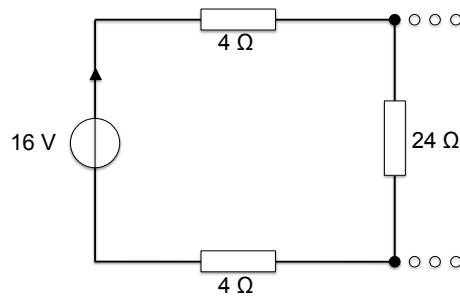


Wandeln Sie die Spannungsquelle wieder in eine Stromquelle um.

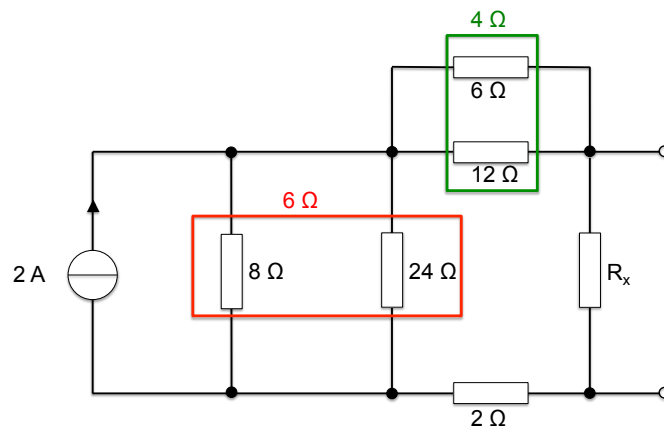


Anschließend können Sie die parallelen Widerstände mit 5Ω und 20Ω zusammenfassen und die Stromquelle wieder in eine Spannungsquelle umrechnen:

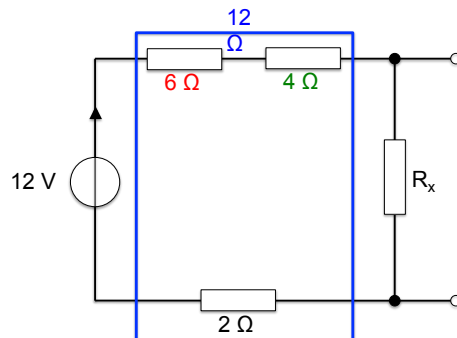
$$4A \cdot \frac{5\Omega \cdot 20\Omega}{5\Omega + 20\Omega} = 4A \cdot 5\Omega = 16V \quad (9)$$



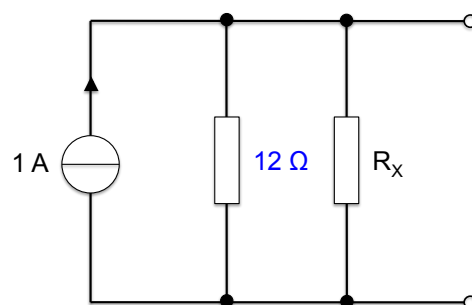
Wandeln Sie die Spannungsquelle erneut in eine Stromquelle um. Sie können anschließend die parallelen Widerstände 8Ω und 24Ω sowie 12Ω und 6Ω zusammenfassen.



Durch eine Umformung der Stromquelle in eine Spannungsquelle erhalten Sie folgende Schaltung:



Im letzten Umformungsschritt können Sie die drei seriellen Widerstände 6Ω , 4Ω und 2Ω zu einem Widerstand zusammenfassen und die Spannungsquelle in eine Stromquelle umrechnen:



Es ergibt sich eine Parallelschaltung aus zwei Widerständen, die zusammen einen Widerstand von $9\,\Omega$ ergeben sollen:

$$\frac{12\,\Omega \cdot R_X}{12\,\Omega + R_X} \stackrel{!}{=} 9\,\Omega \quad (10)$$

Daraus folgt:

$$12\,\Omega \cdot R_X = 108\,\Omega^2 + 9\,\Omega \cdot R_X$$

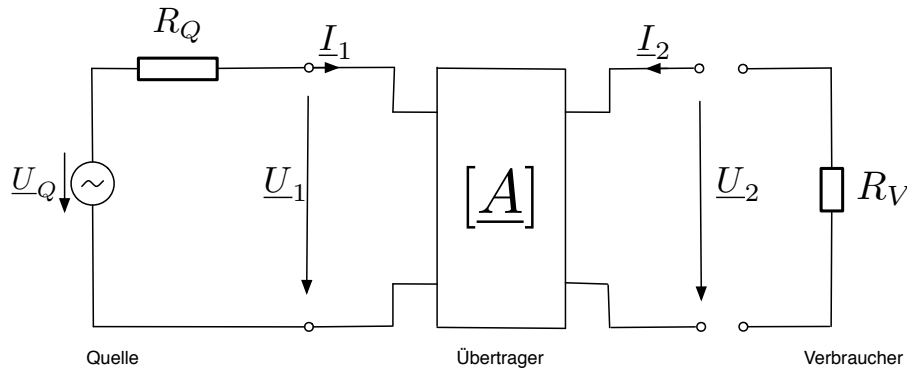
$$3\,\Omega \cdot R_X = 108\,\Omega^2$$

$$R_X = 36\,\Omega$$

Aufgabe 5**(20 Punkte)****Wechselstromlehre**

Eine realistische Wechselspannungsquelle $\underline{U}_Q$ mit Innenwiderstand R_Q soll möglichst viel Leistung an einen Verbraucherwiderstand R_V übertragen. Allerdings liegt keine Leistungsanpassung vor. Deswegen muss zwischen Quelle und Verbraucher ein Übertrager mit Kettenmatrix $[\underline{A}]$ verwendet werden.

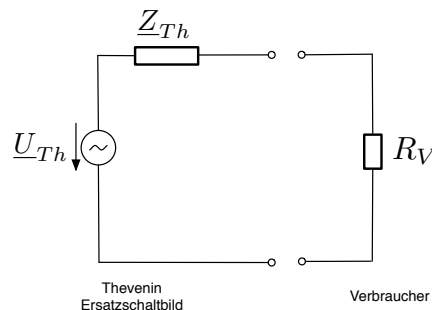
Zur klaren Beschreibung des elektrischen Systems entwerfen Sie den folgenden Schaltplan:



Für die Kettenmatrix $[\underline{A}]$ gilt:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

Um das System aus Quelle **und** Übertrager einfacher zu beschreiben, soll ihr Thevenin-Ersatzschaltbild verwendet werden.



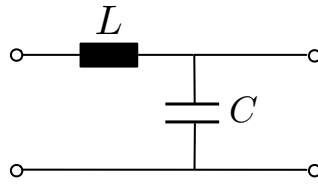
- (a) Bestimmen Sie die Leerlaufspannung $\underline{U}_{Th}$ des Ersatzschaltbildes in Abhängigkeit der Parameter der Kettenmatrix, der ursprünglichen Spannungsquelle $\underline{U}_Q$ und dem Innenwiderstand R_Q . Zeigen Sie, dass für die Leerlaufspannung Folgendes gilt: (4 Punkte)

$$\underline{U}_{Th} = \frac{1}{a_{11} + a_{21} \cdot R_Q} \cdot \underline{U}_Q$$

- (b) Bestimmen Sie den Kurzschlussstrom $\underline{I}_K$ des Ersatzschaltbildes in Abhängigkeit von den Parametern der Kettenmatrix, der Spannungsquelle $\underline{U}_Q$ und dem Innenwiderstand R_Q . Zeigen Sie, dass für den Kurzschlussstrom Folgendes gilt: (4 Punkte)

$$\underline{I}_K = \frac{1}{a_{12} + a_{22} \cdot R_Q} \cdot \underline{U}_Q$$

- (c) Bestimmen Sie die Ersatzimpedanz $\underline{Z}_{Th}$ des Ersatzschaltbildes in Abhängigkeit von den Parametern der Kettenmatrix und dem Innenwiderstand R_Q . (1 Punkt)
- (d) Als Übertrager wird die folgende Schaltung gewählt: (6 Punkte)



Bestimmen Sie vier Parameter der Kettenmatrix $[A]$ des Übertragers. Geben Sie auch die zwei Ersatzschaltbilder an, die für die Bestimmung der Parameter notwendig sind.

- (e) Nun sollen die folgenden konkreten Werte gelten: (2 Punkte)
- $\omega C = 100 \text{ mS}$
 - $\omega L = 2 \Omega$
 - $R_Q = 4 \Omega$
 - $\underline{U}_Q = 12 \text{ V}$ (Effektivwert)

Zeigen Sie, dass der Übertrager für die Anpassung an einen Verbraucherwiderstand von $R_V = 5 \Omega$ dimensioniert wurde.

- (f) Bestimmen Sie die von der ursprünglichen Quelle $\underline{U}_Q$ abgegebene komplexe Leistung $\underline{S}_Q$ und die für den Übertrager notwendige Blindleistung. Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)

Lösung:

- (a) Bei der Leerlaufspannung gilt: $\underline{U}_2 = \underline{U}_{Th}$ und $\underline{I}_2 = 0$
Somit gilt dann für den Übertrager:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{U}_{Th} \cdot \underline{a}_{11} \\ \underline{I}_1 &= \underline{U}_{Th} \cdot \underline{a}_{21}\end{aligned}$$

und für die Quelle:

$$\underline{U}_Q = \underline{I}_1 \cdot R_Q + \underline{U}_1$$

Einsetzen der ersten zwei Gleichungen in die dritte liefert:

$$\underline{U}_Q = \underline{U}_{Th} \cdot \underline{a}_{21} \cdot R_Q + \underline{U}_{Th} \cdot \underline{a}_{11}$$

