Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel   Übungsleiter: M.Sc. Nicolas Pilia

---

Klausur

31. Juli 2019
Beginn: 9:30 Uhr

Familienname:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

AUFKLEBER

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem nicht programmierbaren Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein!
Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare!
Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

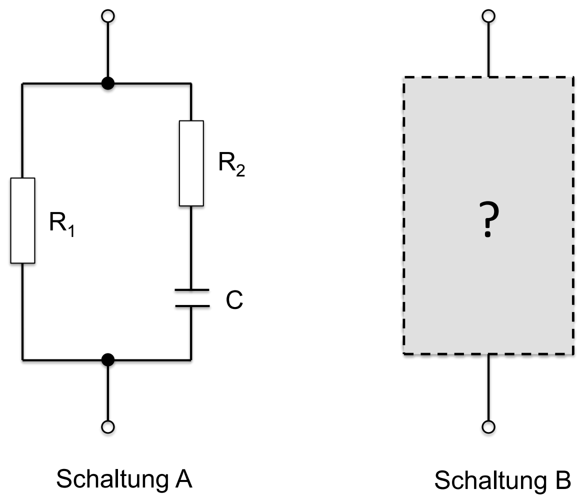
Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	21	
2	16	
3	20	
4	21	
5	16	
Gesamt:	94	

Note:

Aufgabe 1 **(21 Punkte)**

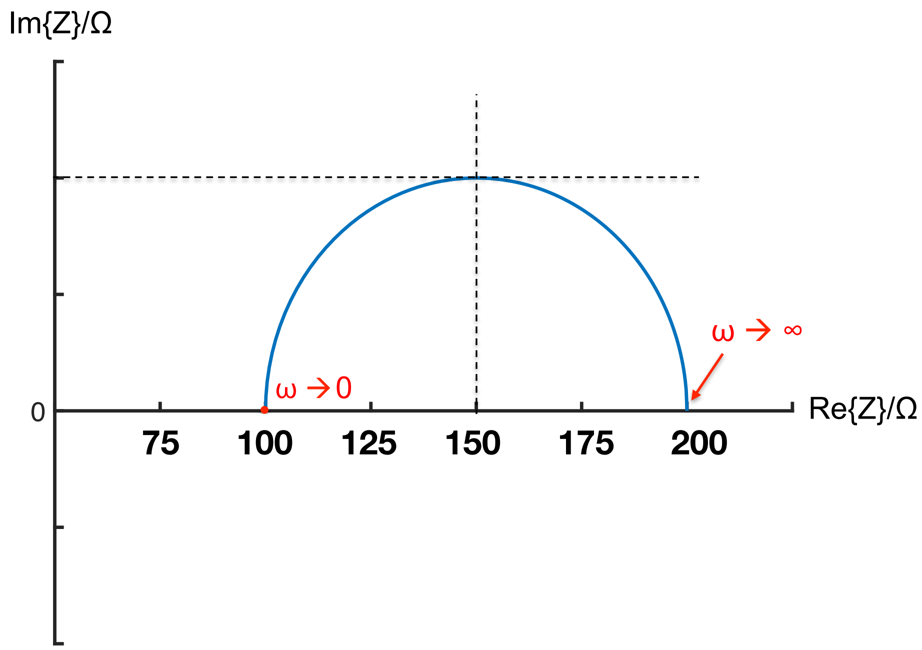
Ortskurve

In dieser Aufgabe sollen zwei verschiedene Schaltungen betrachtet werden:



(a) Skizzieren Sie zunächst die Ortskurve der Impedanz Z_A der Schaltung A in das Diagramm 1.1. Markieren Sie dabei die Punkte $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$. Beschriften Sie die Realachse in Abhängigkeit der Parameter R_1 und R_2. *Hinweis: Fehlende Beschriftungen führen zu Punktabzug!* (4 Punkte)

Im Folgenden soll nun die unbekannte Schaltung B entworfen werden. Die Ortskurve der Schaltung B ist bekannt:

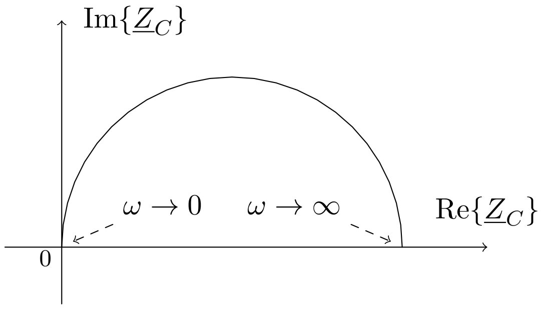


(b) Entwerfen Sie zwei mögliche Realisierungen für Schaltung B, die zu der gegebenen Ortskurve passen und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise! *Hinweis: Die Schaltungen bestehen je aus zwei Widerständen und einem weiteren Bauteil. In diesem Aufgabenteil müssen die Werte dieser Bauteile noch nicht berechnet werden.* (2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie für beide mögliche Schaltungen die Widerstandswerte! Erklären Sie Ihre Vorgehensweise zur Bestimmung der Werte! (4 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen lösbar.

Von einer Black-Box-Schaltung sei die Impedanzkurve gegeben:



(d) Zeichnen Sie in Diagramm 1.2 die zugehörige Admittanzkurve ein. Kennzeichnen Sie dabei die charakteristische Frequenz ω_0, die Grenzwerte $\omega \to 0$, $\omega \to \infty$.
Hinweis: Fehlende Beschriftungen führen zu Punktabzug! (4 Punkte)

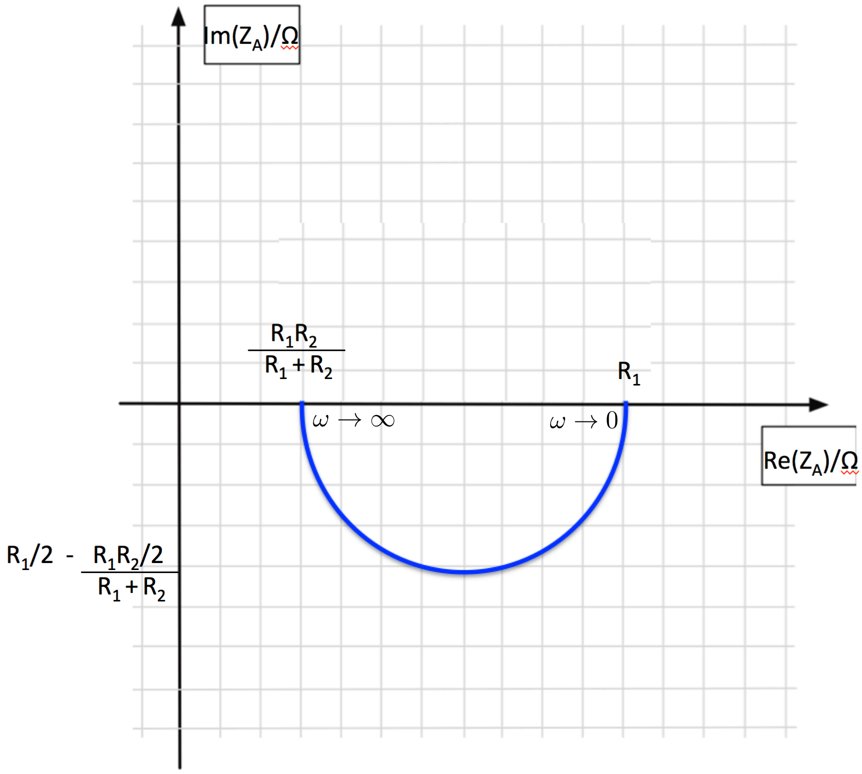
(e) Berechnen Sie die Admittanz einer RC-Serienschaltung nach Real- und Imaginärteil getrennt. Beweisen Sie, dass die Admittanz die folgende Kreisgleichung für beliebige $\omega \in [0, \infty)$ erfüllt: (5 Punkte)

$$\left(\mathrm{Re}\{\underline{Y}\} - \frac{1}{2R}\right)^2 + (\mathrm{Im}\{\underline{Y}\})^2 = \frac{1}{4R^2}$$

(f) Bei welcher charakteristischen Frequenz $w_0 = f(R, C)$ eilt der Strom der Spannung bei einer RC-Serienschaltung um 45° voraus? Begründen Sie! (2 Punkte)

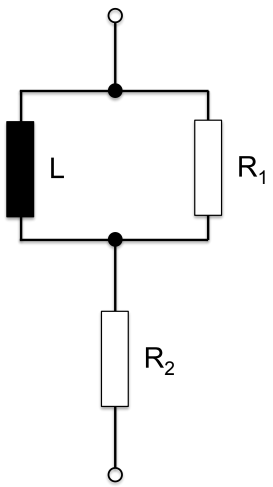
Lösung:

(a) Die Impedanzortskurve ergibt sich zu:

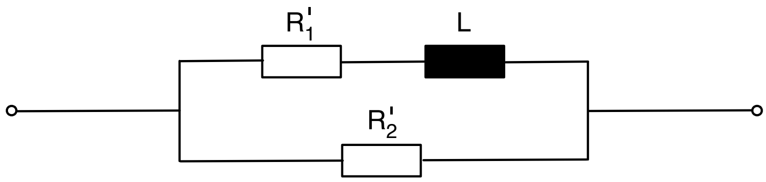


(b) Die Ortskurve beschreibt einen Halbkreis. Daher muss es sich um eine Parallelschaltung aus einem Widerstand und entweder einer Kapazität oder einer Spule handeln. Da der Kreis in der positiven imaginären Halbebene liegt, muss es sich um eine Parallelschaltung mit einer Spule handeln. Der Halbkreis ist um $100\,\Omega$ auf der reellen Achse nach rechts verschoben. Daraus folgt, dass ein weiterer Widerstand entweder in Reihe zu der Parallelschaltung oder direkt in Reihe zu der Spule geschaltet ist. Man erhält damit die folgenden Schaltungen:

Schaltung B1:



Schaltung B2:



(c) **Schaltung B1:**
Der Halbkreis ist um $100\,\Omega$ auf der reellen Achse nach rechts verschoben. Daher ergibt sich: $\mathrm{R}_2 = 100\,\Omega$. Des weiteren hat der Halbkreis einen Durchmesser von $100\,\Omega$. Der Durchmesser wird durch den parallel zur Spule geschalteten Widerstand definiert, es folgt daher: $\mathrm{R}_1 = 100\,\Omega$.

Schaltung B2:
Die Impedanz dieser Schaltung ergibt sich zu:

$$Z(\omega) = \frac{R_2' \cdot (R_1' + j\omega L)}{((R_1' + R_2') + j\omega L)} = \frac{R_2' \cdot (R_1' + j\omega L) \cdot ((R_1' + R_2') - j\omega L)}{(R_1' + R_2')^2 + \omega^2 L^2)}$$

Für $\omega = 0$ geht die Impedanz der Induktivität gegen 0, daher muss gelten:

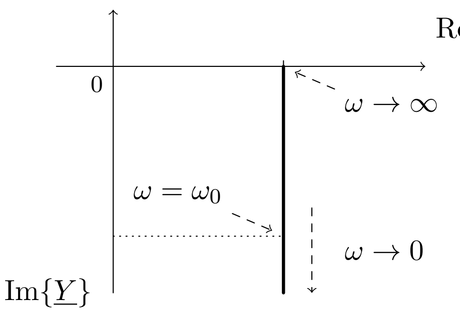
$$Z(\omega = 0) = \frac{R_1' R_2'}{R_1' + R_2'} \stackrel{!}{=} 100\,\Omega$$

und für $\omega \to \infty$ geht die Impedanz der Induktivität gegen ∞, daher muss gelten:

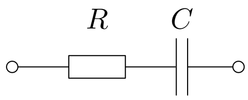
$$Z(\omega \to \infty) = R_2' \stackrel{!}{=} 200\,\Omega$$

Aus beiden Gleichungen folgt letztendlich $\mathrm{R}_1' = 200\,\Omega$.

(d) **Admittanz:**



(e) **Schaltbild:**



Die Impedanz der RC-Serienschaltung berechnet sich zu $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C = R + \frac{1}{j\omega C}$.

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R + j\frac{1}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{R\omega^2 C^2 + j\omega C}{R^2\omega^2 C^2 + 1}$$

Setze

$$N := R^2\omega^2 C^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\{\underline{Y}\} = \frac{1}{N} R\omega^2 C^2, \quad \mathrm{Im}\{\underline{Y}\} = \frac{1}{N}\omega C$$

Zu zeigen:

$$\left(\mathrm{Re}\{\underline{Y}\} - \frac{1}{2R}\right)^2 + (\mathrm{Im}\{\underline{Y}\})^2 = \frac{1}{4R^2}$$

Einsetzen von $\mathrm{Re}\{\underline{Y}\}$ und $\mathrm{Im}\{\underline{Y}\}$ in diese Gleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4R^2} &\overset{!}{=} \left(\frac{1}{N} R\omega^2 C^2 - \frac{1}{2R}\right)^2 + \left(\frac{1}{N}\omega C\right)^2 \\
&= \frac{1}{N^2} R^2\omega^4 C^4 - 2\frac{1}{N} R\omega^2 C^2 \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R^2} + \frac{1}{N^2}\omega^2 C^2 \\
&= \frac{1}{N^2}\left(R^2\omega^4 C^4 - N\omega^2 C^2 + \omega^2 C^2\right) + \frac{1}{4R^2} \\
&= \frac{1}{N^2}\omega^2 C^2 (R^2\omega^2 C^2 - N + 1) + \frac{1}{4R^2} \qquad | \; N = R^2\omega^2 C^2 + 1 \text{ einsetzen} \\
&= \frac{1}{N^2}\omega^2 C^2 \underbrace{(R^2\omega^2 C^2 - R^2\omega^2 C^2 - 1 + 1)}_{=0} + \frac{1}{4R^2} = \frac{1}{4R^2} \qquad \square
\end{aligned}$$

(f) Für eine Phasendifferenz von 45° zwischen Strom und Spannung muss gelten:

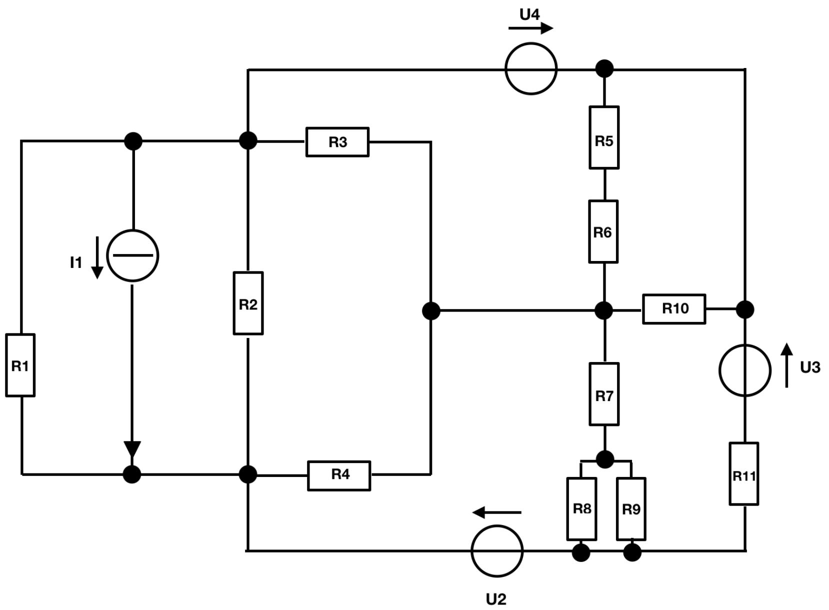
$$\begin{aligned}
\arg\{\underline{I}\} - \arg\{\underline{U}\} = \arg\left\{\frac{\underline{I}}{\underline{U}}\right\} &= -\arg\{\underline{Z}\} \overset{!}{=} 45^\circ \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Re}\{\underline{Z}\} \overset{!}{=} -\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} \\
&\Leftrightarrow R = \frac{1}{\omega_0 C} \\
&\Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 **(16 Punkte)**

Netzwerk

Gegeben sind die folgenden beiden Schaltungen:

Schaltung 1

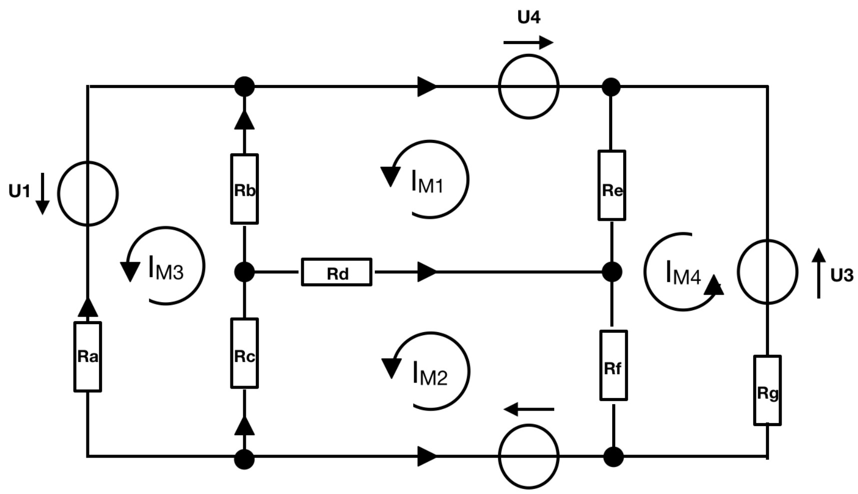


$I1 = 8\,A, \quad U2 = 5\,V, \quad U3 = 7\,V, \quad U4 = 10\,V$

$R1 = 1\,\Omega, \quad R2 = \frac{26}{3}\,\Omega, \quad R3 = \frac{13}{2}\,\Omega, \quad R4 = unbekannt, \quad R5 = \frac{9}{4}\,\Omega, \quad R6 = \frac{6}{8}\,\Omega$

