Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel   Übungsleiter: M.Sc. Nicolas Pilia

---

Klausur

03. August 2018
Beginn: 14:00 Uhr

Familienname:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

AUFKLEBER

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem nicht programmierbaren Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein!
Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare!
Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

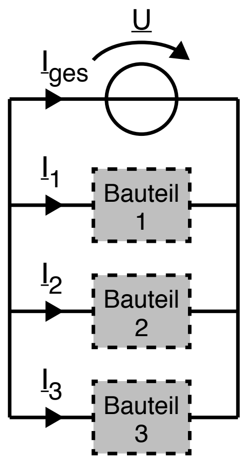
Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	20	
2	15	
3	20	
4	23	
5	16	
Gesamt:	94	

Note:

Aufgabe 1 **(20 Punkte)**
Ortskurve

Gegeben sei folgende Schaltung mit unbekannten, passiven linearen Bauteilen 1-3. Die Bauteile bestehen dabei jeweils nur aus einem einzigen Bauelement.



$\underline{U}$ sei eine sinusförmige Wechselspannung mit einer Amplitude von $\widehat{U} = 1\,\mathrm{V}$ und einer Kreisfrequenz ω. Durch Messung konnten Sie Folgendes ermitteln:

- Die Amplitude des Stroms durch Bauteil 1 beträgt $\widehat{I}_1 = 20\,\mathrm{mA}$.
- Bei einer Kreisfrequenz $\omega_a = 500\,\mathrm{s}^{-1}$ sind die Amplituden der Ströme durch die drei Bauteile gleich groß:

$$\omega = \omega_a = 500\,\mathrm{s}^{-1}: \quad \widehat{I}_1 = \widehat{I}_2 = \widehat{I}_3$$

- $\underline{I}_2$ ist gegenüber $\underline{I}_1$ um $+90°$ phasenverschoben, während $\underline{I}_3$ gegenüber $\underline{I}_1$ um $-90°$ phasenverschoben ist.

(a) Um welche Art von Bauelement handelt es sich bei Bauteil 1, 2 und 3? (1 Punkt)

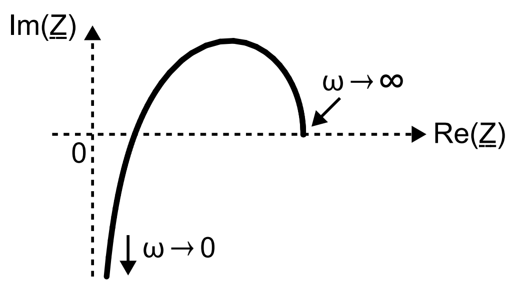
(b) Wie groß ist die Phasenverschiebung von $\underline{I}_{ges}$ gegenüber $\underline{U}$ bei $\omega = \omega_a$? Wie nennt sich diese Frequenz ω_a? (2 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Werte aller drei Bauteile. (3 Punkte)

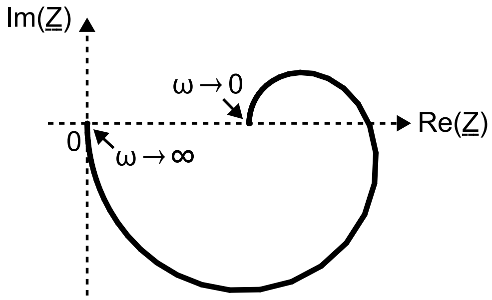
(d) Bei welchen Frequenzen ω_b und ω_c ist $\underline{I}_{ges}$ gegenüber $\underline{U}$ um $+45°$ bzw. $-45°$ phasenverschoben? (6 Punkte)

(e) Zeichnen Sie die Admittanzortskurve zu obiger Schaltung in Diagramm 1.1 und die zugehörige Impedanzortskurve in Diagramm 1.2 ein. **Beschriften Sie die Achsen und kennzeichnen Sie in beiden Diagrammen die Punkte $\boldsymbol{\omega \to 0}$, $\boldsymbol{\omega \to \infty}$, $\boldsymbol{\omega = \omega_a}$, $\boldsymbol{\omega = \omega_b}$ und $\boldsymbol{\omega = \omega_c}$.** (4 Punkte)

(f) Verändern Sie die gegebene Schaltung durch Verschieben eines einzigen Bauteils so, dass Sie folgende Impedanzortskurve erhalten. Zeichnen Sie das resultierende Schaltbild und begründen Sie! (2 Punkte)



(g) Fügen Sie der ursprünglich gegebenen Schaltung nun einen ohmschen Widerstand hinzu, um folgende Impedanzortskurve zu erhalten. Zeichnen Sie das resultierende Schaltbild und begründen Sie! (2 Punkte)



Lösung:

(a) Bauteil 1: Widerstand R
Bauteil 2: Kondensator / Kapazität C
Bauteil 3: Spule / Induktivität L

(b) Bei $\omega = \omega_a$ sind die Amplituden aller Ströme gleich groß. $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$ sind jedoch gegenphasig und heben sich daher auf. $\underline{I}_{ges}$ entspricht damit dem Strom durch R und ist gleichphasig zu $\underline{U}$: $\arg(\underline{I}_{ges}/\underline{U}) = 0°$.
ω_a nennt sich Resonanzfrequenz.

(c)

$$R = \frac{\widehat{U}}{\widehat{I}} = \frac{1\,\mathrm{V}}{20\,\mathrm{mA}} = 50\,\Omega$$

$$\frac{1}{\omega_a C} = \frac{\widehat{U}}{\widehat{I}} \Rightarrow C = \frac{\widehat{I}}{\omega_a \widehat{U}} = \frac{20\,\mathrm{mA}}{500\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 1\,\mathrm{V}} = 40\,\mu\mathrm{F}$$

$$\omega_a L = \frac{\widehat{U}}{\widehat{I}} \Rightarrow L = \frac{\widehat{U}}{\omega_a \widehat{I}} = \frac{1\,\mathrm{V}}{500\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 20\,\mathrm{mA}} = 100\,\mathrm{mH}$$

(d) Die Gesamtadmittanz der Schaltung ist:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Für eine Phasenverschiebung von +45° zwischen Strom und Spannung gilt:

$$Im\{\underline{Y}\} = Re\{\underline{Y}\} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_a C - \frac{1}{\omega_a L} = \frac{1}{R}$$

Zieht man $\frac{1}{R}$ auf die linke Seite und multipliziert die Gleichung mit ω_a, erhält man:

$$\omega_a^2 C - \omega_a \frac{1}{R} - \frac{1}{L} = 0$$

Diese quadratische Gleichung kann mit der Mitternachtsformel, mit der pq-Formel oder durch quadratische Ergänzung gelöst werden. Man erhält:

$$\omega_a = \frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC}}$$

Der Term mit der Wurzel ist für alle R, L und C größer als der Term vor der Wurzel. Da eine Frequenz nicht negativ sein kann gilt:

$$\omega_a = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC}} = 809{,}0\,\mathrm{s}^{-1}$$

Für eine Phasenverschiebung von $-45°$ zwischen Strom und Spannung gilt:

$$-Im\{\underline{Y}\} = Re\{\underline{Y}\} \quad \Leftrightarrow \quad -\left(\omega_b C - \frac{1}{\omega_b L}\right) = \frac{1}{R}$$