Auflösen für $\underline{U}_{Th}$ liefert dann

$$\underline{U}_{Th} = \frac{1}{\underline{a}_{11} + \underline{a}_{21} \cdot R_Q} \cdot \underline{U}_Q$$

- (b) Bei dem Kurzschlussstrom gilt: $\underline{U}_2 = 0$ und $\underline{I}_2 = -\underline{I}_K$

Somit gilt dann für den Übertrager:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{I}_K \cdot \underline{a}_{12} \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_K \cdot \underline{a}_{22}\end{aligned}$$

und für die Quelle:

$$\underline{U}_Q = \underline{I}_1 \cdot R_Q + \underline{U}_1$$

Einsetzen der ersten zwei Gleichungen in die dritte liefert:

$$\underline{U}_Q = \underline{I}_K \cdot \underline{a}_{12} \cdot R_Q + \underline{I}_K \cdot \underline{a}_{12}$$

Auflösen für $\underline{I}_K$ liefert dann

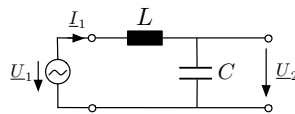
$$\underline{I}_K = \frac{1}{\underline{a}_{12} + \underline{a}_{22} \cdot R_Q} \cdot \underline{U}_Q$$

- (c) Die Ersatzimpedanz $\underline{Z}_{Th}$ ist dann der Quotient aus Leerlaufspannung $\underline{U}_{Th}$ und Kurzschlussstrom $\underline{I}_K$:

$$\underline{Z}_{Th} = \frac{\underline{U}_{Th}}{\underline{I}_K} = \frac{\underline{a}_{12} + \underline{a}_{22} \cdot R_Q}{\underline{a}_{11} + \underline{a}_{21} \cdot R_Q}$$

- (d) Die vier Parameter der Kettenmatrix lassen sich bestimmen, indem zwei konkrete Fälle untersucht werden.

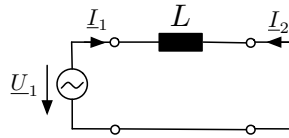
Im ersten Fall gilt $\underline{I}_2 = 0$ und das dazu korrespondierende Ersatzschaltbild ist dann:



Die Parameter $\underline{a}_{11}$ und $\underline{a}_{21}$ können dann bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\underline{a}_{11} &= \left. \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_2=0} \\ &= \frac{\underline{I}_1 \cdot (j\omega L + \frac{1}{j\omega C})}{\underline{I}_1 \frac{1}{j\omega C}} = 1 - \omega^2 LC \\ \underline{a}_{21} &= \left. \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right|_{\underline{I}_2=0} \\ &= \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_1 \frac{1}{j\omega C}} = j\omega C\end{aligned}$$

Im zweiten Fall gilt $\underline{U}_2 = 0$ und das dazu korrespondierende Ersatzschaltbild ist dann:



Die Parameter $\underline{a}_{12}$ und $\underline{a}_{22}$ können dann bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\underline{a}_{12} &= \left. \frac{\underline{U}_1}{-\underline{I}_2} \right|_{\underline{U}_2=0} \\ &= \frac{\underline{I}_1 \cdot j\omega L}{\underline{I}_1} = j\omega L \\ \underline{a}_{22} &= \left. \frac{\underline{I}_1}{-\underline{I}_2} \right|_{\underline{U}_2=0} \\ &= \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_1} = 1\end{aligned}$$

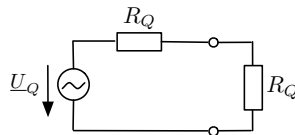
Somit gilt für die Kettenmatrix:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 1 - \omega^2 LC & j\omega L \\ j\omega C & 1 \end{bmatrix}$$

(e) Im Falle der Leistungsanpassung gilt $R_V = \underline{Z}_{Th}^*$. Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}R_V &= \underline{Z}_{Th}^* \\ &= \left(\frac{\underline{a}_{12} + \underline{a}_{22} \cdot R_Q}{\underline{a}_{11} + \underline{a}_{21} \cdot R_Q} \right) \\ &= \left(\frac{j\omega L + R_Q}{1 - \omega^2 LC + j\omega C \cdot R_Q} \right) \\ &= \left(\frac{j2\Omega + 4\Omega}{1 - (100\text{ mS}) \cdot (2\Omega) + j(100\text{ mS}) \cdot 4\Omega} \right) \\ &= 5\Omega\end{aligned}$$

(f) Wenn die Leistungsanpassung vorliegt, so kann auch das System aus Verbraucher und Übertrager durch den Innenwiderstand der Quelle R_Q folgendermaßen ersetzt werden:



Somit gilt für die von der Quelle abgegebene komplexe Leistung:

$$\underline{S}_Q = \frac{|\underline{U}_Q|^2}{2R_Q} = 18\text{ W}$$

Die Quelle gibt reine Wirkleistung ab und der Innenwiderstand der Quelle nimmt reine Wirkleistung auf. Genauso wird an den Verbraucher reine Wirkleistung übertragen. Dadurch setzt der Übertrager insgesamt

keine Blindleistung um. Blindleistung im Kondensator und in der Spule kompensieren sich gegenseitig.

$$Q_{ges} = Q_L + Q_C = 0$$

Aufgabe 6**(19 Punkte)****Bodediagramm und Operationsverstärker**

Für den Tieftöner einer kostengünstigen Stereoanlage sollen Sie ein Tiefpassfilter entwerfen. Es soll durch einen aktiven Tiefpass und einen passiven Tiefpass realisiert werden. Die gesamte Filterschaltung soll dabei Basstöne bis zu einer Frequenz von 100 Hz um den Faktor 10 verstärken. Überhalb von 100 Hz soll die Verstärkung mit -20 dB pro Dekade abfallen. Zusätzlich sollen die sogenannten Superhochtöne ab 10 kHz besonders gedämpft werden. Oberhalb von 10 kHz soll aus diesem Grund die Amplitude des Signals mit -40 dB pro Dekade abfallen. Im folgenden Datenblatt finden Sie eine Übersicht mit allen wichtigen technischen Informationen:

Parameter	Wert
Knickfrequenz des aktiven Filters f_a	100 Hz
Knickfrequenz des passiven Filters f_p	10 kHz
Verstärkung im Durchlassbereich V	10
Dämpfung zwischen f_a und f_p	-20 dB/Dekade
Dämpfung oberhalb von f_p	-40 dB/Dekade

Ihre Aufgabe besteht darin, die Schaltung zu entwerfen. Sie haben dazu insgesamt 2 Widerstände R_{a1} und R_{a2} und 1 Kondensator C_a für den aktiven Tiefpass zur Verfügung. Zusätzlich haben Sie 1 Widerstand R_p und 1 Kondensator C_p für den passiven Tiefpass zur Verfügung. Die Kondensatoren sind vorgegeben und haben folgende Werte:

- Kapazität des aktiven Tiefpass: $C_a = \frac{5}{\pi} \mu\text{F}$
- Kapazität des passiven Tiefpass: $C_p = \frac{25}{\pi} \mu\text{F}$

Es soll im Folgenden die Schaltung entwickelt und die Widerstände dimensioniert werden.

- Der aktive Tiefpass beinhaltet einen idealen Operationsverstärker. Nennen Sie zwei goldene Regeln, die für einen idealen Operationsverstärker gelten. (2 Punkte)
- Wie sieht die gesamte Filterschaltung aus? Zeichnen Sie hierfür zunächst die gesamte Filterschaltung bestehend aus dem aktiven gefolgt von einem passiven Tiefpassfilter.
Hinweis: Gehen Sie dabei davon aus, dass der passive Tiefpass den aktiven Tiefpass nicht belastet. (3 Punkte)
- Zeichnen Sie den zugehörigen Amplitudengang der Filterschaltung in das Diagramm 6.1 ein. Normieren Sie hierfür die Frequenzen auf $\omega_n = 2\pi \cdot 1 \text{ kHz}$. Die Y-Achse des Bodediagramms soll die Einheit dB besitzen! (3 Punkte)
- Leiten Sie die Übertragungsfunktion der gesamten Filterschaltung her. Leiten Sie dafür zunächst die Übertragungsfunktionen des aktiven und passiven Tiefpass getrennt her. Zeigen Sie anschließend, dass die Übertragungsfunktion auf die folgende Form gebracht werden kann: (5 Punkte)

$$\frac{U_2}{U_1}(\omega) = K \cdot \frac{1}{1 + jA\omega} \cdot \frac{1}{1 + jB\omega}$$

Bestimmen Sie die Variablen K, A und B in Abhängigkeit der Widerstände und Kondensatoren.

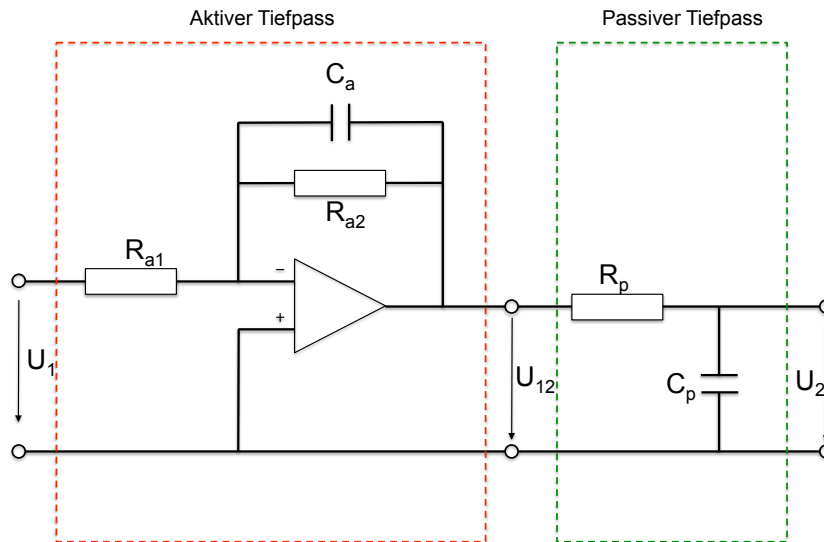
- (e) Berechnen Sie die Werte der Widerstände R_{a1} , R_{a2} und R_p , sodass die Filterschaltung die Kenndaten aus dem Datenblatt besitzt. (3 Punkte)
- (f) Zu allerletzt soll nun ebenfalls das Phasendiagramm gezeichnet werden. Verwenden Sie hierfür ebenfalls die Normierungsfrequenz $\omega_n = 2\pi \cdot 1 \text{ kHz}$. Zeichnen Sie das Phasendiagramm in das Diagramm 6.2 ein. (3 Punkte)