$R7 = \frac{3}{2}\,\Omega, \quad R8 = \frac{5}{8}\,\Omega, \quad R9 = \frac{5}{2}\,\Omega, \quad R10 = \frac{3}{2}\,\Omega, \quad R11 = 5\Omega$

Schaltung 2



$U1 = 8\,V, \quad Ra = 1\,\Omega, \quad Rb = 2\,\Omega, \quad Rc = 4\,\Omega,$

$Rd = 3\,\Omega, \quad Re = 1\,\Omega, \quad Rf = 2\,\Omega, \quad Rg = 5\,\Omega$

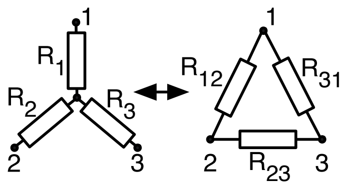
(a) Es soll **Schaltung 1** in **Schaltung 2** umgeformt werden. Führen Sie hierzu folgende Schritte zur Vereinfachung des Netzwerkes durch: (6 Punkte)

i) Fassen Sie zeichnerisch alle parallelen und in Reihe liegenden Widerstände soweit wie möglich zusammen. **R1** & **R2** sollen von diesem Schritt ausgenommen werden. Es sollen keine Zahlenwerte berechnet werden. Zeichnen Sie nur das vereinfachte Schaltbild.

ii) Führen Sie nun, falls nötig, eine geeignete Quellenumwandlung für das Maschenstromverfahren durch. **R2** & **R11** sollen bei diesem Schritt unberührt bleiben.

iii) Führen Sie zeichnerisch an geeigneter Stelle eine Stern-Dreiecks-Transformation durch. Zeichnen Sie nur das resultierende Schaltbild. Setzen Sie noch keine Zahlenwerte ein.

iv) Berechnen Sie nun mit Hilfe der Stern-Dreiecks-Transformation den Wert des Widerstandes **R4**.



$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{12} = R_1 + R_2 + R_1\frac{R_2}{R_3}$$

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{23} = R_2 + R_3 + R_2\frac{R_3}{R_1}$$

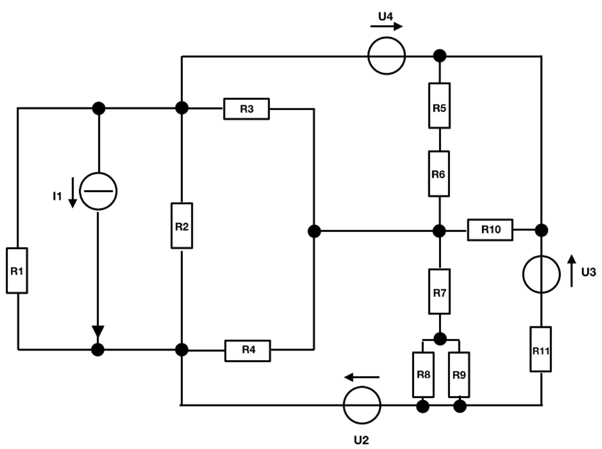
$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{31} = R_3 + R_1 + R_3\frac{R_1}{R_2}$$

(b) Es wird nun die Spannungsquellen U3 entfernt und durch einen Leerlauf ersetzt. Hierdurch fällt die Masche $M4$ weg. Es entsteht ein neues Gleichungssystem mit reduzierter Größe. Das Netzwerk soll mit dem Maschenstromverfahren gelöst werden. Stellen Sie dazu das Gleichungssystem in Matrixform für die angegebenen Maschen auf. Stellen Sie die Matrix allgemein auf und setzen Sie erst danach Werte ein. (2 Punkte)

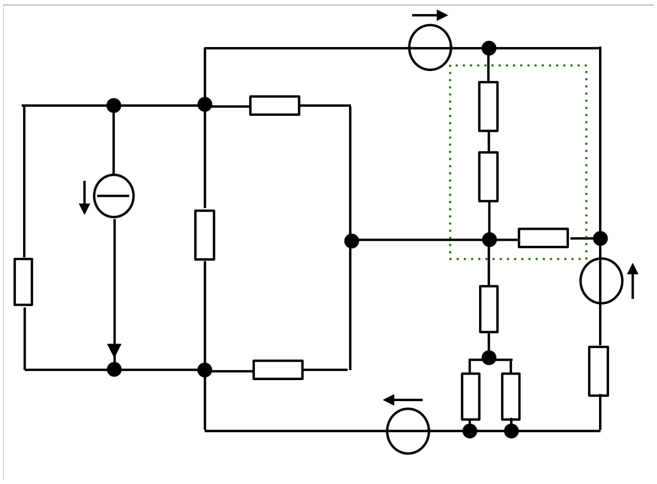
(c) Lösen Sie das Gleichungssystem der 3x3 Matrix mit Hilfe der Cramerschen Regel. Zeigen Sie dabei für mindestens einen Maschenstrom die komplette Matrizenberechnung. Geben Sie alle Ergebnisse der Maschenströme an und berechnen Sie danach die Ströme durch die Widerstände **Rb**, **Rc** und **Rd**. Runden Sie dabei auf 3 Nachkommastellen. (8 Punkte)

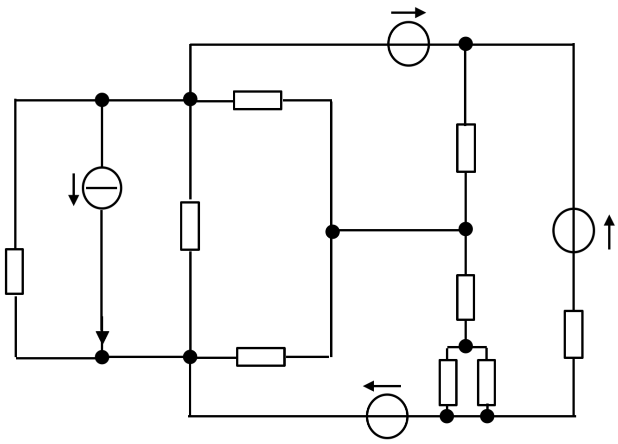
Lösung:

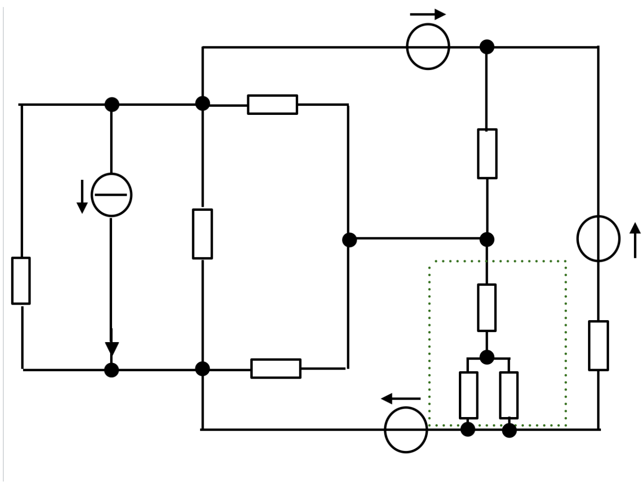
Es wird durch die Zusammenfassung von zwei Widerstandsblöcken eine Vereinfachung von Schaltung 1 vorgenommen:

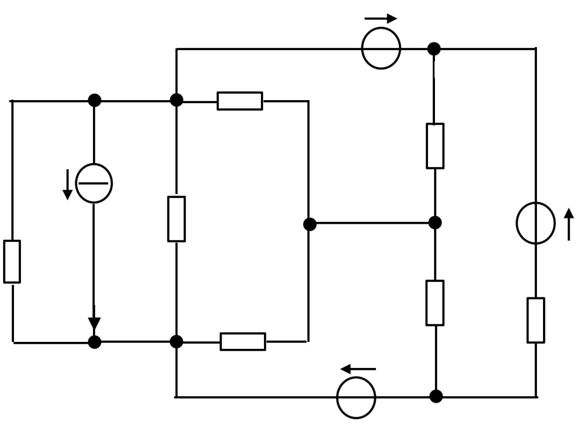


(a)

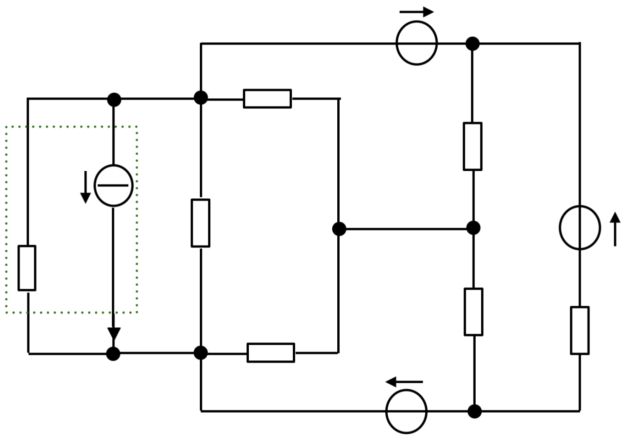


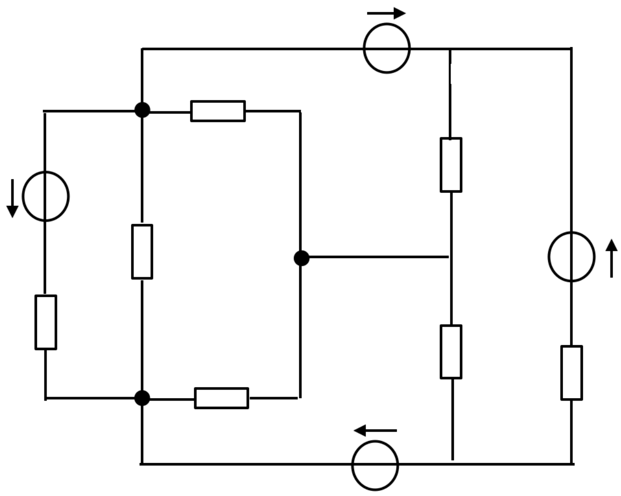




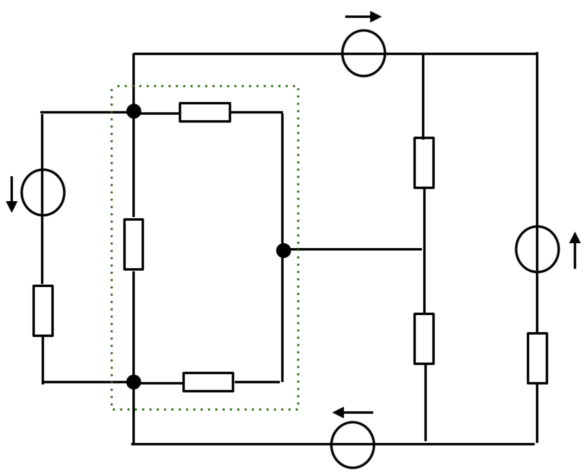


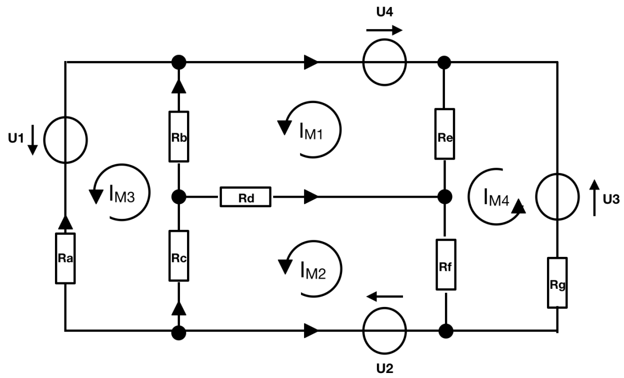
Anschließend muss für das Maschenstromverfahren die Stromquelle zur Spannungsquelle umgewandelt werden:





Schlussendlich wird eine Stern-Dreiecks-Transformation durchgeführt, um zum Schaltbild 2 zu gelangen:





Die Berechnung von R4 erfolgt über die Stern-Dreieck-Transformations Formeln. Nachfolgend sehen Sie zunächst die gewählte Formel in ihrer allgemeinen Form wie sie Ihnen in der Hilfestellung der Aufgabe gegeben ist. Anschließend sehen Sie die daraus resultierende Lösung nach Einsetzen der richtigen Widerstände ($R31 \widehat{=} R4$, $R3 \widehat{=} Rd$, $R1 \widehat{=} Rc$, $R2 \widehat{=} Rb$)

$$R31 = R3 + R1 + R3 \cdot \frac{R1}{R2}$$

$$R4 = Rd + Rc + Rd \cdot \frac{Rc}{Rb}$$
$$R4 = 3 + 4 + 3 \cdot \frac{4}{2} = 13$$

(b) Es gilt $V = IR$.

$$V = \begin{pmatrix} Rb + Rd + Re & -Rd & -Rb \\ -Rd & Rc + Rd + Rf & -Rc \\ -Rb & -Rc & Ra + Rb + Rc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} IM1 \\ IM2 \\ IM3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U4 \\ U2 \\ U3 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 2+3+1 & -3 & -2 \\ -3 & 4+3+2 & -4 \\ -2 & -4 & 1+2+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$$

(c) Die Determinante der Matrix wurde hier mit der Regel von Sarrus berechnet:

$$A = det(V) = 6 \cdot (63 - 16) - (-3) \cdot (-21 - 8) + (-2) \cdot (12 - (-18))$$
$$= 6 \cdot 47 + 3 \cdot -29 - 2 \cdot 30 = 282 - 87 - 60 = 135$$

Maschenstrom 1:

$$A_1 = \det \begin{pmatrix} 10 & -3 & -2 \\ 5 & 9 & -4 \\ -8 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$
$$= 10 \cdot (63 - 16) + 3 \cdot (35 - 32) - 2 \cdot (-20 + 72)$$
$$= 10 \cdot (47) + 3 \cdot (3) - 2 \cdot (52) = 375$$
$$I_{M1} = \frac{A_1}{A} = \frac{375}{135} = \frac{25}{9} A$$

Maschenstrom 2:

$$A_2 = \det\begin{pmatrix} 6 & 10 & -2 \\ -3 & 5 & -4 \\ -2 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$
$$= 6 \cdot (35 - 32) - 10 \cdot (-21 - 8) - 2 \cdot (24 + 10)$$
$$= 6 \cdot (3) - 10 \cdot (-29) - 2 \cdot (34) = 240$$
$$I_{M2} = \frac{A_1}{A} = \frac{240}{135} = \frac{16}{9}A$$

Maschenstrom 3:

$$A_3 = \det\begin{pmatrix} 6 & -3 & 10 \\ -3 & 9 & 5 \\ -2 & -4 & -8 \end{pmatrix}$$
$$= 6 \cdot (-72 + 20) + 3 \cdot (24 + 10) + 10 \cdot (12 + 18)$$
$$= 6 \cdot (-52) + 3 \cdot (34) + 10 \cdot (30) = 90$$
$$I_{M3} = \frac{A_1}{A} = \frac{90}{135} = \frac{2}{3}A$$

Somit gilt $I = \begin{bmatrix} \frac{25}{9} & \frac{16}{9} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} A$

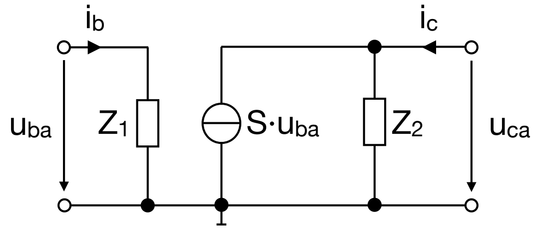
(d)

$$I_{Rb} = -I_{M1} + I_{M3} = -\frac{25}{9} + \frac{2}{3} = -\frac{19}{9}$$
$$I_{Rc} = -I_{M2} + I_{M3} = -\frac{16}{9} + \frac{2}{3} = -\frac{10}{9}$$
$$I_{Rd} = -I_{M2} + I_{M1} = -\frac{16}{9} + \frac{25}{9} = 1$$

Aufgabe 3 **(20 Punkte)**

Wechselstromlehre

Gegeben ist die folgende Schaltung, deren Funktion Sie analysieren möchten. Hierfür sollen Sie auf Ihr LEN-Wissen zurückgreifen.



Außerdem ist die folgende Umrechnungsvorschrift aus dem Skript bekannt:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{Y}_{22}}{det\ \underline{Y}} & -\frac{\underline{Y}_{12}}{det\ \underline{Y}} \\ -\frac{\underline{Y}_{21}}{det\ \underline{Y}} & \frac{\underline{Y}_{11}}{det\ \underline{Y}} \end{bmatrix}$$

(a) Geben Sie die allgemeine Definition der vier Matrixelemente der Admittanzmatrix an. (2 Punkte)

(b) Stellen Sie die Admittanzmatrix für die hier gezeigte Schaltung auf. Zeichnen Sie zwei vereinfachte Schaltbilder, die die Fälle bei der Berechnung der Matrixelemente zeigen. (4 Punkte)

(c) Prüfen Sie, ob der hier gezeigte Vierpol kopplungssymmetrisch und widerstandssymmetrisch ist. (2 Punkte)

(d) Bestimmen Sie die folgenden vier Parameter aus den entsprechenden Vierpolmatrizen: (6 Punkte)

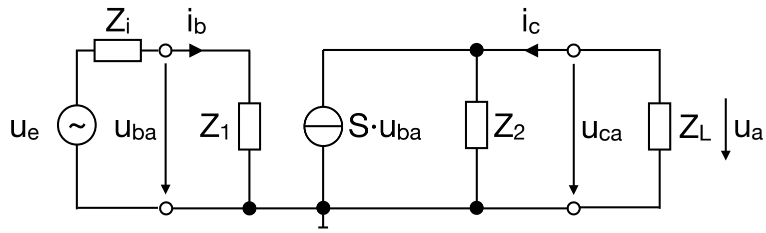
(i) Eingangs-Kurzschlussimpedanz

(ii) Ausgangs-Kurzschlussimpedanz

(iii) Eingangs-Leerlaufimpedanz

(iv) Ausgangs-Leerlaufimpedanz

Nun wird an die Schaltung eine Quelle mit der Spannung u_e und mit dem Innenwiderstand Z_i bzw. ein Verbraucher mit der Impedanz Z_L angeschlossen:



Die Bauteilwerte sind wie folgt angebenen: $Z_i = 50\,\Omega$, $Z_L = Z_2 = 8\,\Omega$. Der Parameter S ist variabel einstellbar.

Arbeiten Sie ab jetzt mit der zuletzt gezeigten erweiterten Schaltung.

(e) Wie müssen Sie Z_1 wählen, um möglichst viel Leistung aus der Quelle in den Vierpol zu übertragen? (1 Punkt)

(f) Bestimmen Sie das Spannungsverhältnis $\frac{u_a}{u_e}$. (2 Punkte)

(g) Worum handelt es sich bei dieser Schaltung? Was bestimmt der Parameter S? Nennen Sie ein typisches Anwendungsbeispiel für einen solchen Aufbau. (3 Punkte)

Lösung:

(a) Die Matrixelemente sind wie folgt definiert:

$$\underline{Y}_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0}$$

$$\underline{Y}_{22} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0}$$

$$\underline{Y}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0}$$

$$\underline{Y}_{12} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0}$$

(b) Die Matrixelemente sind wie folgt definiert:

$$\underline{Y}_{11} = \frac{1}{Z_1}$$

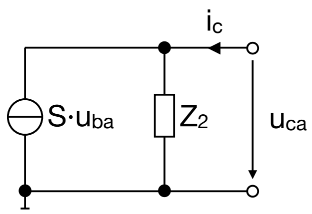
$$\underline{Y}_{22} = \frac{1}{Z_2}$$

$$\underline{Y}_{21} = S$$

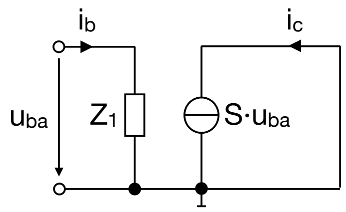
$$\underline{Y}_{12} = 0$$

Um die Matrizen aufzustellen, betrachtet man zwei Fälle:

$u_{ba} = 0$:



$u_{ca} = 0$:



(c) Die hier gezeigte Schaltung ist nicht kopplungssymmetrisch, da $Y_{21} \neq Y_{12}$. Sie ist widerstandssymmetrisch für $Z_1 = Z_2$, sonst nicht.

(d) Die Impedanzen lassen sich aus der Admittanzmatrix ablesen bzw. berechnen:

(i) Eingangs-Kurzschlussimpedanz: $\frac{1}{Y_{11}} = Z_1$

(ii) Ausgangs-Kurzschlussimpedanz: $\frac{1}{Y_{22}} = Z_2$

(iii) Eingangs-Leerlaufimpedanz: $Z_{11} = \frac{Y_{22}}{\det(Y)} = \frac{\frac{1}{Z_2}}{\frac{1}{Z_1 \cdot Z_2}} = Z_1$

(iv) Ausgangs-Leerlaufimpedanz: $Z_{22} = \frac{Y_{11}}{\det(Y)} = \frac{\frac{1}{Z_1}}{\frac{1}{Z_1 \cdot Z_2}} = Z_2$

Für die letzten beiden Elemente wurde die gegebene Umrechnungsformel verwendet. Es gilt: $\det(Y) = \frac{1}{Z_1 \cdot Z_2} - 0 \cdot S = \frac{1}{Z_1 \cdot Z_2}$.

(e) Man wählt den Innenwiderstand der Quelle gleich zur Eingangsimpedanz der Schaltung, also gilt: $Z_1 = Z_i^*$.

(f) Man geht in zwei Schritten vor: zuerst bildet man u_a/u_{ba}, danach noch u_{ba}/u_e und multipliziert die Ergebnisse:

$$S \cdot u_{ba} = \frac{u_a}{(Z_L||Z_2)} = \frac{u_a(Z_L+Z_2)}{(Z_L \cdot Z_2)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{u_a}{u_{ba}} = \frac{S \cdot Z_L \cdot Z_2}{(Z_L+Z_2)}$$

$$\frac{u_{ba}}{u_e} = \frac{Z_1}{(Z_1 + Z_i)}$$

Durch Multiplikation ergibt sich:

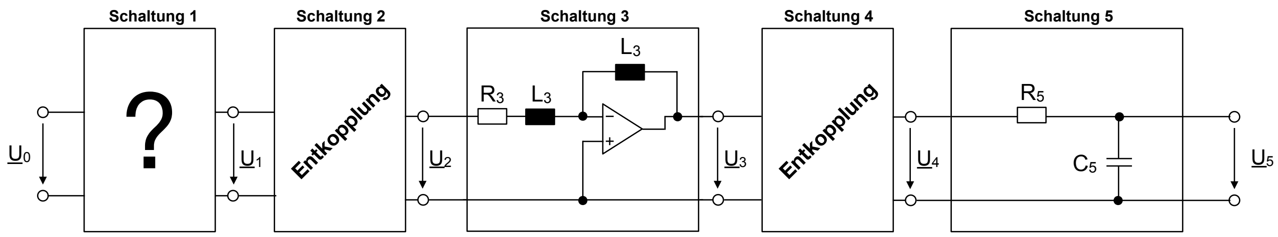
$$\frac{u_{ba}}{u_e} \cdot \frac{u_a}{u_{ba}} = \frac{u_a}{u_e} = \frac{Z_1}{(Z_1 + Z_i)} \cdot \frac{S \cdot Z_L \cdot Z_2}{(Z_L + Z_2)}$$

(g) Es handelt sich um eine Verstärkerschaltung mit gleichzeitiger Impedanzanpassung. Die Verstärkung wird durch den Parameter S eingestellt. Man könnte sie auf folgendes Realbeispiel übertragen: Eingangsspannung: Audiosignal vom Smartphone, das dann verstärkt wird und an einen Lautsprecher (Verbraucher) weitergegeben wird. Andere Beispiele sind auch legitim.

Aufgabe 4 **(21 Punkte)**
Bodediagramm

In diesem Jahr wollen Sie die vorlesungsfreie Zeit nach Semesterende besonders nutzen und haben sich deshalb zu einem Summer-School-Workshop angemeldet. Dort haben Sie nun die Chance, Ihr elektrotechnisches Grundwissen unter Beweis zu stellen: Die aktuelle Aufgabe ist, eine Filterschaltung zu dimensionieren und zu analysieren.

Zu Kursbeginn erhalten Sie von Ihrem Kursleiter einen Übersichtsplan, in dem alle Komponenten der Gesamtschaltung zu sehen sind.



Im ersten Schritt sollen nur die **Schaltungsteile 3) bis 5)** analysiert werden. Ihr Kursleiter hat Ihnen als Vorgabe die Normierungsfrequenz $\omega_3 = \frac{R_3}{L_3} = 1\,\frac{1}{s}$, sowie die Bauteilwerte $R_5 = 1\,k\Omega$ und $C_5 = 10\,\mu F$ angegeben.

(a) Geben Sie die Übertragungsfunktion $\frac{\underline{U}_5}{\underline{U}_2}$ an. Vereinfachen Sie soweit, dass keine Doppelbrüche mehr vorhanden sind. (3 Punkte)
Hinweis: Der Schaltungsteil 4) dient nur der Entkopplung, es gilt $\frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_3} = 1$.

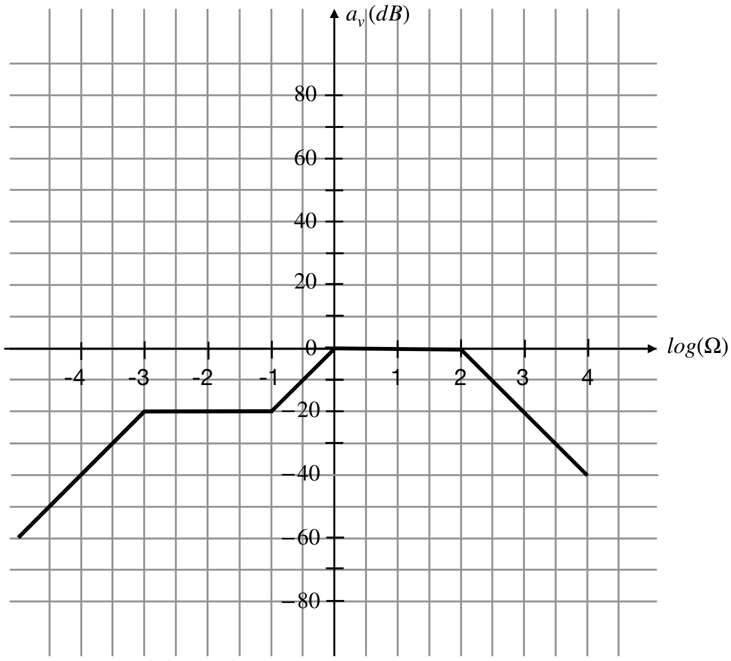
(b) Zeichen Sie das Bodediagramm für die Schaltungsteile 3) bis 5) nach Betrag und Phase. Nutzen Sie dazu Diagramm 4.1 (Amplitudengang) und Diagramm 4.2 (Phasengang). Geben Sie auch a_v in dB und die Phase φ an. Formen Sie die Ausdrücke so um, dass Sie das Bodediagramm direkt zeichnen können. Nutzen Sie hierzu die Rechenregeln für den Logarithmus und das Argument. Verwenden Sie als Normierungsfrequenz ω_3. (6 Punkte)
Hinweis: Die Knickfrequenz der Schaltung 5) entspricht nicht der Normierungsfrequenz ω_3.

(c) Die Schaltungen 2) und 4) werden als Zweitore zur „Entkopplung“ bezeichnet. Welche Schaltung kann für diesen Zweck verwendet werden? Benennen und skizzieren Sie. (2 Punkte)

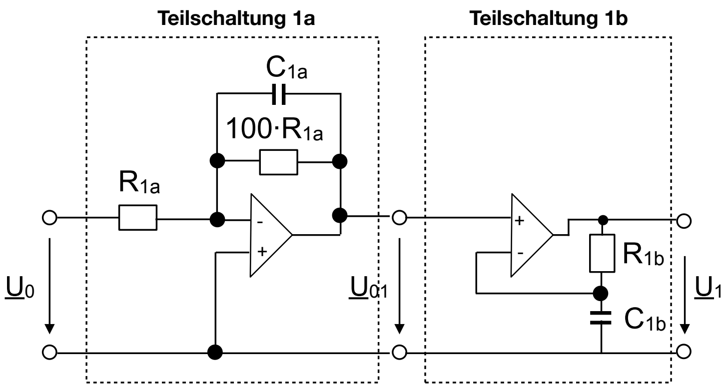
(d) Als praktische Kenngröße für einen Bandpass ist die 3-dB-Bandbreite üblich. Geben Sie diese in Hz an und begründen Sie. (2 Punkte)

Nun soll die **gesamte Schaltung** betrachtet werden.

Schaltungsteil 1) soll dazu genutzt werden, das Verhalten der gesamten Filterschaltung weiter zu verbessern. Das Ziel Ihres zweiten Aufgabenblockes ist, den im folgenden Bodediagramm gezeigten Amplitudengang zu erreichen.



Dazu hat Ihr Kursleiter Schaltungsteil 1) nochmal in zwei Komponenten aufgeteilt:



(e) Skizzieren Sie den Amplitudengang der beiden Teilschaltungen 1a) und 1b) getrennt voneinander. *Hinweis: Für diese Teilaufgabe können Sie die Normierungsfrequenz selbst sinnvoll wählen. Skizzieren Sie den Amplitudenverlauf auf Ihrem Lösungspapier.* (3 Punkte)

(f) Wie müssen die Knickfrequenzen der beiden Teilschaltungen $f_{c,1a}$ und $f_{c,1b}$ gewählt werden, damit sich der gewünschte Amplitudengang der Gesamtschaltung ergibt? Begründen Sie! Geben Sie die Werte für $f_{c,1a}$ und $f_{c,1b}$ in Hz an. (4 Punkte)

(g) Die in Schaltungsteil 1b) gezeigte Schaltung sollte in der Praxis nicht als eigenständige Schaltung betrieben werden. Wieso? Begründen Sie. (1 Punkt)

Lösung:

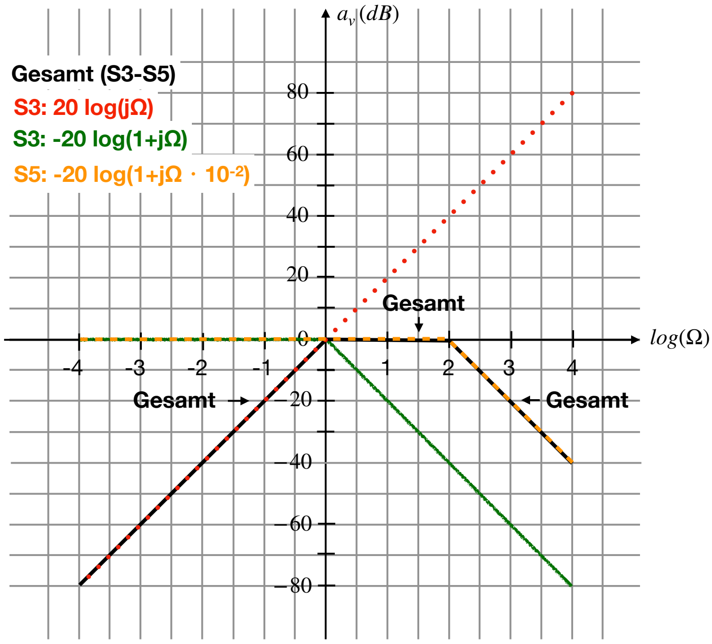
(a) Es gilt:

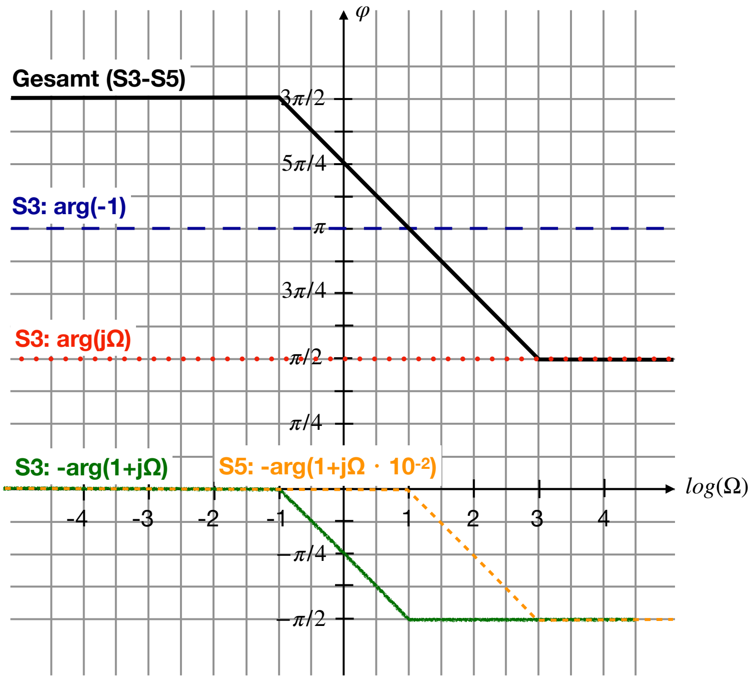
$$\frac{U_3}{U_2} = -\frac{j\omega L_3}{R_3 + j\omega L_3}$$

$$\frac{U_5}{U_4} = \frac{\frac{1}{j\omega C_5}}{R_5 + \frac{1}{j\omega C_5}} = \frac{1}{1 + j\omega R_5 C_5}$$

Und mit $\frac{U_4}{U_3} = 1$ gilt: $\frac{U_5}{U_2} = -\frac{j\omega L_3}{R_3 + j\omega L_3} \frac{1}{1+j\omega R_5 C_5}$

(b) Amplitudengang und Phasengang siehe Abbildung:

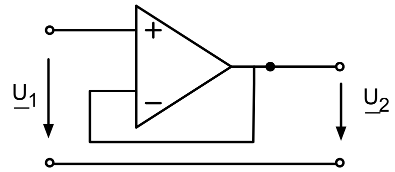




Normierung: Mit $\omega_5 = 100 \cdot \omega_3$ gilt $\log(\frac{\omega_5}{\omega_3}) = 2$. Somit ist die der Knick von Schaltungsteil 5) bei $\log(\Omega) = 2$ zu finden.

$a_v = 20 \cdot \log |\frac{U_5}{U_2}| = 20 \cdot \log |j\Omega| - 20 \cdot \log |1 + j\Omega| - 20 \cdot \log |1 + j10^{-2}\Omega|$
$\varphi = \varphi_Z - \varphi_N = \pi + \frac{\pi}{2} - \arg(1 + j\Omega) - \arg(1 + j10^{-2}\Omega) = \pi + \frac{\pi}{2} - \arctan(\Omega) - \arctan(10^{-2}\Omega)$

(c) Die gesuchte Schaltung ist ein Spannungsfolger bzw. Impedanzwandler

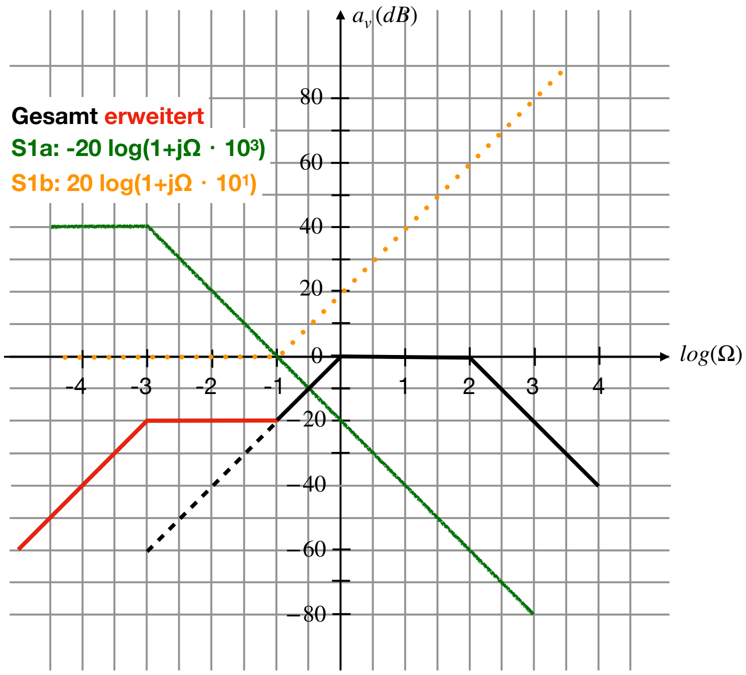


(d) Da bei der Knickfrequenz eine Dämpfung von $3\,dB$ vorliegt, kann die Bandbreite einfach abgelesen werden. Zwischen $\log(\Omega) = 0$ und $\log(\Omega) = 2$ liegen $b_{w3} = 100\,Hz$.

(e) Um den Amplitudengang der beiden Schaltungen aufzuzeichnen, kann die jeweilige Übertragungsfunktion aufgestellt werden. Es gilt:

$$\frac{U_{01}}{U_0} = -\frac{C_{1a}||100 \cdot R_{1a}}{R_{1a}} = -100\frac{1}{1 + j\Omega_{1a}}$$
$$\frac{U_1}{U_{01}} = \frac{R_{1b} + \frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}} = 1 + j\Omega_{1b}$$

Der Amplitudengang beider Teilschaltungen ist in der folgenden Abbildung bereits mit korrekter Knickfrequenz abgebildet:



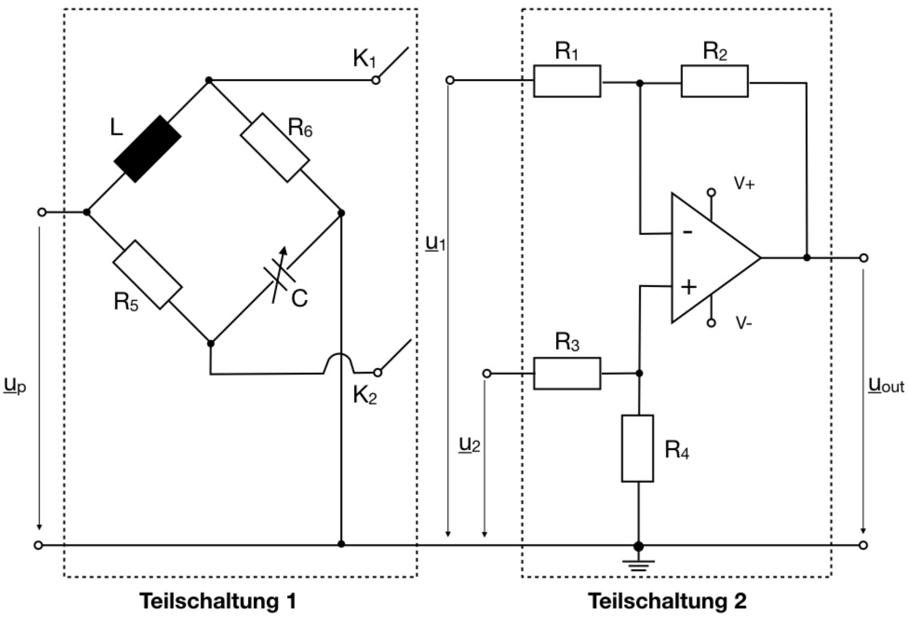
(f) Es gilt: $\log(\Omega_{c,1a}) = -3$, da der TP dann so kompensiert, dass das zweite Plateau entsteht. Außerdem $\log(\Omega_{c,1b}) = -1$, damit der Verstärker ab diesem Punkt den Tiefpass wieder kompensiert. Umrechnung ergibt: $\omega_{c,1a} = 0,1\,\frac{1}{s}$, also $f_{c,1a} = \frac{0,1}{2\pi}\,Hz = 1,5910^{-2}\,Hz$. Analog $f_{c,1b} = 1,5910^{-4}\,Hz$.

(g) Eingangsspannungen hoher Frequenz werden sehr stark verstärkt. Insbesondere bei Rauschen, das an jedem Schaltungseingang vorliegt ist das ein Problem. Außerdem geht die Verstärkung für große Frequenzen gegen unendlich. Auch dies ist in der Praxis nicht realisierbar, es treten immer Sättigungseffekte auf.

Aufgabe 5 **(16 Punkte)**

Operationsverstärker

Die nachfolgend abgebildete Operationsverstärkerschaltung setzt sich aus einem idealen Operationsverstärker sowie den Widerständen R_1 bis R_6, der Induktivität L und der variablen Kapazität C zusammen. Der ideale Operationsverstärker ist an die Versorgungsspannungen $V+ = 5\,\text{V}$ und $V- = -5\,\text{V}$ angeschlossen:



Die Schaltung besteht aus Teilschaltung 1 und Teilschaltung 2, welche durch zwei Schalter verbunden sind. Alle nachfolgenden Aufgabenteile beziehen sich auf die oben abgebildete Schaltung:

(a) Benennen Sie Teilschaltung 2. (1 Punkt)

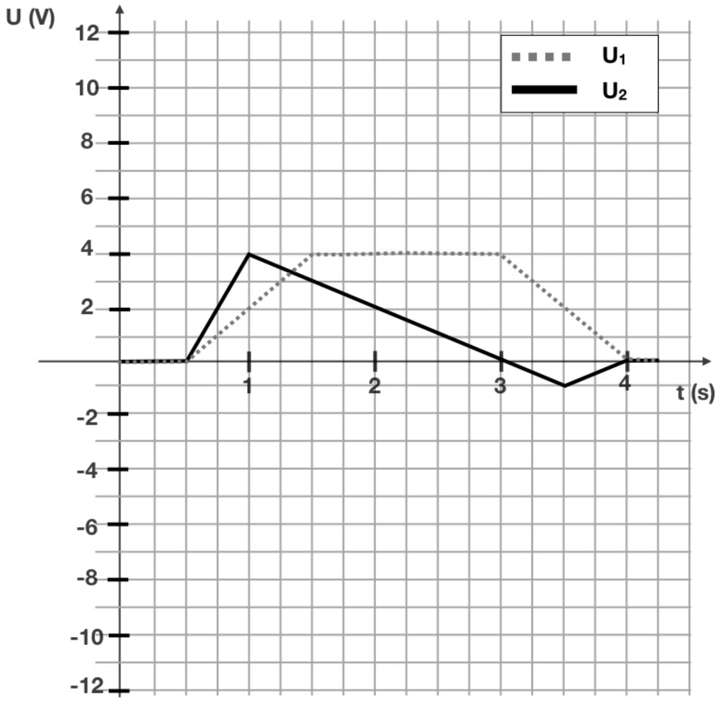
(b) Was gilt für den Eingangswiderstand eines idealen Operationsverstärkers? (1 Punkt)

(c) Zeigen Sie, dass für die Übertragungsfunktion von Teilschaltung 2 gilt: (5 Punkte)

$$\underline{u}_{out} = \frac{R_4}{R_1} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} \cdot \underline{u}_2 - \frac{R_2}{R_1} \cdot \underline{u}_1$$

(d) Aus dem Datenblatt von Teilschaltung 2 kann entnommen werden, dass es sich bei R_1 und R_3 um Widerstände von $40\,\text{k}\Omega$ handelt. Außerdem sei bekannt, dass sich $\underline{u}_{out}$ aus der Subtraktion der doppelten Eingangsspannung $\underline{u}_1$ von der doppelten Eingangsspannung $\underline{u}_2$ ergibt. Bestimmen Sie die Bauteilwerte von R_2 und R_4. (3 Punkte)
Hinweis: Nutzen Sie die im vorangegangenen Aufgabenteil hergeleitete Übertragungsfunktion.

(e) Gegeben seien nun die Eingangsspannungen $\underline{u}_1$ und $\underline{u}_2$ durch die folgende Abbildung: (2 Punkte)



Es gelten weiterhin die Angaben aus den vorangegangenen Aufgabenteilen. Zeichen Sie die zugehörige Ausgangsspannung $\underline{u}_{out}$ in Diagramm 5.1 ein.

(f) Zur Betrachtung von Teilschaltung 1 bleiben die beiden Schalter zunächst geöffnet. Die Potentialdifferenz zwischen den beiden Klemmen K1 und K2 betrage 0 V, d.h. die Brücke sei abgeglichen. Es gelte $R_5 = R_6 = 200\,\Omega$ sowie $C = 100\,\text{nF}$. Bestimmen Sie L. (2 Punkte)

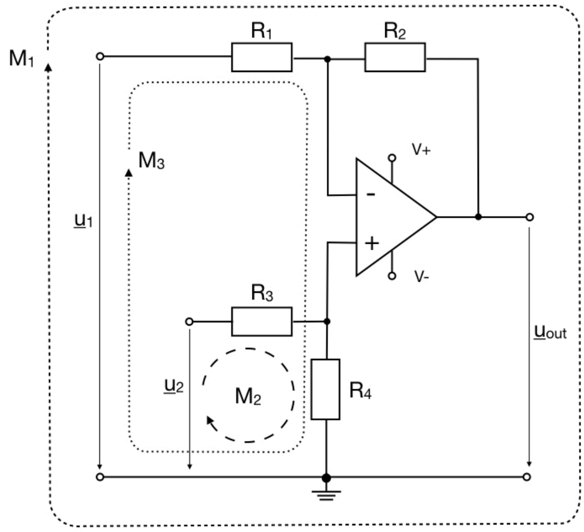
(g) Für welchen Zweck kann Teilschaltung 1 genutzt werden? Warum ist es sinnvoll, Teilschaltung 1 für diesen Zweck durch Teilschaltung 2 zu ergänzen? (2 Punkte)

Lösung:

(a) Bei Teilschaltung 2 handelt es sich um einen Differenzverstärker.

(b) Für den Eingangswiderstand eines idealen Operationsverstärkers gilt $R_{ein} = \infty$.

(c) Zur Herleitung der Übertragungsfunktion wird das Maschenstromverfahren eingesetzt:



Teilschaltung 2

$$
\begin{aligned}
M1: &\quad \underline{u}_1 = R1 \cdot \left(I_1^M + I_3^M\right) + R_2 \cdot I_1^M + \underline{u}_{out} \\
M2: &\quad \underline{u}_2 = R_3 \cdot I_2^M + R_4 \cdot \left(I_2^M + I_3^M\right) \\
M3: &\quad \underline{u}_1 = R_1 \cdot \left(I_1^M + I_3^M\right) + R_4 \cdot \left(I_2^M + I_3^M\right)
\end{aligned}
$$

Da kein Strom in den Operationsverstärker fließt, muss $I_3^M = 0\,\mathrm{A}$ gelten.

$$
\begin{aligned}
M1: &\quad \underline{u}_1 = R_1 \cdot I_1^M + R_2 \cdot I_1^M + \underline{u}_{out} \\
M2: &\quad \underline{u}_2 = R_3 \cdot I_2^M + R_4 \cdot I_2^M \\
M3: &\quad \underline{u}_1 = R_1 \cdot I_1^M + R_4 \cdot I_2^M
\end{aligned}
$$

Umordnen der Variablen ergibt:

$$
\begin{aligned}
M1: &\quad \underline{u}_1 - \underline{u}_{out} = (R_1 + R_2) \cdot I_1^M \\
M2: &\quad \underline{u}_2 = (R_3 + R_4) \cdot I_2^M \\
M3: &\quad \underline{u}_1 = R_1 \cdot I_1^M + R_4 \cdot I_2^M
\end{aligned}
$$

Aus M1 folgt:

$$I_1^M = \frac{\underline{u}_1 - \underline{u}_{out}}{R_1 + R_2} \qquad (*)$$

Aus M2 folgt:

$$I_2^M = \frac{\underline{u}_2}{R_3 + R_4} \qquad (**)$$

(*) und (**) in M3 einsetzen:

$$\begin{aligned}
\underline{u}_1 &= R_1 \cdot \frac{\underline{u}_1 - \underline{u}_{out}}{R_1 + R_2} + R_4 \cdot \frac{\underline{u}_2}{R_3 + R_4} \\
\underline{u}_1 &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \underline{u}_1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \underline{u}_{out} + \frac{R_4}{R_3 + R_4} \underline{u}_2 \\
\frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \underline{u}_{out} &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \underline{u}_1 - \underline{u}_1 + \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \underline{u}_2 \\
\frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \underline{u}_{out} &= \frac{R_1 - R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \cdot \underline{u}_1 + \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \underline{u}_2 \\
\underline{u}_{out} &= \frac{-R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1} \underline{u}_1 + \frac{R_4}{R_1} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} \cdot \underline{u}_2 \\
\underline{u}_{out} &= \frac{R_4}{R_1} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} \cdot \underline{u}_2 - \frac{R_2}{R_1} \cdot \underline{u}_1
\end{aligned}$$

(d) Aus dem Aufgabentext entnimmt man: $\underline{u}_{out} = 2 \cdot \underline{u}_2 - 2 \cdot \underline{u}_1$.
Durch Koeffizientenvergleich mit der im vorangegangenen Aufgabenteil hergeleiteten Übertragungsfunktion erhält man die folgenden beiden Gleichungen:

$$\frac{R_4}{R_1} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} = 2 \qquad (\#)$$

und

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 \qquad (\#\#)$$

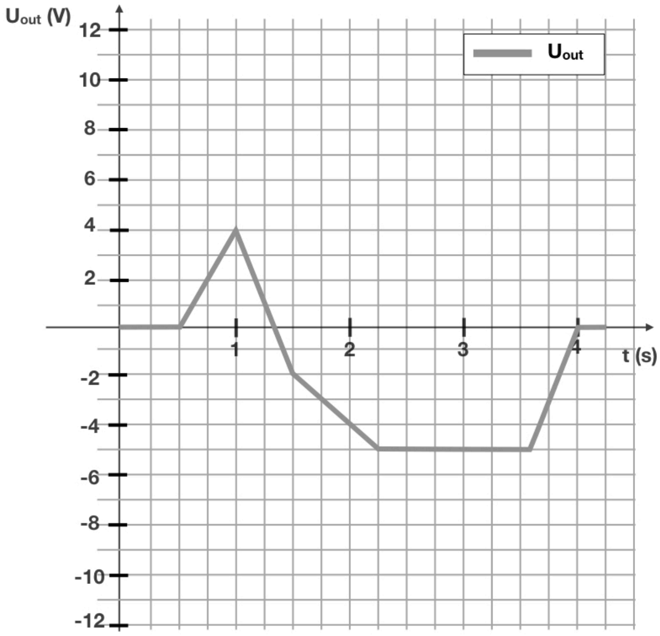
Aus Gleichung (##) und $R_1 = 40\,\mathrm{k\Omega}$ folgt:

$$\frac{R_2}{40\,\mathrm{k\Omega}} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad R_2 = 80\,\mathrm{k\Omega}$$

Einsetzen in (#) ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{R_4}{40\,\mathrm{k\Omega}} \cdot \frac{40\,\mathrm{k\Omega} + 80\,\mathrm{k\Omega}}{40\,\mathrm{k\Omega} + R_4} &= 2 \\
\frac{R_4}{40\,\mathrm{k\Omega} + R_4} &= \frac{2}{3} \\
\frac{40\,\mathrm{k\Omega} + R_4}{R_4} &= \frac{3}{2} \\
\frac{40\,\mathrm{k\Omega}}{R_4} &= \frac{1}{2} \\
R_4 &= 80\,\mathrm{k\Omega}
\end{aligned}$$

(e) Die resultierende Ausgangsspannung ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



(f) Die Spannungsteilerregel liefert:

$$\underline{u}_{K1} == \frac{R_6}{R_6 + j\omega L} \cdot \underline{u}_p$$

und

$$\underline{u}_{K2} == \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_5 + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \underline{u}_p$$

Bei erfüllter Abgleichbedingung folgt mit $\underline{u}_{K1} = \underline{u}_{K2}$

$$\begin{aligned}
\frac{R_6}{R_6 + j\omega L} \cdot \underline{u}_p &= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_5 + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \underline{u}_p \\
\frac{R_6}{R_6 + j\omega L} \cdot \underline{u}_p &= \frac{1}{1 + j\omega C R_5} \cdot \underline{u}_p \\
\frac{R_6}{R_6 + j\omega L} &= \frac{1}{1 + j\omega C R_5} \\
\frac{R_6 + j\omega L}{R_6} &= \frac{1 + j\omega C R_5}{1} \\
1 + \frac{j\omega L}{R_6} &= 1 + j\omega C R_5 \\
L &= C R_5 R_6 \\
L &= 100\,\mathrm{nF} \cdot 200\,\Omega \cdot 200\,\Omega = 4\,\mathrm{mH}.
\end{aligned}$$

Die Herleitung der Abgleichbedingung war nicht gefordert.

(g) Teilschaltung 1 kann dafür genutzt werden, eine unbekannte Induktivität L bei bekanntem R_5, R_6 und C zu bestimmen. Hierfür wird der variable Kondensator C so gewählt, dass die Potentialdifferenz zwischen den beiden Klemmen K1 und K2 gerade 0 V beträgt. Durch Hinzufügen des Differenzverstärkers wird die Messgenauigkeit erhöht, indem die Potentialdifferenz verstärkt wird und C genauer eingestellt werden kann.