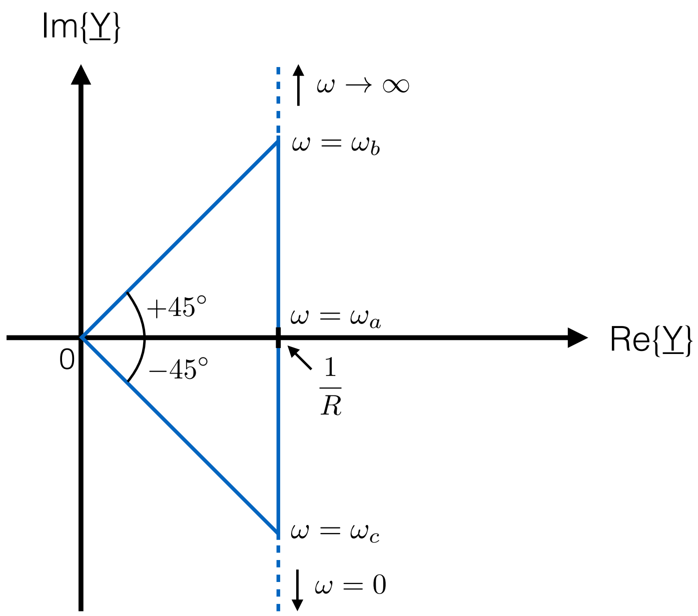
$$\omega_b^2 C + \omega_b \frac{1}{R} - \frac{1}{L} = 0$$

$$\omega_b = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC}}$$

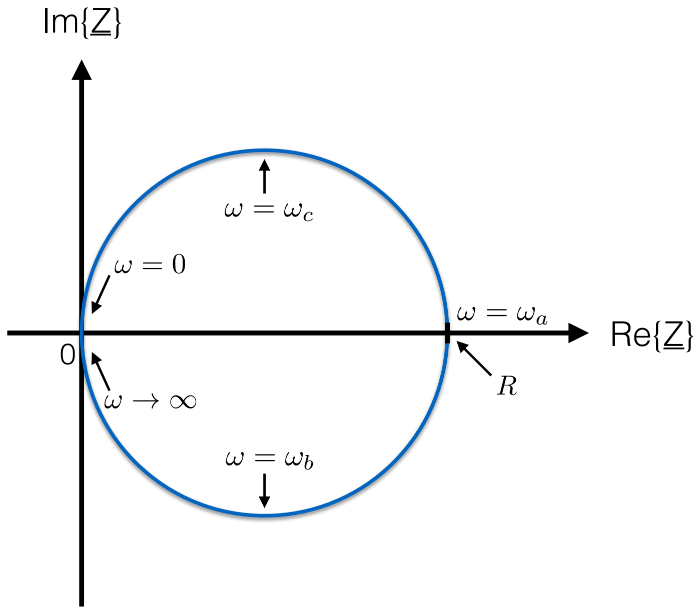
Auch hier ist nur ein positives Vorzeichen vor der Wurzel sinnvoll:

$$\omega_b = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC}} = 309{,}0\,\mathrm{s}^{-1}$$

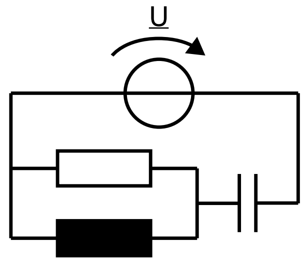
(e) Admittanzortskurve:



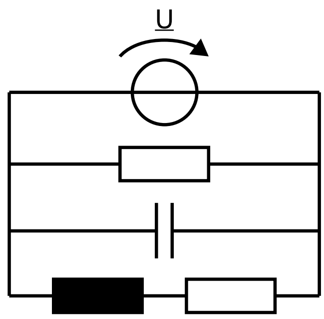
Impedanzortskurve:



(f) Der Kondensator muss in Reihe geschaltet werden, da die Impedanz bei sehr kleinen Frequenzen gegen $-j\,\infty$ geht.



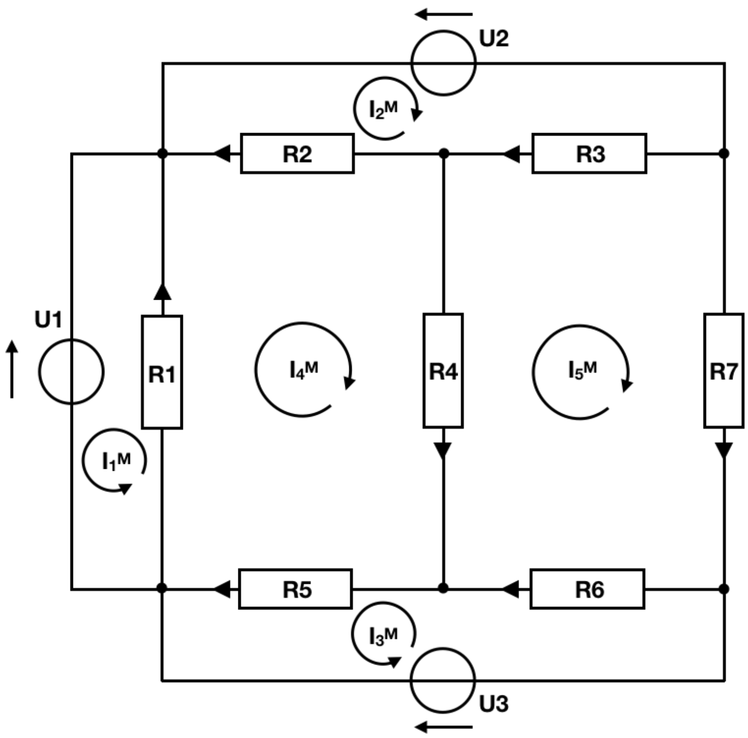
(g) Der Spule muss ein weiterer Widerstand in Reihe geschaltet werden, da nur so die Impedanz bei $\omega \to 0$ reell wird und für $\omega \to \infty$ gegen Null geht.



Aufgabe 2 **(15 Punkte)**
Netzwerk

(a) Nennen Sie beide Kirchhhoffschen Gleichungen. Welche physikalische Grundlage liegt der jeweiligen Gleichung zugrunde. (2 Punkte)

Schaltung:



$U_1 = 7\,V,\;\; U_2 = 12\,V,\;\; U_3 = 3\,V$
$R1 = R2 = 1\Omega,\;\; R3 = 2\Omega,\;\; R4 = 5\Omega,\;\; R5 = 20\Omega,\;\; R6 = 8\Omega,\;\; R7 = 6\Omega$

(b) Das Netzwerk soll mit dem Maschenstromverfahren gelöst werden. Stellen Sie dazu das Gleichungssystem in Matrixform für die angegebenen Maschen auf. Stellen Sie die Matrix allgemein auf und setzen Sie keine Werte ein. Es soll nach dem Aufstellen keine Berechnung durchführt werden! (2 Punkte)

(c) Es werden nun die Spannungsquellen U2 und U3 entfernt und es entsteht eine Unterbrechung an diesen Stellen. Dadurch fallen die Maschen I_3^M und I_2^M weg. Es entsteht ein neues Gleichungssystem mit reduzierter Größe. Für dieses reduzierte Netzwerk ist Ihnen nachfolgend eine Matrixform gegeben. Dabei wurden die Maschen neu gewählt. Wie wurden hier die Maschen gewählt? Skizzieren Sie dazu die neue Schaltung und zeichnen Sie die Maschen der 3x3 Matrix und deren Drehsinn ein. (4 Punkte)