Lösung:

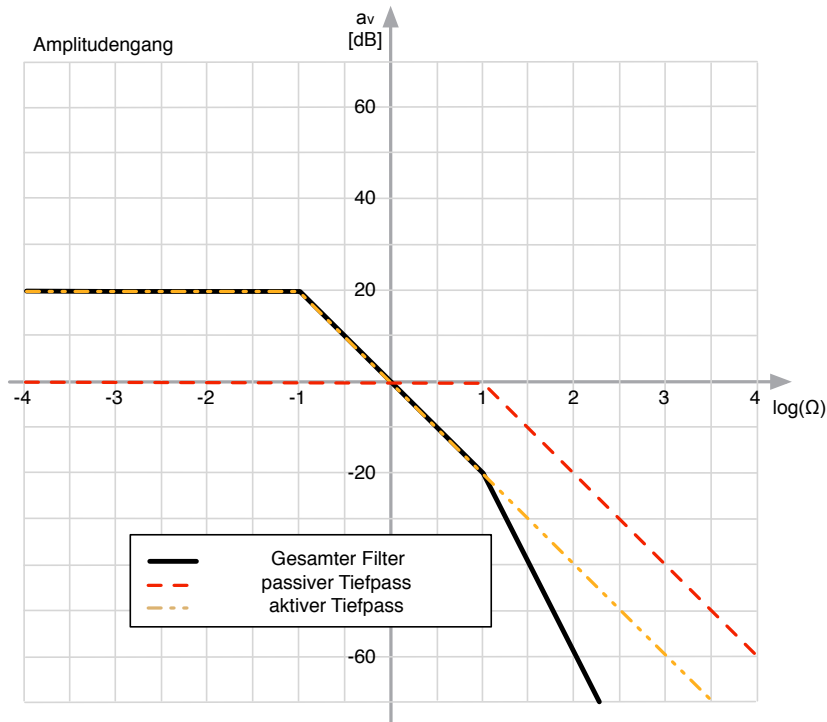
- (a) Zwei der folgenden Regeln müssen genannt werden:

- Tue einfach so, als ob $U_d = 0$.
- Tue einfach so, als ob die Eingangsströme in der Operationsverstärker verschwinden.
- Wende unter Beachtung von 1. und 2. die Maschen- und Knotengleichungen wie gehabt an.

- (b) Das gesamte Filterschaltung muss aus einer Reihenschaltung aus dem aktiven und passiven Tiefpass bestehen. Die Schaltung sieht folgendermaßen aus:



- (c) Der Amplitudengang ergibt sich mit den Kenndaten im Datenblatt zu folgender Kurve:



Die normierte Knickfrequenz des aktiven Tiefpass folgt aus :

$$\Omega_a = \frac{2\pi f_a}{\omega_n} = 10^{-1}.$$

Die Verstärkung im Durchlassbereich beträgt $20 \cdot \log_{10}(V) = 20 \text{ dB}$.

Die normierte Knickfrequenz des passiven Tiefpass entspricht :

$$\Omega_p = \frac{2\pi f_p}{\omega_n} = 10^1$$

- (d) Zunächst wird die Übertragungsfunktion des passiven Tiefpass bestimmt. Mit der Spannungsteilerregel erhält man direkt:

$$\frac{U_2}{U_{12}} = \frac{\frac{1}{j\omega C_p}}{R_p + \frac{1}{j\omega C_p}} = \frac{1}{1 + j\omega R_p C_p}$$

Anschließend muss die Übertragungsfunktion des aktiven Tiefpasses bestimmt werden. Eine Möglichkeit bietet hierzu das Knotenpunkt-potentialverfahren. Man betrachtet den Knoten am negativen Eingang des Operationsverstärkers und erhält die Knotengleichung mit der Spannung $U_K = 0 \text{ V}$:

$$\frac{U_1}{R_{a1}} = -\frac{U_{12}}{\frac{1}{j\omega C_a}} - \frac{U_{12}}{R_{a2}}$$

Durch Umstellen erhält man:

$$\frac{U_{12}}{U_1} = -\frac{R_{a2}}{R_{a1}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_{a2} C_a}$$

Um die gesamte Übertragungsfunktion zu erhalten, muss man beide einzelnen Funktionen miteinander multiplizieren und erhält schlussendlich:

$$\frac{U_2}{U_1} = -\frac{R_{a2}}{R_{a1}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_{a2} C_a} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_p C_p}$$

Daraus folgt schließlich: $K = -\frac{R_{a2}}{R_{a1}}$, $A = R_{a2} C_a$ und $B = R_p C_p$.

(e) Nun sollen die Widerstandswerte bestimmt werden.

Für den aktiven Tiefpass soll eine Knickfrequenz von $f_a = 100 \text{ Hz}$ eingestellt werden. Daher muss gelten:

$$\omega_a = 2\pi \cdot f_a = \frac{1}{R_{a2}C_a}$$

Mit dem gegebenen Wert für C_a gilt:

$$R_{a2} = \frac{1}{C_a\omega_a} = 1 \text{ k}\Omega$$

Weiterhin bestimmt der Faktor $K = \frac{R_{a2}}{R_{a1}}$ die Verstärkung im Durchlassbereich. Daraus folgt:

$$\frac{R_{a2}}{R_{a1}} \stackrel{!}{=} V = 10$$

$R_{a1} = 100 \Omega$ folgt hieraus.

Zuallerletzt muss die Grenzfrequenz des passiven Tiefpass eingestellt werden.

Es gilt wiederum $\omega_p = 2\pi \cdot f_p = \frac{1}{R_pC_p}$. Es folgt daher: $R_p = 200 \Omega$.

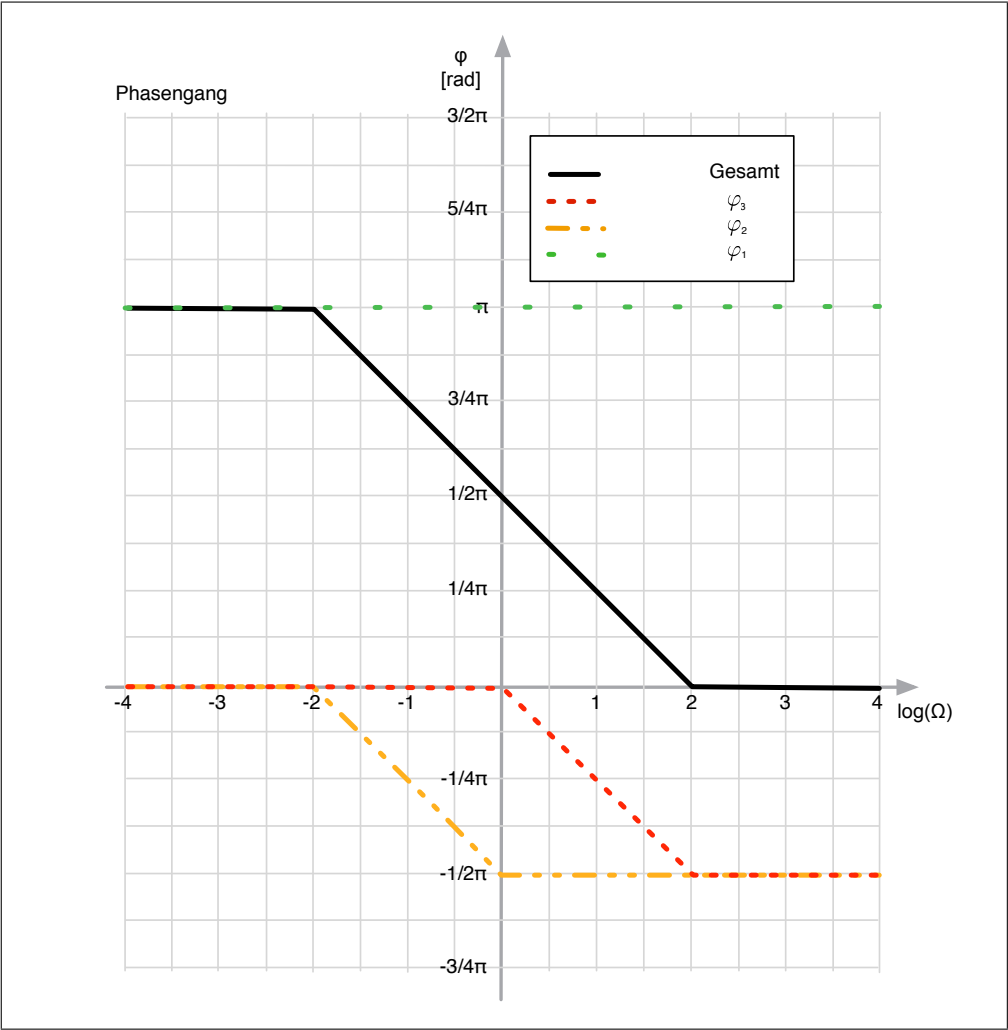
(f) Die Übertragungsfunktion besteht aus drei Teilen:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}(\omega) = \underline{G}_1 \cdot \underline{G}_2 \cdot \underline{G}_3$$