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{I^M} = \mathbf{U}$$

mit:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R3+R4+R6+R7 & -R3-R6-R7 & R3+R6+R7 \\ -R3-R6-R7 & R1+R2+R3+R5+R6+R7 & -R2-R3-R5-R6-R7 \\ R3+R6+R7 & -R2-R3-R5-R6-R7 & R2+R3+R5+R6+R7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I^M} = \begin{bmatrix} I_1^M \\ I_2^M \\ I_3^M \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U_1 \end{bmatrix}$$

(d) Lösen Sie das Gleichungssystem der 3x3 Matrix mit Hilfe der Cramerschen Regel. Zeigen Sie dabei für mindestens einen Maschenstrom die komplette Matrizenberechnung. Geben Sie alle Ergebnisse der Maschenströme an und berechnen Sie danach die Ströme durch die Widerstände. Runden Sie dabei auf 3 Nachkommastellen. Fassen Sie vor der Berechnung keine Bauteile zusammen. (7 Punkte)

Lösung:

(a)

$$\sum I_K = 0$$

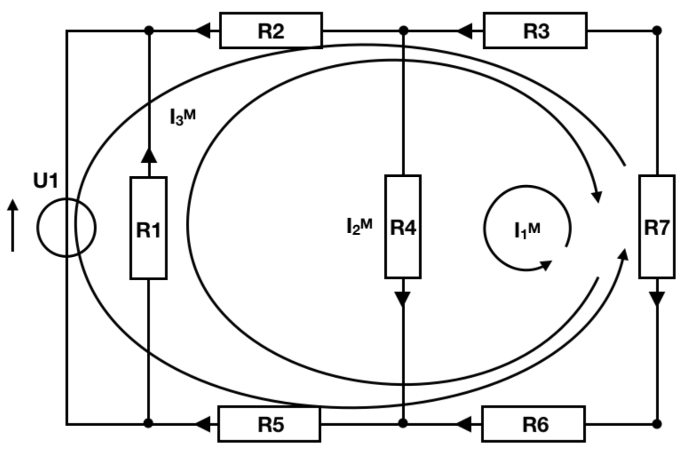
Wäre die Summe aller Ströme (Vorzeichen beachten) in einem Knoten ungleich 0 würde im statischen Fall immer mehr Ladung in einen Knoten fließen. Es muss Ladungserhaltung gelten.

$$\sum U_M = 0$$

Wäre die Summe aller Spannungen (Vorzeichen beachten) in einer Masche ungleich 0 würde im Fall eines Maschenumlaufs der Energieerhaltungssatz verletzt werden.

(b)

$$\begin{pmatrix} R1 & 0 & 0 & R1 & 0 \\ 0 & R2+R3 & 0 & -R2 & -R3 \\ 0 & 0 & R5+R6 & R5 & R6 \\ R1 & -R2 & R5 & R1+R2+R4+R5 & -R4 \\ 0 & -R3 & R6 & -R4 & R3+R4+R6+R7 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Im_1 \\ Im_2 \\ Im_3 \\ Im_4 \\ Im_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



(c)

Das neue Netzwerk besteht aus 3 Maschen und einer Spannungsquelle. Der Weg der Maschen lässt sich aus der Matrixdiagonalen ablesen. Somit können die Kreise schon einmal eingezeichnet werden. Aus den Nebendiagonalwerten weiß man welche Widerstände verglichen mit einer anderen Masche gleich- oder gegensinning durchlaufen werden. Es bleibt nur noch die Richtung einer einzigen Masche zu bestimmen und diese als Ausgangspunkt zu verwenden. Der Drehsinn der Masche I_3^M ist durch die Spannungsquelle gegeben. Sie ist positiv gegeben, also muss die Masche gegensinnig zum Spannungspfeil laufen. Nun kann von Masche 3 aus über die Nebendiagonalen der Drehsinn der anderen zwei Maschen gefunden werden.

(d) Gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} R3+R4+R6+R7 & -R3-R6-R7 & R3+R6+R7 \\ -R3-R6-R7 & R1+R2+R3+R5+R6+R7 & -R2-R3-R5-R6-R7 \\ R3+R6+R7 & -R2-R3-R5-R6-R7 & R2+R3+R5+R6+R7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+5+8+6 & -2-8-6 & 2+8+6 \\ -2-8-6 & 1+1+2+20+8+6 & -1-2-20-8-6 \\ 2+8+6 & -1-2-20-8-6 & 1+2+20+8+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -16 & 16 \\ -16 & 38 & -37 \\ 16 & -37 & 37 \end{pmatrix}$$

Die Determinante der Matrix wurde hier mit der Regel von Sarrus berechnet:

$D = det(A) = 21*38+37+((-16)*(-37)*16)+((16)*(-16)*(-37))-(16*38*16)-((-37)*(-37)*21)-(37*(-16)*(-16)) = 521\Omega^3$

Der erste Zähler der Cramer-Determinanten:

$$D_1 = \det\begin{pmatrix} 0 & -16 & 16 \\ 0 & 38 & -37 \\ 7 & -37 & 37 \end{pmatrix} = -16*(-37)*7-7*38*16 = -112V\cdot\Omega^2 \rightarrow$$

$\frac{D_1}{D} = 1\frac{V}{\Omega} \rightarrow Im_1 \approx -0,215A$

Der zweite Zähler der Cramer-Determinanten:

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} 21 & 0 & 16 \\ -16 & 0 & -37 \\ 16 & 7 & 37 \end{pmatrix} = 16*(-16)*7-7*(-37)*21 = 3647V\cdot\Omega^2 \rightarrow$$

$\frac{D_2}{D} = Im_2 = 7A$

Der dritte Zähler der Cramer-Determinanten:

$$D_3 = \det\begin{pmatrix} 21 & -16 & 0 \\ -16 & 38 & 0 \\ 16 & -37 & 7 \end{pmatrix} = 21*38*7-7*(-16)*(-16) = 3794V\cdot\Omega^2 \rightarrow$$

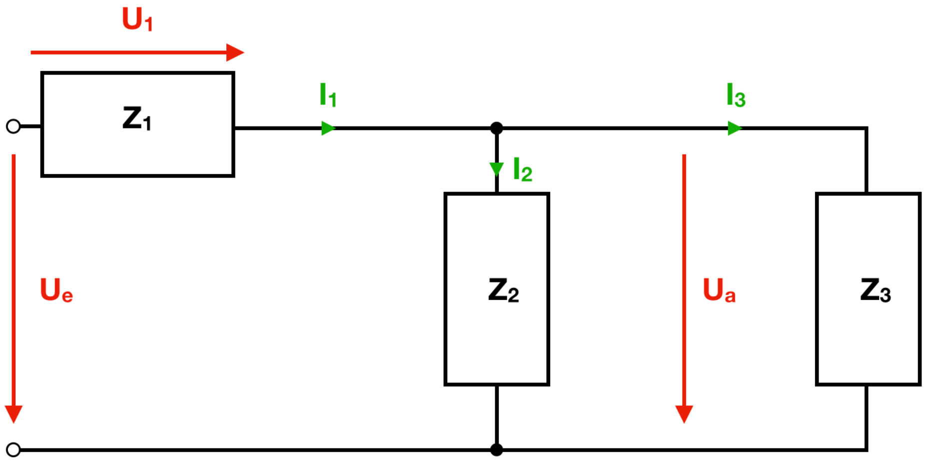
$\frac{D_3}{D} = Im_3 = 7,282A$

$I_{R1} = Im_2 = 7A$, $I_{R2} = Im_2 + Im_3 = 0,282A$, $I_{R3} = Im_1 - Im_2 + Im_3 = 0,067A$, $I_{R4} = Im_1 = -0,215A$, $I_{R5} = Im_2 - Im3 = -0,282A$, $I_{R6} = -Im_1 + Im_2 - Im_3 = -0,067A$, $I_{R7} = -Im_1 + Im_2 - Im3 = -0,067A$

Aufgabe 3 **(20 Punkte)**

Wechselstromlehre

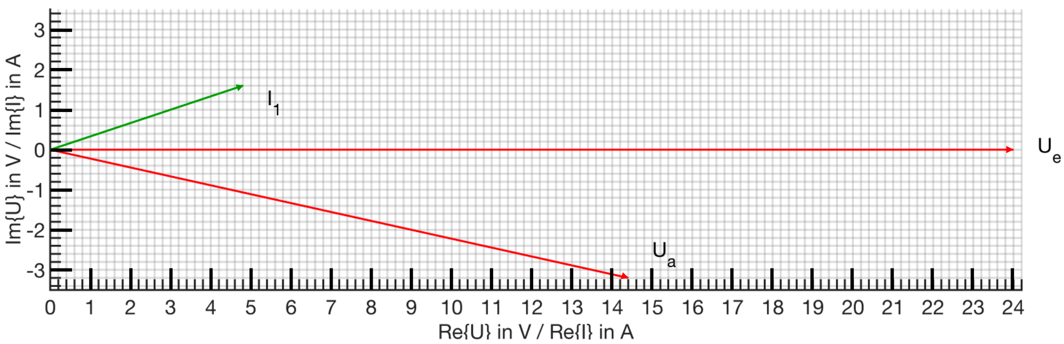
Nach der Beendigung Ihres Studiums sollen Sie für Ihren Arbeitgeber die Schaltung eines Wettbewerbers untersuchen. Sie wollen herausfinden aus welchen Bauteilen die Schaltung aufgebaut ist. Sie wissen bereits, dass die Schaltung ausschließlich aus passiven Bauteilen aufgebaut ist und kennen den grundsätzlichen Aufbau der Schaltung:



Zusätzlich haben Sie bereits durch Messung und ein unvollständiges Datenblatt einige Messwerte in Erfahrung bringen können. Bei den Messwerten handelt es sich um folgende Effektivwerte:

- $\underline{U}_e = 24\,V$
- $\underline{U}_a = (14,4 - j3,2)\,V$
- $\underline{I}_e = (4,8 + j1,6)\,A$
- $|\underline{I}_a| = 1,265\,A$
- Leistungsfaktor der Teilschaltung mit der Impedanz $\underline{Z}_3$: $cos(\phi_3) = 0,5145$

Sie haben auch bereits das folgende unvollständige Zeigerdiagramm bestimmt:



Im Folgenden sollen nun die Bauteile der Schaltung bestimmt werden. Die Teilschaltungen mit den Impedanzen $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_3$ können dabei aus bis zu zwei passiven Bauteilen bestehen!

(a) Bestimmen Sie $\underline{U}_1$ graphisch und zeichnen Sie $\underline{U}_1$ in das Zeigerdiagramm in Abbildung 3.1 ein! Die graphische Konstruktionsmethode muss erkennbar sein! (2 Punkte)

(b) Aus welchem Bauteil besteht der Schaltungsteil mit der Impedanz $\underline{Z}_1$? Begründen Sie! (1 Punkt)

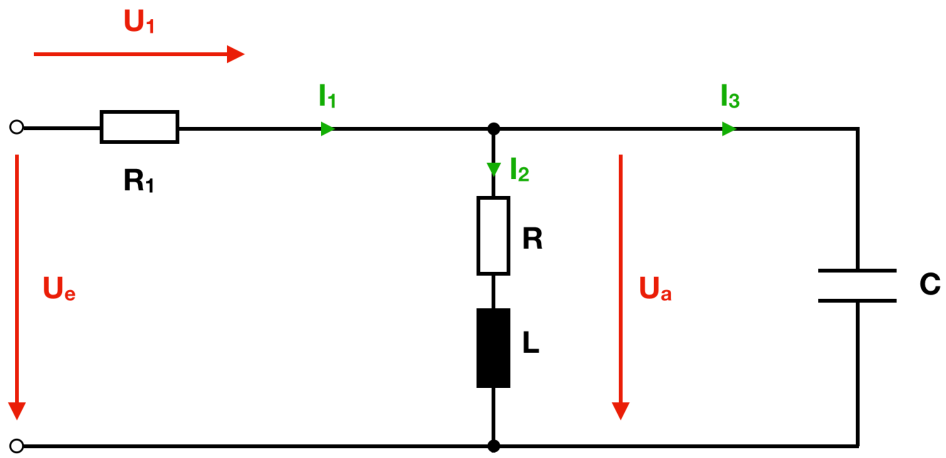
(c) Berechnen Sie die Blindleistung Q_3, die von der Teilschaltung mit der Impedanz $\underline{Z}_3$ aufgenommen wird. (3 Punkte)

(d) Berechnen Sie den komplexen Winkel $\varphi_{3,I}$ des Stroms $\underline{I}_3$ und zeichnen Sie $\underline{I}_3$ in das Zeigerdiagramm 3.1 ein. (3 Punkte)

(e) Aus welchen Bauteilen besteht der Schaltungsteil mit der Impedanz $\underline{Z}_3$? Begründen Sie! (1 Punkt)

(f) Die Teilschaltung mit der Impedanz $\underline{Z}_2$ besteht aus einer Parallelschaltung aus einem Widerstand und einem weiteren Bauteil. Um welches Bauteil handelt es sich hierbei? Begründen Sie anhand der Blindleistung der Gesamtschaltung Q_e und Q_3! Berechnen Sie hierzu zunächst die Blindleistung Q_e am Eingang der Gesamtschaltung. (2 Punkte)

Im Folgenden soll die Schaltung aus den folgenden Bauteilen bestehen:



Die Schaltung soll nun so betrieben werden, dass bei einer Betriebsfrequnz $\omega \neq 0$ die Spannung $\underline{U}_e$ und der Strom $\underline{I}_1$ am Eingang der Schaltung in Phase sind! Es gelte hierfür weiterhin: $\underline{U}_e = 24\,V$ und $|\underline{U}_e| > |\underline{U}_1|$.

Die meisten Bauteilewerte sind Ihnen inzwischen bekannt:

- $R = 10\,\Omega$
- $C = 100\,\mu F$
- $L = 0,1\,H$

(g) Was gilt für $\underline{S}_e$, wenn $\underline{U}_e$ und $\underline{I}_1$ in Phase sind? (1 Punkt)

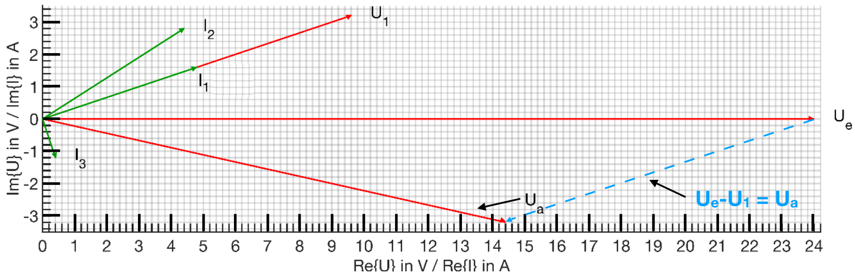
(h) Zeigen Sie rechnerisch, dass Q_e durch die folgende Formel bestimmt werden kann: (5 Punkte)

$$Q_e = (U_e^2 - U_e U_1) \cdot \frac{\omega \cdot (\omega^2 L^2 C + R^2 C - L)}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

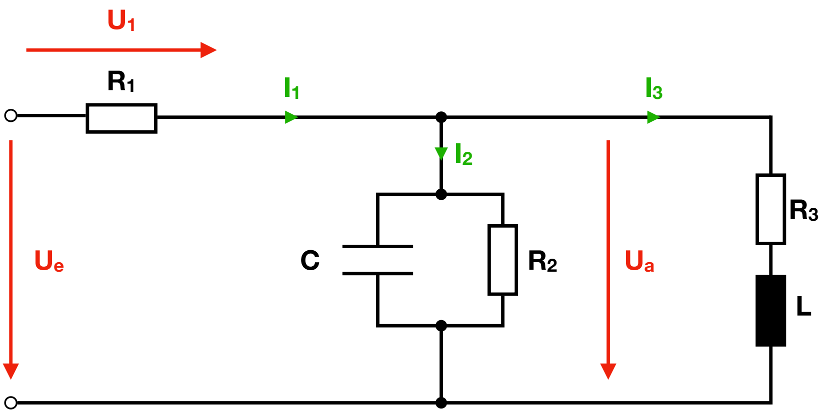
(i) Berechnen Sie die Kreisfrequenz ω, bei welcher die Spannung $\underline{U}_e$ und der Strom $\underline{I}_1$ am Eingang der Schaltung in Phase sind! (2 Punkte)

Lösung:

(a) Das vollständige Zeigerdiagramm ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



(b) Da die Spannung $\underline{U}_1$ über der Impedanz Z_1 und der Strom $\underline{I}_1$ in Phase sind, muss es sich bei der Schaltung um eine rein reelle Impedanz handeln. Die Schaltung besteht daher aus einem Bauteil. Das gesuchte Bauteil ist ein Widerstand. Die vollständige Schaltung ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



(c) Es gilt allgemein:
$\underline{S}_3 = |\underline{S}_3| \cdot cos(\varphi_3) + j\,|\underline{S}_3| \cdot sin(\varphi_3) = P_3 + jQ_3$. Dazu muss zunächst der Blindleistungsfaktor $sin(\varphi_3)$ bestimmt werden:

$$\varphi_3 = cos^{-1}(cos(\varphi_3)) = 59,04°$$
$$sin(\varphi_3) = 0,8575$$

$|\underline{S}_3|$ kann durch $|\underline{U}_a| \cdot |\underline{I}_3|$ bestimmt werden. Daraus folgt:

$$Q_3 = |\underline{U}_a| \cdot |\underline{I}_3| \cdot sin(\varphi_3) = 16\,var$$

(d) Der Winkel des Stromes kann durch die Beziehung der Spannungs- und Stromwinkel: $\varphi_{a3} = \varphi_{3,U} - \varphi_{3,I}$ bestimmt werden. Zunächst wird hierzu der Winkel des komplexen Spannungszeigers $\underline{U}_a$ bestimmt:

$$\varphi_{3,U} = tan^{-1}\left(\frac{Im\{\underline{U}_a\}}{Re\{\underline{U}_a\}}\right) = -12,53°$$

Mit dem in Aufgabenteil c) berechneten Winkel φ_3 ergibt sich der Winkel des Stroms zu: $\varphi_{3,I} = -71,56°$.

(e) Der Strom eilt der Spannung hinterher, daher handelt es sich um eine induktive Last. Da der Leistungsfaktor $cos(\varphi_3) \neq 0$ muss die Impedanz auch eine reelle Komponente besitzen. Daher handelt es sich bei der Teilschaltung um eine serielle oder parallele Verschaltung von einer Spule und einem Widerstand. Die vollständige Schaltung ist unter Aufgabenteil b) dargestellt.

(f) Die Blindleistung am Eingang der Gesamtschaltung kann wie folgt berechnet werden:

$$Q_e = Im\{\underline{S}_e\} = Im\{\underline{U}_e \cdot \underline{I}_1\} = -38,4\,var$$

Da die Blindleistung der Gesamtschaltung sich aus den Leistungen der Teilschaltungen zusammensetzt $\underline{Q}_e = \underline{Q}_1 + \underline{Q}_2 + \underline{Q}_3$ und die Blindleistung am Eingang negativ ist, muss die Teilschaltung 2 kapazitiv sein. Wäre sie induktiv, könnte die Blindleistung am Eingang nicht negativ sein, da die beiden anderen Teilschaltungen entweder induktiv oder rein ohmsch sind. Die vollständige Schaltung ist unter Aufgabenteil b) dargestellt.

(g) Die Scheinleistung ist rein reell. Nach außen erzeugt die Gesamtschaltung daher keine Blindleistung.

(h) Um die Blindleistung am Eingang der Gesamtschaltung zu berechnen wird zunächst die Scheinleistung am Eingang bestimmt.

$$\underline{S}_e = \underline{U}_e \cdot \underline{I}_1^*$$

Nun kann man $\underline{I}_1$ durch die beiden anderen Ströme ausdrücken und diese durch den Quotient aus der jeweiligen Spannung und Impedanz ersetzen:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_e &= \underline{U}_e \cdot (\underline{I}_2^* + \underline{I}_3^*) \\
&= \underline{U}_e \cdot (\frac{(\underline{U}_e^* - \underline{U}_1^*)}{R + j\omega L} + (\underline{U}_e^* - \underline{U}_1^*) \cdot j\omega C) \\
&= \underline{U}_e \cdot (\underline{U}_e^* - \underline{U}_1^*) \cdot (\frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C)
\end{aligned}$$

Da $\underline{U}_e = U_e = 24\,V$ rein reell ist und $\underline{I}_e = I_e$ durch die Bedingung, dass der Strom und die Spannung am Eingang rein reell sein soll, ebenfalls rein reell ist, ist auch die Spannung $\underline{U}_1 = U_1$ über dem Widerstand R_1 rein reell. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_e &= U_e \cdot (U_e - U_1) \cdot (\frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C) \\
&= (U_e^2 - U_e U_1) \cdot (\frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C)
\end{aligned}$$

Bringt man den Term in den Klammern noch auf einen gemeinsamen Bruchstrich und erweitert den Bruch komplex konjugiert, erhält man:

$$\underline{S}_e = (U_e^2 - U_e U_1) \cdot \left(\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{\omega \cdot (\omega^2 L^2 C + R^2 C - L)}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)$$

Der Imaginärteil der Scheinleistung ist die Blindleistung, daher erhält man schlussendlich den zu beweisenden Term:

$$Q_e = (U_e^2 - U_e U_1) \cdot \frac{\omega \cdot (\omega^2 L^2 C + R^2 C - L)}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

(i) Wenn $\underline{U}_e$ und $\underline{I}_e$ in Phase sind, muss $Q_e \stackrel{!}{=} 0$ gelten:

$$(U_e^2 - U_e U_1) \cdot \frac{\omega \cdot (\omega^2 L^2 C + R^2 C - L)}{R^2 + \omega^2 L^2} \stackrel{!}{=} 0$$

Mit den gegebenen Bedingungen $|\underline{U}_e| > |\underline{U}_1|$ und $\omega \neq 0$ kann die Gleichung zu folgender Form vereinfacht werden:

$$\omega^2 L^2 C + R^2 C - L \stackrel{!}{=} 0$$

Stellt man diese Gleichung nach ω um, erhält man:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2$$

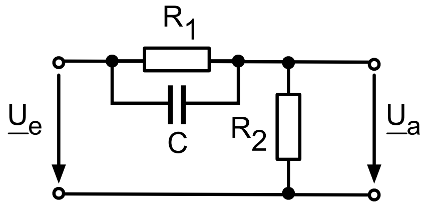
Da eine negative Kreisfrequenz nicht existiert, folgt:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}$$

Setzt man nun die gegebenen Werte für die Bauteile ein, erhält man $\omega = 300\,\frac{1}{s}$.

Aufgabe 4 **(23 Punkte)**
Bodediagramm

Sie haben während des Workshops auf dem Steckbrett folgende Schaltung aufgebaut:



Sie interessieren sich für diese Schaltung und wollen mithilfe Ihrer LEN-Kenntnisse diese Schaltung analysieren.

(a) Geben Sie die Übertragungsfunktion $\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}$ der Schaltung an. Zeigen Sie hierzu, dass für die Übertragungsfunktion gilt: (3 Punkte)

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{j\omega CR_1 + 1}{j\omega CR_1 + \frac{R_1}{R_2} + 1}$$

Entscheiden und begründen Sie, ob diese Schaltung Hochpass-, Tiefpass oder Bandpasscharakteristik besitzt.

(b) Geben Sie die Gesamtverstärkung in dB $a_{v,dB}$ an. Vereinfachen Sie den Term soweit wie möglich unter Ausnutzung der Rechenregeln für den Logarithmus und für komplexe Zahlen. Die Lösung soll keine komplexen Zahlen mehr enthalten. (2 Punkte)

(c) Geben Sie die Gesamtphase ϕ_{ges} an. Vereinfachen Sie den Term soweit wie möglich unter Ausnutzung der Rechenregeln für das Argument und für komplexe Zahlen. Die Lösung soll keine komplexen Zahlen mehr enthalten. (2 Punkte)

(d) Nehmen Sie für diesen Aufgabenteil an, dass das Verhältnis $\frac{R_2}{R_1}$ vernachlässigbar klein ist. Formen Sie die Übertragungsfunktion geeigenet um, sodass das Widerstandsverhältnis explizit darin auftaucht. Normieren Sie daraufhin die Übertragungsfunktion $\underline{G}(j\omega)$ geeignet. Geben Sie auch die Normierungskreisfrequenz explizit an. Zeichnen Sie den Amplitudengang für die gegebene Schaltung in Diagramm 4.1 ein. Zeichnen Sie ggf. Teilkurven und die resultierende Gesamtkurve. Beschriften Sie die Achsen des Diagramms. (6 Punkte)

(e) Nehmen Sie für diesen Aufgabenteil an, dass das Verhältnis $\frac{R_2}{R_1}$ vernachlässigbar klein ist. Zeichnen Sie den Phasengang für die gegebene Schaltung in Diagramm 4.2 ein. Beschriften Sie die Achsen des Diagramms. (3 Punkte)

(f) Argumentieren Sie, wie sich Amplitudengang und Phasengang verändern, wenn das Verhältnis $\frac{R_2}{R_1}$ sehr groß wird. (2 Punkte)

(g) Wie kann man die gegebene Schaltung durch einen Widerstand und einen Kondensator zu einem passiven Bandpass umfunktionieren? Zeichnen Sie den Vierpol, der hinzuzufügen ist. Benennen Sie ihn. (2 Punkte)

(h) Kann man die beiden Schaltungsteile, die den Bandpass formen, bedenkenlos verbinden? Erläutern Sie in 1-2 Sätzen evtl. auftretende Probleme und wie man diese lösen kann. Zeichnen Sie die Gesamtschaltungskette inkl. der ggf. zusätzlich benötigten Schaltungsteile. (3 Punkte)

Lösung:

(a) Wir lösen die Parallelschaltung auf:

$$Z_{parallel} = \frac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_1}{j\omega C R_1 + 1} \tag{1}$$

Das Ergebnis nutzen wir und stellen die Übertragungsfunktion mithilfe der Spannungsteilerregel auf:

$$\begin{aligned}\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} &= \frac{R_2}{\frac{R_1}{j\omega C R_1 + 1} + R_2} = \frac{j\omega C R_1 R_2 + R_2}{R_1 + j\omega C R_1 R_2 + R_2} \\ &= \frac{j\omega C R_1 + 1}{j\omega C R_1 + \frac{R_1}{R_2} + 1}\end{aligned} \tag{2}$$

Um nun die Frequenzcharakteristik herauszufinden, können wir beispielsweise wie folgt argumentieren: Wir schauen uns die Werte der Übertragungsfunktion für verschiedene ω an:

$$\begin{aligned}\text{für } \omega \to 0 \text{ gilt: } \left.\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right|_{\omega=0} &= \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2}} < 0 \\ \text{für } \omega \to \infty \text{ gilt: } \left.\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right|_{\omega\to\infty} &= \frac{R_2}{R_2} = 1\end{aligned} \tag{3}$$

Das bedeutet, dass hohe Frequenzen nicht verändert werden, tiefe jedoch gedämpft werden. Die Schaltung besitzt also Hochpasscharakteristik.

(b)

$$\begin{aligned}a_{v,dB} &= 20 \cdot \log\left(\left|\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right|\right) = 20 \cdot \log\left(\left|\frac{j\omega C R_1 + 1}{j\omega C R_1 + \frac{R_1}{R_2} + 1}\right|\right) \\ &= 20 \cdot \log\left(|j\omega C R_1 + 1|\right) - 20 \cdot \log\left(\left|j\omega C R_1 + \frac{R_1}{R_2} + 1\right|\right) \\ &= 20 \cdot \log\left(\sqrt{(\omega C R_1)^2 + 1}\right) - 20 \cdot \log\left(\sqrt{(\omega C R_1)^2 + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)^2}\right)\end{aligned} \tag{4}$$

(c)

$$\phi_{ges} = \arg\left\{\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right\} = \arg\left\{\frac{j\omega C R_1 + 1}{j\omega C R_1 + \frac{R_1}{R_2} + 1}\right\} \tag{5}$$

$$= \arg\left\{j\omega C R_1 + 1\right\} - \arg\left\{j\omega C R_1 + \frac{R_1}{R_2} + 1\right\} \tag{6}$$

$$= \arctan\left(\omega C R_1\right) - \arctan\left(\frac{\omega C R_1}{\frac{R_1}{R_2} + 1}\right) \tag{7}$$

(d) Zuerst bietet es sich an, die Übertragungsfunktion etwas umzuschreiben (Multiplikation mit $\frac{R_2}{R_1}$):

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{j\omega C R_2 + \frac{R_2}{R_1}}{j\omega C R_2 + \frac{R_2}{R_1} + 1} \tag{8}$$

Es ergibt sich unter Beachtung des Hinweises, dass $\frac{R_2}{R_1} \approx 0$:

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{j\omega C R_2}{j\omega C R_2 + 1} \tag{9}$$

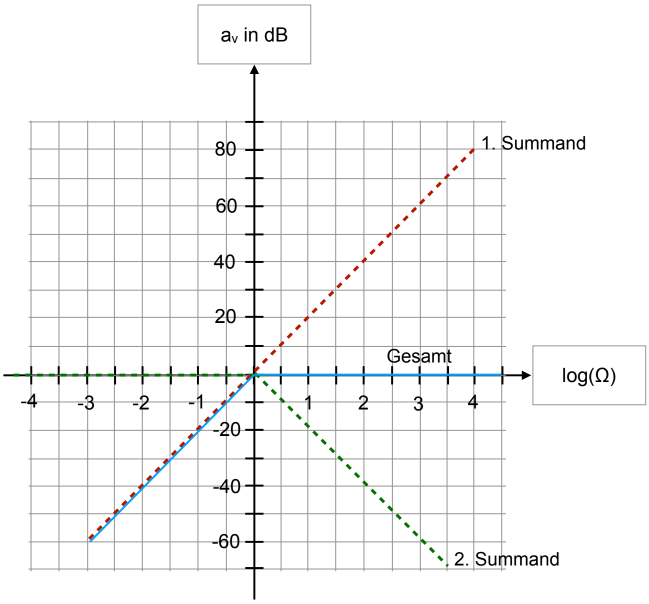
(Dies ist die Übertragungsfunktion des Hochpasses erster Ordnung aus dem LEN-Skript.) Nun normieren wir wie gehabt die Übertragungsfunktion auf $\frac{\omega}{\omega_n} = \Omega = \omega C R_2$, also gilt:

$$\underline{G}(j\Omega) = \frac{j\Omega}{j\Omega + 1} \tag{10}$$

mit $\omega_n = \frac{1}{CR_2}$. Es gilt also für die Gesamtverstärkung:

$$\begin{aligned} a_{v,dB} &= 20 \cdot \log\left(|j\Omega|\right) - 20 \cdot \log\left(|j\Omega + 1|\right) & (11)\\ &= 20 \cdot \log\left(\Omega\right) - 20 \cdot \log\left(\sqrt{\Omega^2 + 1}\right) & (12) \end{aligned}$$

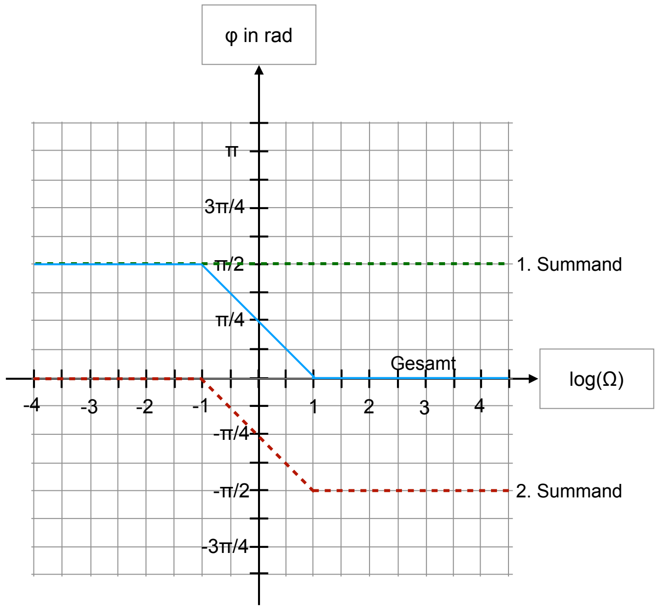
Der Amplitudengang sieht demnach wie folgt aus:



(e) Wir nutzen die normierte Übertragungsfunktion aus dem vorherigen Aufgabenteil. Die Gesamtphase lautet:

$$\phi_{ges} = \arg\left\{\frac{j\Omega}{j\Omega + 1}\right\} = \arg\left\{j\Omega\right\} - \arg\left\{j\Omega + 1\right\} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\Omega\right) \tag{13}$$

Der Phasengang sieht wie folgt aus:

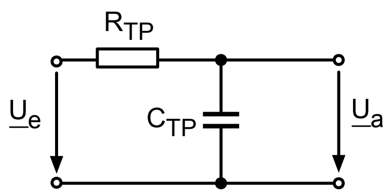


(f) Man sieht an der Übertragungsfunktion, dass mit der gegebenen Bedingung gilt:

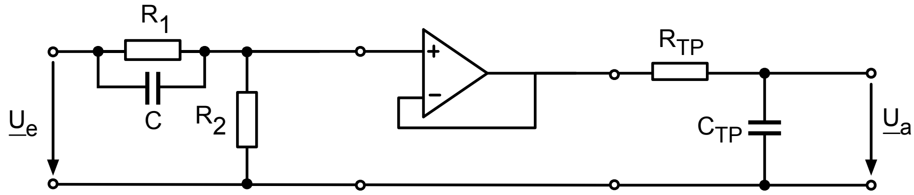
$$\frac{j\omega CR_2 + \frac{R_2}{R_1}}{j\omega CR_2 + \frac{R_2}{R_1} + 1} \to 1 \tag{14}$$

Durch ein sehr großes Widerstandsverhältnis $\frac{R_2}{R_1}$ gilt: $\frac{R_2}{R_1} \approx \frac{R_2}{R_1} + 1$. Also sind Zähler und Nenner gleich und die Übertragungsfunktion strebt gegen 1. Offenbar ist also die „Stärke“ der Hochpasscharakteristik abhängig vom Verhältnis der Widerstände. Der Amplitudengang zeigt für alle Frequenzen ein konstantes Verhalten, da die Übertragungsfunktion wie oben gezeigt konstant 1 ist. Ebenso tut es das Phasendiagramm: Da die Phasen von Zähler und Nenner gleich sind, wenn $\frac{R_2}{R_1}$ sehr groß ist, ist die Phase konstant 0.

(g) Man muss einen Tiefpass hinzufügen. Die Schaltung aus Widerstand und Kondensator ist im Folgenden gezeigt:

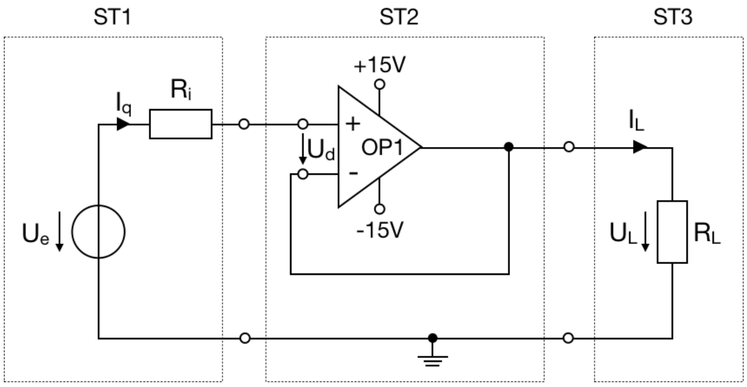


(h) Nein, man kann sie nicht einfach verbinden. Dies liegt daran, dass der Eingangswiderstand der 2. Schaltung das Verhalten der ersten beeinflussen kann. Man benötigt einen Impedanzwandler zwischen den Schaltungen und erhält somit die folgende Kette:



Aufgabe 5 **(16 Punkte)**
Operationsverstärker

Die nachfolgend abgebildete Operationsverstärkerschaltung setzt sich aus den drei Schaltungsteilen ST1, ST2 und ST3 zusammen. Bei OP1 handle es sich um einen idealen Operationsverstärker:



(a) Benennen Sie Schaltungsteil ST1 und Schaltungsteil ST2. (2 Punkte)

(b) Schaltungsteil ST2 stellt einen Vierpol dar. Geben Sie eine Gleichung für den Amplitudengang ($a_v(f) = ...$) in dB und eine Gleichung für den Phasengang ($\varphi(f) = ...$) des zugehörigen Bodediagramms in Abhängigkeit von der Frequenz f an. Eine Herleitung ist hier nicht erforderlich. (2 Punkte)

(c) Welcher Strom I_q fließt durch R_i? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

(d) Stellen Sie eine Beziehung zwischen der Ausgangsspannung U_L und der Eingangsspannung U_e in der Form $U_L(U_e) = ...$ her. Leiten Sie darauf aufbauend eine Gleichung für den Ausgangsstrom I_L in Abhängigkeit von U_e und R_L her: $I_L(U_e, R_L) = ...$. (2 Punkte)

(e) Laut Datenblatt ist der Ausgangsstrom des Operationsverstärkers auf maximal 20 mA begrenzt. Die Schaltung wird mit einer Eingangsspannung $U_e = 5\,\mathrm{V}$ betrieben. Die Versorgungsspannung des Operationsverstärkers beträgt $\pm 15\,\mathrm{V}$. Tragen Sie in Diagramm 7.1 den Laststrom I_L über dem variablen Leitwert des Lastwiderstandes $\frac{1}{R_L}$ auf. Nutzen Sie Ihr Ergebnis aus dem vorangegangenen Aufgabenteil. (3 Punkte)

(f) Nun wird Schaltungsteil ST2 aus der Schaltung entfernt und die Ausgänge von ST1 werden direkt mit den entsprechenden Eingängen von ST3 verbunden. In der so entstandenen Schaltung ist U_L abhängig von der Wahl des Lastwiderstandes R_L, insbesondere wenn R_i und R_L in derselben Größenordnung liegen. Was muss für den Quotienten $\frac{R_i}{R_L}$ gelten, damit die Spannung U_L mindestens 80 % der Eingangsspannung U_e beträgt? (2 Punkte)

(g) Was muss in der ursprünglichen Schaltung aus ST1, ST2 und ST3 für den Quotienten $\frac{R_i}{R_L}$ gelten, damit die Ausgangsspannung U_L mindestens 80 % der Eingangsspannung U_e beträgt? Gehen Sie davon aus, dass der Operationsverstärker innerhalb der Aussteuergrenzen betrieben wird. (1 Punkt)

(h) Schaltungsteil ST2 soll nun durch einen neuen Schaltungsteil ST2* ersetzt werden, sodass die Ausgangsspannung U_L unabhängig vom Lastwiderstand gerade der doppelten, negativen Eingangsspannung (also $-2 \cdot U_e$) entspricht. Der Innenwiderstand R_i der Quelle sei dabei unbekannt und darf keine Rolle spielen. Da Ihnen für den Schaltungsentwurf nur niederohmige Widerstände zur Verfügung stehen, können Sie nicht ausschließen, dass R_i in deren Größenordnung liegt. Entwerfen und dimensionieren Sie Schaltungsteil S2* mit Hilfe einer Schaltungsskizze. Erläutern Sie Ihr Vorgehen. (3 Punkte)

Lösung:

(a) ST1: reale Spannungsquelle / Spannungsquelle mit Innenwiderstand
ST2: Spannungsfolger

(b)

$$a_v(f) = 0\,\mathrm{dB}$$

$$\varphi(f) = 0\,^\circ$$

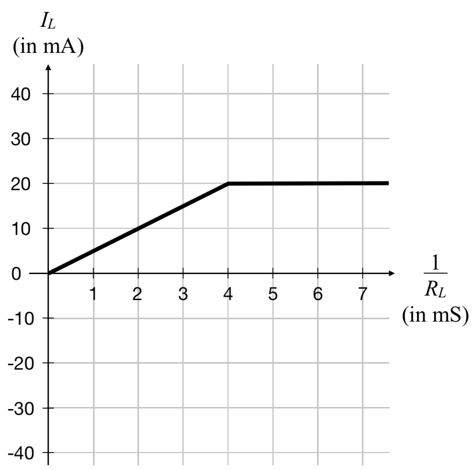
(c) $I_q = 0$, da der Eingangswiderstand eines idealen Operationsverstärkers unendlich groß ist.

(d) $U_L(U_e) = U_e$, da $U_d = 0$.
Mit $U_L = R_L \cdot I_L$ folgt $U_e = R_L \cdot I_L$
und somit $I_L = \frac{U_e}{R_L}$.

(e) Dem Graphen liegt die Gleichung aus dem vorangegangenen Aufgabenteil zugrunde: $I_L = U_e \cdot \frac{1}{R_L}$.
Das zugehörige Schaubild ist eine Ursprungsgerade mit Steigung U_e.
Da I_L maximal 20 mA beträgt, wird nun noch der Leitwert $\frac{1}{R_L}$ berechnet, an dem der Graph von der Ursprungsgerade in eine Parallele zur horizontalen Koordinatenachse übergeht:

$$\frac{1}{R_{L,Knick}} = \frac{I_{L,max}}{U_e} = \frac{20\,\mathrm{mA}}{5\,\mathrm{V}} = \frac{1}{250}\,\mathrm{S} = 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{S}.$$

Es ergibt sich der folgende Graph:



(f)

$$\frac{U_L}{U_e} = \frac{R_L}{R_i + R_L}$$

$$0.8 < \frac{R_L}{R_i + R_L}$$

$$0.8 \cdot (R_i + R_L) < R_L$$

$$0.8 \cdot R_i < 0.2 \cdot R_L$$

$$\frac{R_i}{R_L} < \frac{0.2}{0.8} = \frac{1}{4} = 0.25$$

(g)

$$U_L(U_e) = U_e$$

In der Schaltung bestehend aus ST1, ST2 und ST3 ist die Spannung am Lastwiderstand R_L innerhalb der Aussteuergrenzen des Operationsverstärkers unabhängig vom Quotienten $\frac{R_i}{R_L}$. Die Spannung am Lastwiderstand beträgt immer 100 % der Eingangsspannung U_e und ist somit immer größer als 80 % der Eingangsspannung.

(h) Es wird ein invertierender Verstärker eingesetzt (siehe Bild). Da R_i keine Rolle spielen soll, muss der Spannungsfolger beibehalten werden. Die Verstärkung von 2 wird durch die Wahl von $\frac{R_N}{R_1} = 2$ eingestellt.