mit

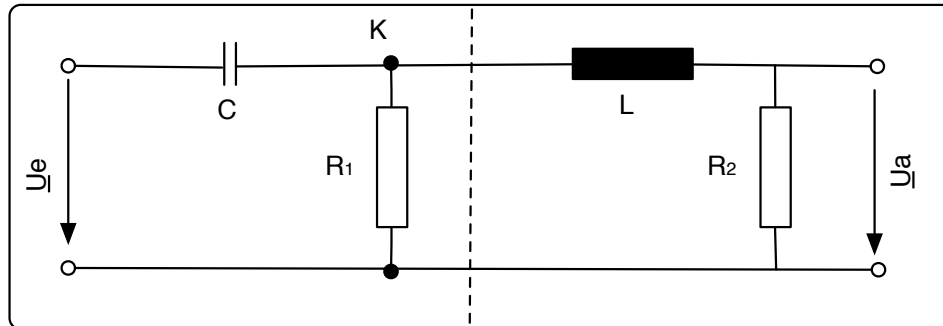
$$\begin{aligned}\underline{G}_1 &= -\frac{R_{a2}}{R_{a1}} \\ \underline{G}_2 &= \frac{1}{1 + j\omega R_{a2}C_a} \\ \underline{G}_3 &= \frac{1}{1 + j\omega R_pC_p}\end{aligned}$$

mit den dazugehörigen Phasen φ_1, φ_2 und φ_3 . Das Phasendiagramm der drei Teilschaltungen, als auch der Gesamtschaltung muss wie folgt aussehen:



Aufgabe 7**(12 Punkte)****Bodediagramm**

Gegeben sei die folgende passive Schaltung. Beachten Sie, dass die Schaltung im jetzigen Zustand nicht entkoppelt ist:



- (a) Entkoppeln Sie die Schaltung an der gestrichelten Linie und skizzieren Sie das neue Schaltbild. Welches Bauteil ist für so eine Entkopplung notwendig? (1 Punkt)
- (b) Gesucht ist jetzt die gesamte Übertragungsfunktion der entkoppelten Schaltung. Finden Sie zuerst die Übertragungsfunktionen der einzelnen Schaltungen und verwenden Sie diese, um die gesamte Übertragungsfunktion zu bestimmen. (3 Punkte)
- (c) Bevor Sie das Bodediagramm zeichnen können, müssen Sie die Übertragungsfunktion normieren. Wählen Sie eine geeignete Normierungsfrequenz ω_0 , so dass die Mitte des Durchlassbereiches des Amplitudenganges auf dem Ursprung des Bodediagramms landet. Bestimmen Sie die Normierungsfrequenz in Abhängigkeit der Bauteile. Geben Sie die normierte Übertragungsfunktion an. Für die Bauteile gilt: (2 Punkte)

$$\frac{L}{R_2} = 10^{-2} \cdot C R_1$$

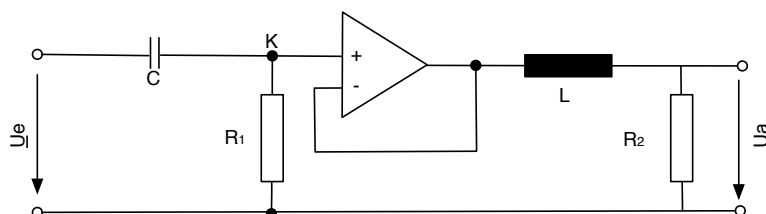
- (d) Zeichnen Sie das Bodediagramm der entkoppelten Übertragungsfunktion in Diagramm 7.1 und 7.2 ein. (4 Punkte)

Nun soll wieder das **ursprüngliche gekoppelte Filter** im obigen Bild betrachtet werden. Das Filter soll für eine spezielle Anwendung in der Hochspannungstechnik eingesetzt werden.

- (e) Um welche Filterart handelt es sich beim ursprünglichen gekoppelten Filter? (1 Punkt)
- (f) In der Starkstromtechnik arbeitet man oft mit Spulen. Ersetzen Sie den linken Teil des Filters durch ein $R_x L_x$ -Glied, welches zum gleichen Verhalten führt, wie das obige $R_1 C$ -Glied. Geben Sie die gesamte Schaltung des umgebauten Filters an. Die Bauteile müssen nicht bestimmt werden. (1 Punkt)

Lösung:

- (a) Die entkoppelte Schaltung sieht folgendermaßen aus:



Die Entkopplung wird durch einen Spannungsfolger / Impedanzwandler erreicht.

(b) Für die Schaltung links des Spannungsfolgers gilt:

$$\frac{\underline{U}_K}{\underline{U}_e} = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C R_1}{1 + j\omega C R_1}$$

Für die Schaltung rechts des Spannungsfolgers gilt:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_K} = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R_2}}$$

Nun ergibt sich die gesamte Übertragungsfunktion als Multiplikation der beiden Teilübertragungsfunktionen zu

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{j\omega C R_1}{(1 + j\omega C R_1)} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega \frac{L}{R_2})}$$

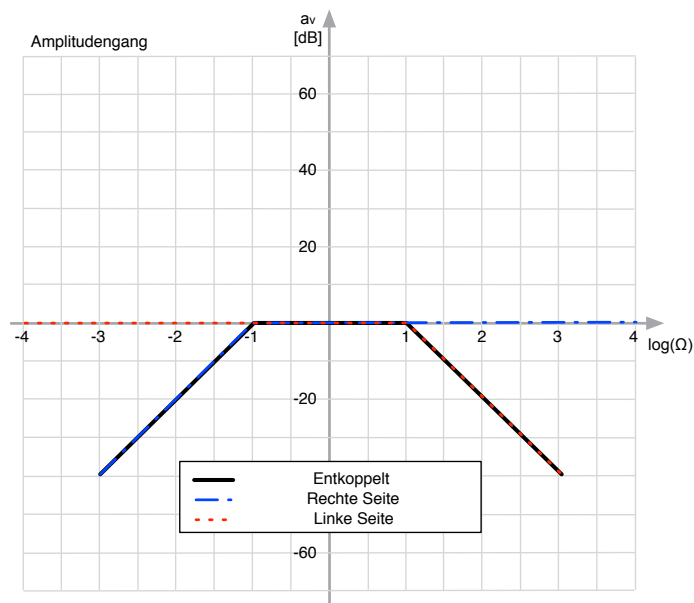
(c) Beim vorgegeben Verhältnis der Bauteile muss die normierte Übertragungsfunktion folgendermaßen aussehen, so dass die Mitte des Durchlassbereiches des Amplitudenganges auf dem Ursprung des Koordinatensystem des Bodediagramm landet:

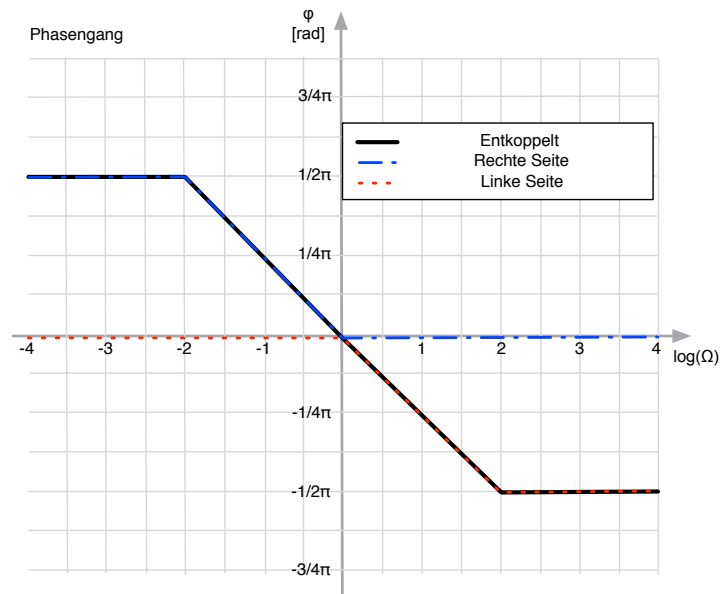
$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{j10^{+1}\Omega}{1 + j10^{+1}\Omega} \cdot \frac{1}{1 + j10^{-1}\Omega}$$

Durch Koeffizientenvergleich bekommt man die Normierungsfrequenz ω_0 :

$$\begin{aligned} 10^{+1}\Omega &= 10^{+1} \frac{\omega}{\omega_0} = \omega C R_1 \\ \Rightarrow \omega_0 &= 10^{+1} \cdot \frac{1}{C R_1} = 10^{-1} \cdot \frac{R_2}{L} \end{aligned}$$

(d) Das Bodediagramm der entkoppelten Schaltung sieht wie folgt aus:





- (e) Die Filterart des entkoppelten und des gekoppelten Filters ist gleich. Somit ist das gekoppelte Filter auch ein **Bandpass**. In diesem Fall handelt es sich aber um einen passiven Bandpass bestehend aus einem passiven RC-Hochpass erster Ordnung und einem passiven RL-Tiefpass erster Ordnung.
- (f) Das R_1C -Glied ist ein Hochpass. Somit muss das neue R_xL_x -Glied auch das Hochpassverhalten haben. Dadurch ergibt sich das folgende umgebaute Filter:

