

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel Übungsleiter: M.Sc. Jochen Brenneisen

Klausur

27. Juli 2020
Beginn: 9:00 Uhr

Familienname:	AUFKLEBER
Vorname:	
Matrikel-Nr.:	

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem nicht programmierbaren Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein!
Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare!
Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

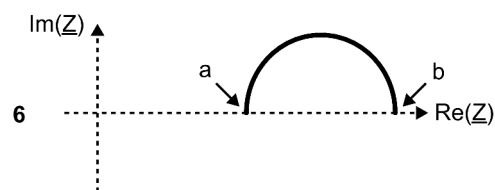
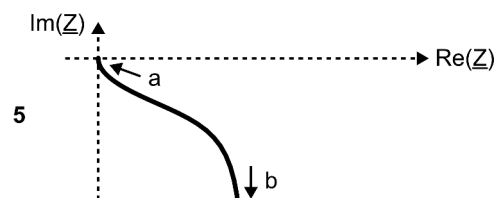
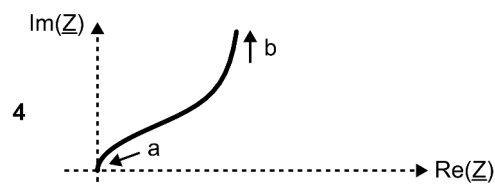
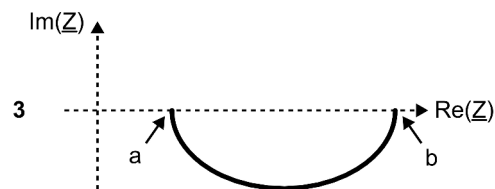
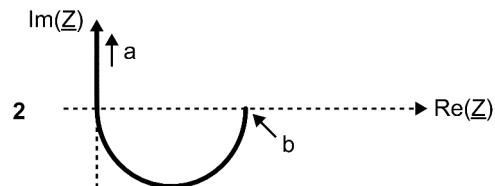
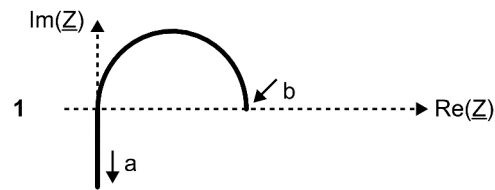
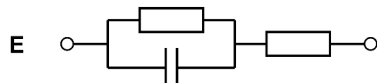
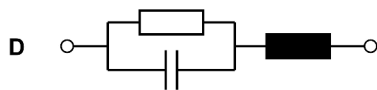
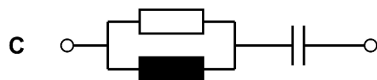
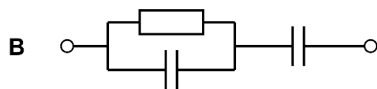
Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	6	
2	16	
3	16	
4	20	
5	22	
6	14	
Gesamt:	94	

Aufgabe 1 Ortskurve

(6 Punkte)

Gegeben seien folgende Schaltungen und Ortskurven:



- (a) Finden Sie zu jeder Schaltung A-F die zugehörige Impedanzortskurve 1-6 auf der rechten Seite. Tragen Sie die Zuordnung in Tabelle 1.1 ein. (3 Punkte)
- (b) Die Startpunkte ($\omega = 0$) und Endpunkte ($\omega \rightarrow \infty$) sind in den Ortskurven 1-6 entweder mit a oder b gekennzeichnet. Geben Sie in Tabelle 1.2 an, bei welchem der beiden Punkte es sich um den Endpunkt ($\omega \rightarrow \infty$) handelt. (3 Punkte)

Lösung:

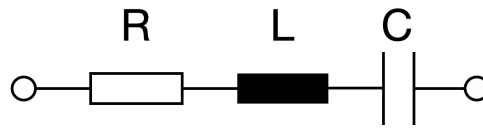
Schaltung	Ortskurve: 1-6
A	4
B	5
C	1
D	2
E	3
F	6

Ortskurve	Endpunkt ($\omega \rightarrow \infty$): a oder b
1	b
2	a
3	a
4	b
5	a
6	b

Aufgabe 2
Ortskurve

(16 Punkte)

Gegeben sei nun die folgende Schaltung:



- (a) Berechnen Sie die Impedanz $\underline{Z}(R, L, C)$ der Gesamtschaltung und trennen Sie die Gleichung nach Real- und Imaginärteil. (2 Punkte)
- (b) Zeichnen Sie die Ortskurve der Impedanz und der Admittanz in die Diagramme 2.1 und 2.2 ein. Beschriften Sie außerdem jeweils den Schnittpunkt mit der x-Achse und markieren Sie die Grenzwerte $\omega = 0$ und $\omega \rightarrow \infty$. (4 Punkte)

Im Folgenden soll nun die Güte der Schaltung bestimmt werden. Die Güte Q dieser Schaltung ist definiert durch die Formel:

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_2}$$

Dabei ist ω_0 die Resonanzkreisfrequenz. ω_1 ist die Kreisfrequenz, bei der die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung gerade $+45^\circ$ beträgt. ω_2 ist wiederum die Kreisfrequenz, bei der die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung gerade -45° beträgt.

- (c) Bestimmen Sie zunächst die Resonanzkreisfrequenz ω_0 in Abhängigkeit der Bauteile. Begründen Sie! (2 Punkte)
- (d) Zeigen Sie, dass für ω_1 und ω_2 folgende Gleichungen gelten: (5 Punkte)

$$\omega_1 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_2 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

- (e) Bestimmen Sie nun $Q(R, L, C)$ in Abhängigkeit von R , L und C . (2 Punkte)
Hinweis: Verwenden Sie die Gleichungen aus Aufgabenteil d) für die Frequenzen ω_1 und ω_2 .
- (f) Berechnen Sie R so, dass die Güte $Q = 2$ beträgt. Die anderen Bauteile haben hierfür folgende Werte: $L = 200 \text{ mH}$, $C = 50 \text{ nF}$. (1 Punkt)

Lösung:

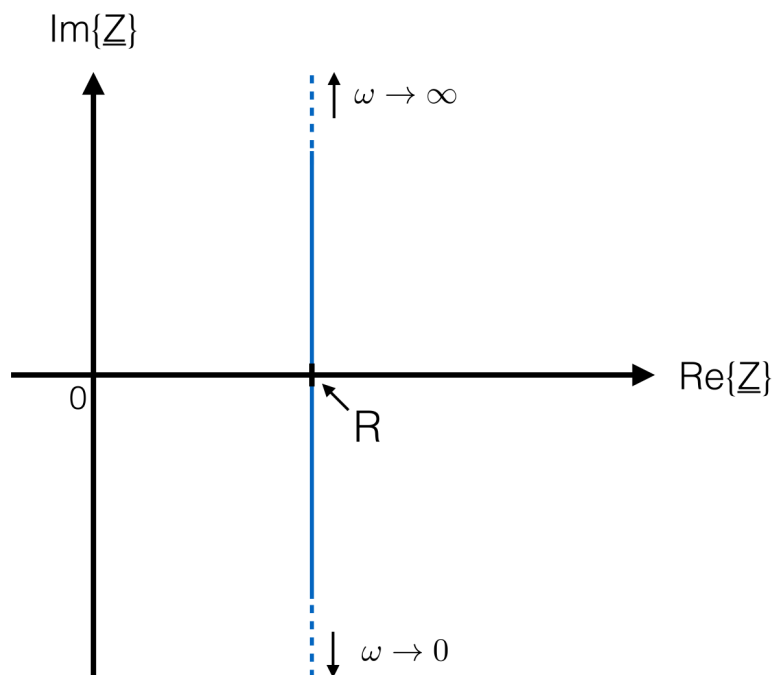
- (a) Die Gesamtimpedanz kann durch Addition der Teilimpedanzen berechnet werden, da es sich um eine Serienschaltung handelt:

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L$$

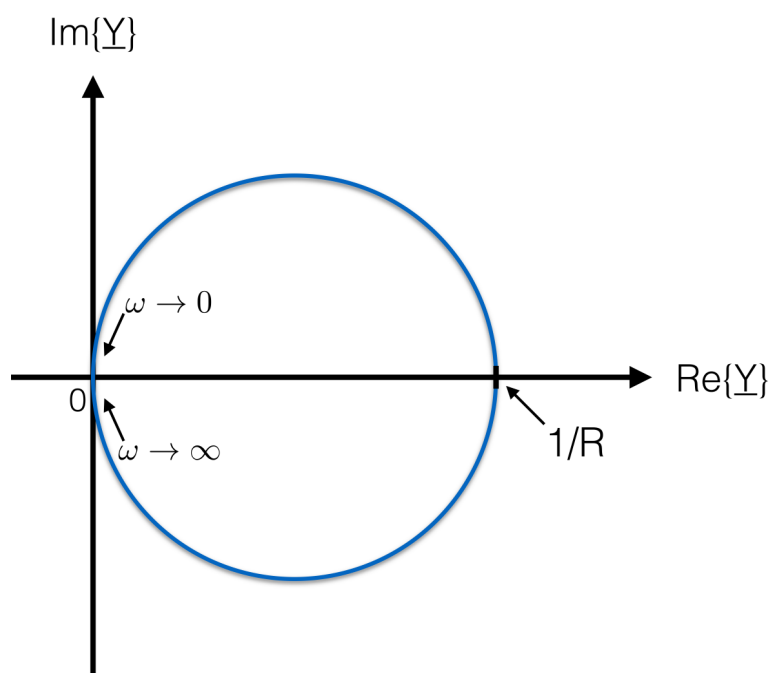
Getrennt nach Imaginär- und Realteil erhält man:

$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

(b) Die Impedanzortskurve ergibt sich wie folgt:



Die Admittanzortskurve kann durch Spiegelung am Einheitskreis bestimmt werden:



(c) Für die Resonanzkreisfrequenz ω_0 gilt:

$$\operatorname{Im}(Z) = 0$$

Daraus folgt:

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

Stellt man diese Gleichung nach ω_0 um, erhält man die Gleichung für die Resonanzkreisfrequenz:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

- (d) Für eine Phasenverschiebung von $+45^\circ$ zwischen Strom und Spannung gilt:

$$\operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\}$$

Setzt man die Ergebnisse aus Aufgabenteil a) ein, erhält man:

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = R$$

Zieht man R auf die linke Seite und multipliziert die Gleichung mit ω_1 , erhält man:

$$\omega_1^2 L - \omega_1 R - \frac{1}{C} = 0$$

Diese quadratische Gleichung kann mit den allgemeinen Lösungsformeln für quadratische Gleichungen gelöst werden. Man erhält:

$$\omega_1 = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

Der Term unter Wurzel ist für alle R , L und C größer als der Term vor der Wurzel. Da eine Frequenz nicht negativ sein kann gilt:

$$\omega_1 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

Für eine Phasenverschiebung von -45° zwischen Strom und Spannung gilt:

$$-\operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\}$$

$$-\left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right) = R$$

$$\omega_2^2 L + \omega_2 R - \frac{1}{C} = 0$$

$$\omega_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

Auch hier ist nur ein positives Vorzeichen vor der Wurzel sinnvoll:

$$\omega_2 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

- (e) Mit den Gleichungen aus Aufgabenteil c) und d) ergibt sich:

$$Q(R, L, C) = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

- (f) Durch Umstellen der Gleichung nach R und Einsetzen der gegebenen Werte erhält man:

$$R = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} = 1 \text{ k}\Omega$$

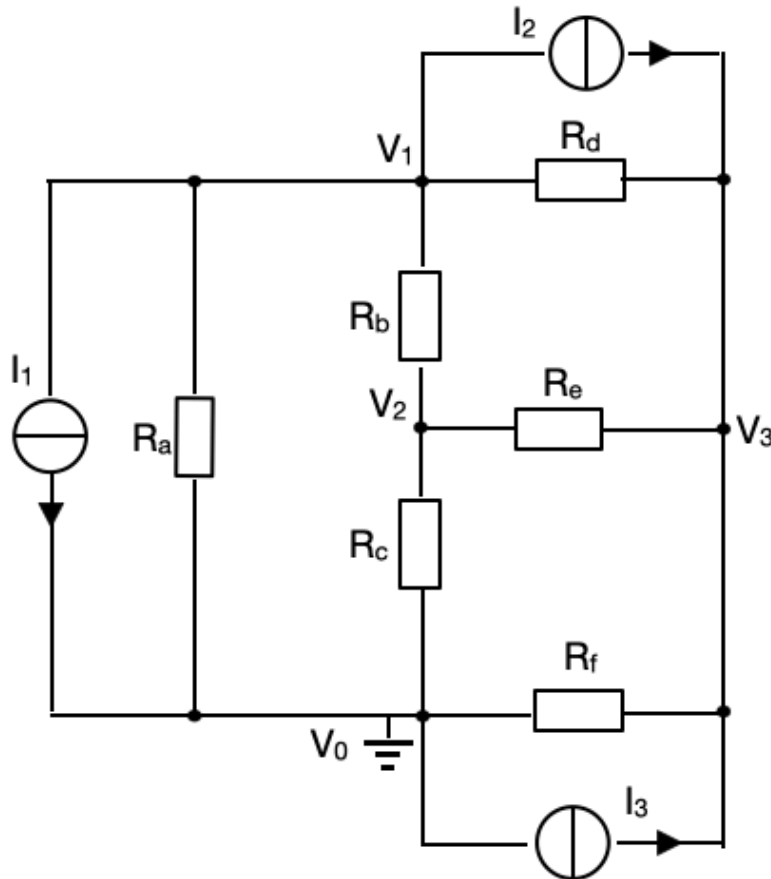
Aufgabe 3

Netzwerk

(16 Punkte)

Gegeben sei die folgende Schaltung und ihre Bauteilwerte:

Schaltung 1

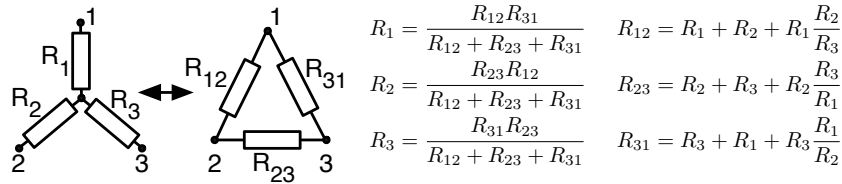


$$R_a = R_b = R_c = R_d = R_e = R_f = 1 \Omega$$

$$I_1 = 2 \text{ A}; I_2 = 6 \text{ A}; I_3 = 22 \text{ A}$$

- (a) Nennen Sie die Kirchhoff'schen Gleichungen. (2 Punkte)
- (b) Die Schaltung soll mit Hilfe des formalisierten Knotenpunktverfahrens analysiert werden. Gehen Sie wie folgt vor: (9 Punkte)
- i) Geben Sie zuerst das Gleichungssystem in allgemeiner Form an. Setzen Sie dann Zahlenwerte ein.
 - ii) Bestimmen Sie die Potentiale V_1 , V_2 , V_3 . Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe der Cramer'schen Regel. Berechnen Sie mindestens eine Determinante schriftlich.
- (c) Vereinfachen Sie nun Schaltung 1. Gehen Sie wie folgt vor: (5 Punkte)
- i) Wandeln Sie alle Stromquellen in Spannungsquellen um. Zeichnen Sie die Schaltung neu. Beachten Sie die richtige Wahl der Pfeilrichtungen. Berechnen Sie die Spannungen der drei resultierenden Spannungsquellen.
 - ii) Führen Sie zeichnerisch für das Dreieck (R_b , R_c , R_e) eine Stern-Dreiecks-Transformation durch. Zeichnen Sie nur das resultierende Schaltbild.

- iii) Berechnen Sie nun mit Hilfe der Stern-Dreiecks-Transformation den Wert der Dreieckswiderstände R_{ij} . Geben Sie die verwendete Gleichung an.



Lösung:

- (a) i) Die Summe aller Ströme, die auf einen Knoten zulaufen, muss Null sein.
 ii) Die Summe aller Spannungen in einer Masche muss Null sein.

Es gilt $U = IR$, $I = \frac{1}{R}U = GU$.

i)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_d} & -\frac{1}{R_b} & -\frac{1}{R_d} \\ -\frac{1}{R_b} & \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_e} & -\frac{1}{R_e} \\ -\frac{1}{R_d} & -\frac{1}{R_e} & \frac{1}{R_d} + \frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_1 - I_2 \\ 0 \\ I_2 + I_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & -\frac{1}{1} \\ -\frac{1}{1} & \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} & -\frac{1}{1} \\ -\frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 6 \\ 0 \\ 6 + 22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}$$

- ii) Die Determinante der Matrix wurde hier mit der Regel von Sarrus berechnet:

$$\begin{aligned}
 \det(G) &= 3 \cdot (9 - 1) - (-1) \cdot (-3 - 1) + (-1) \cdot (1 + 3) \\
 &= 3 \cdot 8 - (-1) \cdot (-4) - 1 \cdot 4 = 24 - 4 - 4 = 16
 \end{aligned}$$

V1:

$$\det(G_1) = \det \begin{pmatrix} -8 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 28 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 48$$

$$V_1 = \frac{\det(G_1)}{\det(G)} = \frac{48}{16} = 3V$$

V2:

$$\det(G_2) = \det \begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 28 & 3 \end{pmatrix} = 80$$

$$V_2 = \frac{\det(G_2)}{\det(G)} = \frac{80}{16} = 5V$$

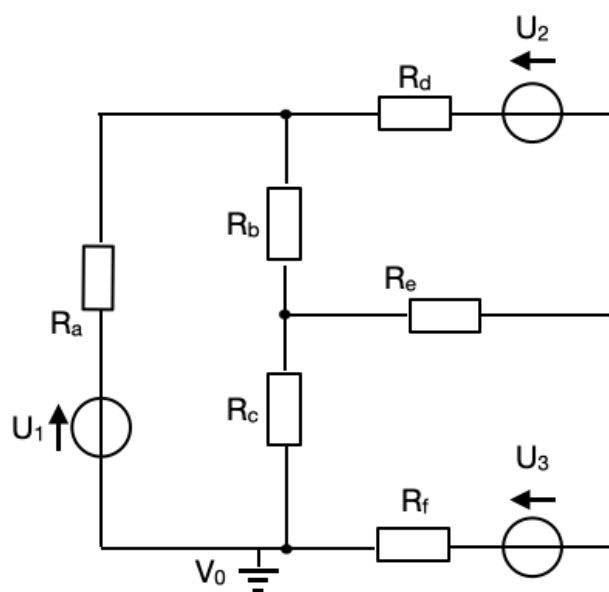
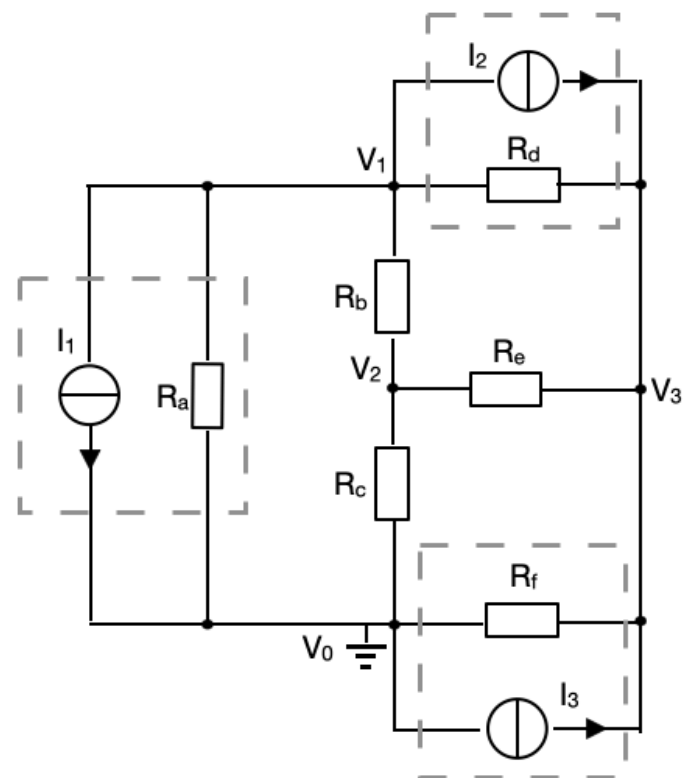
V3:

$$\det(G_3) = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -8 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 28 \end{pmatrix} = 192$$

$$V_3 = \frac{\det(G_3)}{\det(G)} = \frac{192}{16} = 12V$$

Somit gilt $V = [3 \ 5 \ 12] V$

(b) i) Schaltung 1:



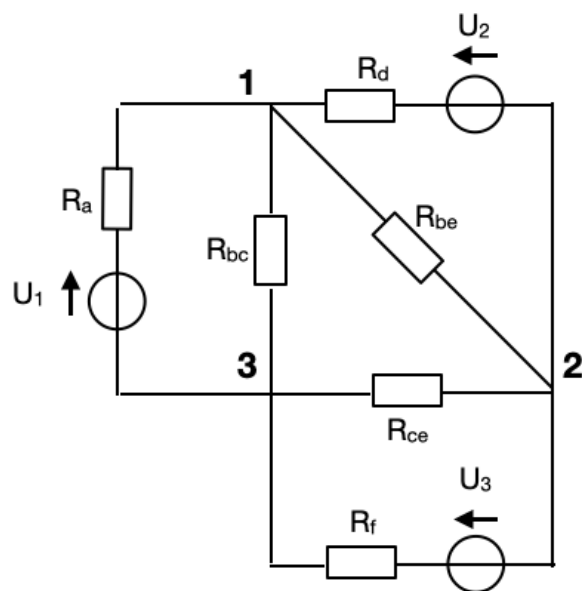
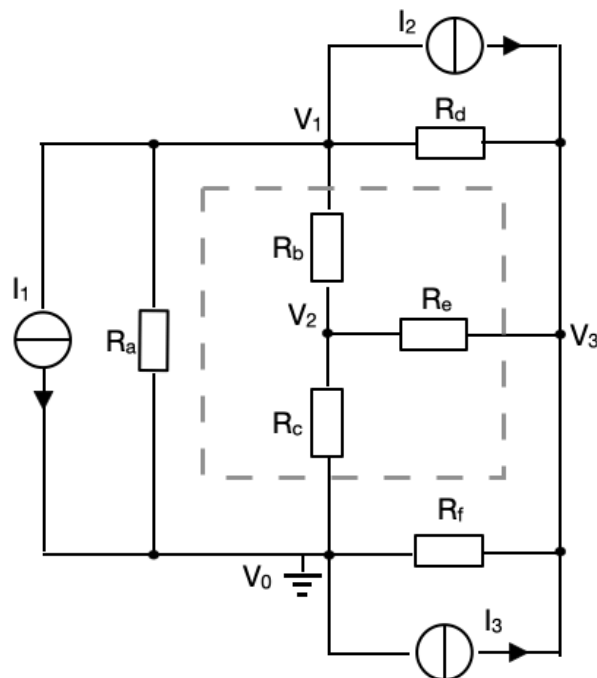
Es gilt $V = IR$

$$V_1 = I_1 R_a = 2 \cdot 1 = 2 \text{ V}$$

$$V_2 = I_2 R_d = 6 \cdot 1 = 6 \text{ V}$$

$$V_3 = I_3 R_f = 22 \cdot 1 = 22 \text{ V}$$

ii) Schaltung 2:



$$R_{12} = R_1 + R_2 + R_1 \frac{R_2}{R_3}$$

$$R_{ij} = R_{bc} = R_{ce} = R_{be} = R_b + R_e + R_b \frac{R_e}{R_c}$$

$$R_{ij} = 1 + 1 + 1 \frac{1}{1} = 3 \text{ } \Omega$$

Aufgabe 4**(20 Punkte)****Komplexe Wechselstromlehre**

Sie erhalten die Aufgabe, die Schaltung eines Praktikanten zu überprüfen. Dieser sollte eigentlich eine Blindleistungskompensation für einen Wechselstrommotor entwerfen. Der Einfachheit wegen soll der Motor durch ein RL-Glied modelliert werden, die Anschlusskabel durch einen Widerstand.

Aus diesen Vorgaben hat der Praktikant ein Ersatzschaltbild gezeichnet. Die vom Praktikanten entworfene Kompensation \underline{Z}_K ist bisher noch unbekannt.

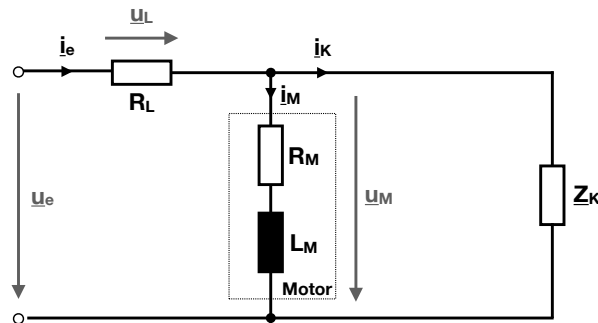


Abbildung 1: Ersatzschaltbild der untersuchten Schaltung.

Es gelten die folgenden Effektivwerte:

- $u_e = 15 \text{ V}$
- $\omega = 300 \frac{1}{\text{s}}$
- $i_M = (0,6 - j1,6) \text{ A}$
- $R_L = 1,364 \Omega$

Da der Praktikant leider versäumt hat, seine Arbeit ordentlich zu dokumentieren, haben Sie keine weiteren Unterlagen. Aber Ihr Kollege hat freundlicherweise schon einige Messungen durchgeführt und Ihnen das folgende Zeigerdiagramm erstellt:

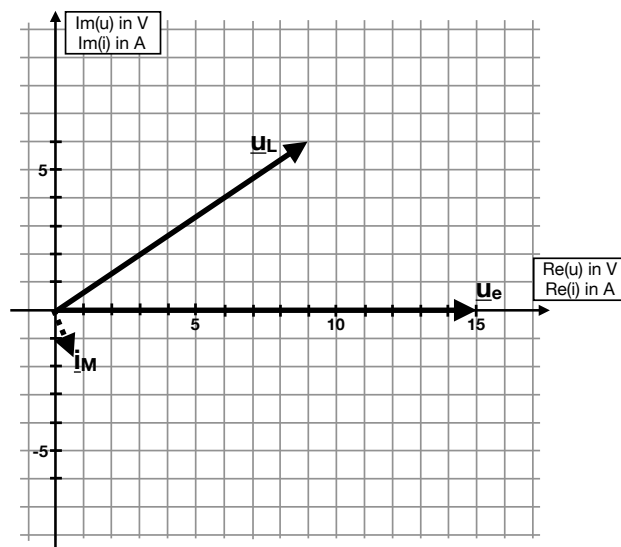


Abbildung 2: Gemessenes Zeigerdiagramm.

- (a) Bestimmen Sie rechnerisch den Strom \underline{i}_e , den die Quelle zur Verfügung stellen muss. Erläutern Sie Ihr Vorgehen und Zeichnen Sie den Strom in das Zeigerdiagramm in Diagramm 4.1 ein. (3 Punkte)
Hinweis: Nutzen Sie die Informationen aus dem Zeigerdiagramm.
- (b) Bestimmen Sie nun den Strom \underline{i}_K graphisch und zeichnen Sie diesen in das Zeigerdiagramm in Abbildung 4.1 ein. Die graphische Konstruktionsmethode muss erkennbar sein. (2 Punkte)
- (c) Um welches Bauelement handelt es sich bei \underline{Z}_K ? Nennen Sie, um welches Bauelement es sich handelt und begründen Sie durch das Zeigerdiagramm. (2 Punkte)
- (d) Berechnen Sie nun die Bauteilwerte R_M und L_M für die Ersatzschaltung des Motors. (3 Punkte)
Hinweis: Stellen Sie die komplexe Gleichung für die Spannung \underline{u}_M auf.
- (e) Warum ist die vom Praktikanten entworfene Kompensationsschaltung nicht geeignet, um die Blindleistung am Schaltungseingang vollständig zu kompensieren? Begründen Sie mit dem Zeigerdiagramm. (1 Punkt)

Um nun doch noch eine Blindleistungskompensation für den Motor zu entwickeln, müssen Sie selbst Hand anlegen. Nach einiger Recherche haben Sie sich für das folgende alternative Schaltbild entschieden:

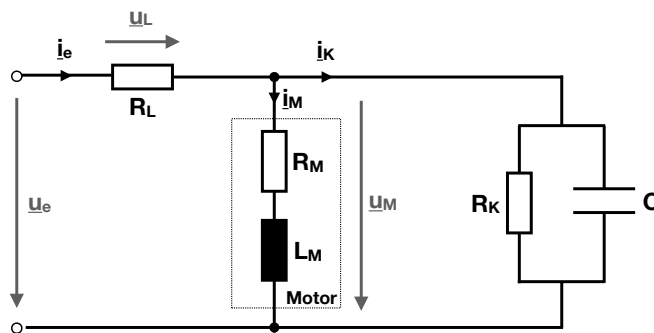


Abbildung 3: Alternatives Ersatzschaltbild zur Kompensation der Blindleistung.

Die obigen Angaben zum Effektivwert von \underline{u}_e und ω gelten weiterhin - das gemessene Zeigerdiagramm natürlich nicht mehr.

- (f) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Blindleistung am Schaltungseingang durch folgende Formel bestimmt werden kann: (6 Punkte)

$$Q_e = (u_e^2 - u_e u_L) \cdot \frac{\omega \cdot (L_M - \omega^2 L_M^2 C R_K - R_M^2 C R_K)}{R_K (R_M^2 + \omega^2 L_M^2)}$$

[Korrektur: Für diese Teilaufgabe muss die korrigierte Formel verwendet werden:

$$Q_e = (u_e^2 - u_e u_L) \cdot \frac{\omega \cdot (L_M R_K - \omega^2 L_M^2 C R_K - R_M^2 C R_K)}{R_K (R_M^2 + \omega^2 L_M^2)}$$

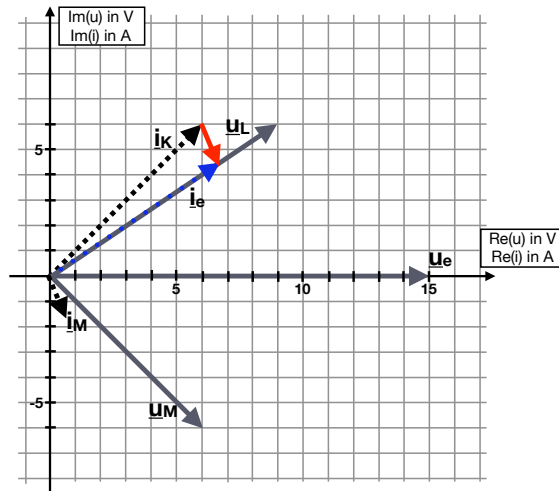
]

Hinweis: Drücken Sie hierzu den Strom \underline{i}_e durch \underline{i}_M und \underline{i}_K aus, sowie \underline{u}_M durch \underline{u}_e und \underline{u}_L

- (g) Welche Zeitkonstante $T = R_K C$ muss die Kompensationsschaltung annehmen, damit die Blindleistung am Schaltungseingang vollständig kompensiert wird? Berechnen Sie den Wert und begründen Sie Ihr Vorgehen.
 Hinweis: Sollten Sie Aufgabenteil d) nicht bearbeitet haben, so nehmen Sie stattdessen die Werte $L_M = 8 \text{ mH}$ und $R_M = 3 \Omega$ an. (3 Punkte)

Lösung:

- (a) Aus dem Zeigerdiagramm kann $\underline{u}_L = (9 + j6) \text{ V}$ abgelesen werden. Mit $\underline{i}_e = \frac{\underline{u}_L}{\underline{Z}_L}$ und $\underline{Z}_L = R_L$ folgt $\underline{i}_e = (6,6 + j4,4) \text{ A}$. Der Zeiger ist im folgenden Zeigerdiagramm blau gepunktet dargestellt:



- (b) Es gilt $\underline{i}_K = \underline{i}_e - \underline{i}_M$. Zeiger \underline{i}_K schwarz gepunktet und Konstruktionsmethode (rote Farbe) siehe a).
 (c) Es handelt sich um einen Kondensator. Betrachtet man die Spannung \underline{u}_M , so eilt der Stromzeiger \underline{i}_K der Spannung um $\phi_{ui} = -90^\circ$ voraus.
 (d) Es gilt $\underline{u}_M = (R_M + j\omega L_M) \cdot \underline{i}_M$. Mit $\underline{u}_M = \underline{u}_e - \underline{u}_L = (6 - j6) \text{ V}$ folgt:

$$\begin{aligned} \underline{u}_M &= (R_M + j\omega L_M) \cdot \underline{i}_M \\ (6 - j6) \text{ V} &= (R_M + j\omega L_M) \cdot (0,6 - j1,6) \text{ A} \\ &= 0,6R_M - j1,6R_M + 0,6 \cdot j\omega L_M + 1,6 \cdot \omega L_M \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned} 0,6R_M + 1,6\omega L_M &= 6 \\ -1,6R_M + 0,6\omega L_M &= -6 \end{aligned}$$

Also $R_M = \frac{6 - 1,6\omega L_M}{0,6}$ und schlussendlich $R_M = 4,521 \Omega$ und $L_M = 6,85 \text{ mH}$.

- (e) \underline{u}_e und \underline{i}_L sind nicht in Phase. Somit ist die Blindleistung am Schaltungseingang $Q_e \neq 0$.
 (f) Um die Blindleistung am Eingang der Gesamtschaltung zu berechnen wird zunächst die Scheinleistung am Eingang bestimmt.

$$\underline{S}_e = \underline{u}_e \cdot \underline{i}_e^*$$

Nun kann man \underline{i}_e durch die beiden anderen Ströme ausdrücken und diese durch den Quotient aus der jeweiligen Spannung und Impedanz ersetzen:

$$\begin{aligned}\underline{S}_e &= \underline{u}_e \cdot (\underline{i}_M^* + \underline{i}_K^*) \\ &= \underline{u}_e \cdot \left(\frac{(\underline{u}_e^* - \underline{u}_L^*)}{(R_M + j\omega L_M)^*} + \frac{(\underline{u}_e^* - \underline{u}_L^*)}{\left(\frac{R_K}{1+j\omega C R_K}\right)^*} \right) \\ &= \underline{u}_e \cdot (\underline{u}_e^* - \underline{u}_L^*) \cdot \left(\frac{1}{R_M - j\omega L_M} + \frac{1}{R_K} - j\omega C \right)\end{aligned}$$

Da $\underline{u}_e = u_e = 15 \text{ V}$ rein reell ist und $\underline{i}_e = i_e$ durch die Bedingung, dass der Strom und die Spannung am Eingang rein reell sein soll (nur dann ist die Blindleistungskompensation erreicht), ebenfalls rein reell ist, ist auch die Spannung $\underline{u}_L = u_L$ über dem Widerstand R_L rein reell. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\underline{S}_e &= u_e \cdot (u_e - u_L) \cdot \left(\frac{1}{R_M - j\omega L_M} + \frac{1}{R_K} - j\omega C \right) \\ &= (u_e^2 - u_e u_L) \cdot \left(\frac{1}{R_M - j\omega L_M} + \frac{1}{R_K} - j\omega C \right)\end{aligned}$$

Bringt man den Term in den Klammern noch auf einen gemeinsamen Bruchstrich und erweitert den Bruch komplex konjugiert, erhält man:

$$\begin{aligned}\underline{S}_e &= (u_e^2 - u_e u_L) \cdot \left(\frac{R_K(R_M + j\omega L_M) + (R_M^2 + \omega^2 L_M^2) - (j\omega C R_K \cdot (R_M^2 + \omega^2 L_M^2))}{R_K(R_M^2 + \omega^2 L_M^2)} \right) \\ &= (u_e^2 - u_e u_L) \cdot \left(\frac{R_K R_M + R_M^2 + \omega^2 L_M^2}{R_K(R_M^2 + \omega^2 L_M^2)} + j \frac{\omega \cdot (-\omega^2 L_M^2 C R_K - R_M^2 C R_K + L_M R_K)}{R_K(R_M^2 + \omega^2 L_M^2)} \right)\end{aligned}$$

Der Imaginärteil der Scheinleistung ist die Blindleistung, daher erhält man schlussendlich den zu beweisenden Term:

$$Q_e = (u_e^2 - u_e u_L) \cdot \frac{\omega \cdot (L_M R_K - \omega^2 L_M^2 C R_K - R_M^2 C R_K)}{R_K(R_M^2 + \omega^2 L_M^2)}$$

(g) Im Falle der Kompensation muss $Q_e = 0$ gelten. Mit $\omega \neq 0$ und $u_e \neq 0$ folgt:

$$\begin{aligned}0 &= L_M - \omega^2 L_M^2 C R_K - R_M^2 C R_K \\ L_M &= C R_K \cdot (\omega^2 L_M^2 + R_M^2) \\ C R_K &= \frac{L_M}{(\omega^2 L_M^2 + R_M^2)}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich $T = C R_K = 277,8 \mu\text{s}$. Oder mit alternativen Werten $T = 542,0 \mu\text{s}$.

Aufgabe 5

Bodediagramm

(22 Punkte)

Gegeben ist die folgende Schaltung:

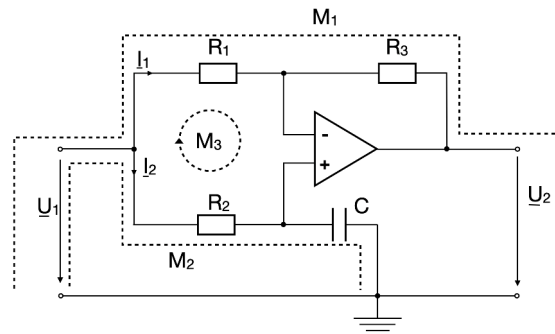


Abbildung 4: Zu untersuchende Schaltung.

- (a) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion der Schaltung aus Abbildung 4 die folgende Form besitzt: (6 Punkte)

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1 - j\omega C \frac{R_2 R_3}{R_1}}{1 + j\omega C R_2}$$

Nutzen Sie dafür die drei in Abbildung 4 eingezeichneten Maschen.

- (b) Wählen Sie nun $R_1 = R_3$ und vereinfachen Sie damit die Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil (a). Wählen Sie die Normierungsfrequenz $\Omega_G = \frac{\omega}{\omega_G}$ mit $\omega_G = CR_2$ [Korrektur: $\omega_G = \frac{1}{CR_2}$]. Stellen Sie dann die Gleichungen für den Amplituden- und Phasengang der Schaltung aus Abbildung 4 mit der Vereinfachung $R_1 = R_3$ auf und zeichnen Sie diese in Diagramm 5.1 (Amplitudengang) und Diagramm 5.2 (Phasengang) ein. Beschriften Sie alle Achsen! (6 Punkte)
- (c) Wie nennt man die Schaltung aus Abbildung 4 wenn $R_1 = R_3$ gewählt wird? Begründen Sie Ihre Antwort indem Sie Bezug auf den gezeichneten Amplitudengang nehmen. (2 Punkte)
- (d) Wozu setzt man eine solche Schaltung ein? Nehmen Sie in Ihrer Antwort Bezug auf den gezeichneten Phasengang. (2 Punkte)
- (e) Sie möchten nun mit Hilfe der Schaltung aus Abbildung 4 den Amplitudengang in Abbildung 5 realisieren. Wie müssen Sie dafür das Widerstandsverhältnis $\frac{R_3}{R_1}$ wählen? (2 Punkte)
- (f) Zeichnen Sie den Phasengang für die Schaltung aus Aufgabenteil (e) in Diagramm 5.3. Beschriften Sie alle Achsen! (2 Punkte)
- (g) Beim Inbetriebnehmen der Schaltung stellen Sie fest, dass sich die Lötkontakte des Widerstands R_1 gelöst haben. Argumentieren Sie mit der Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil (a) wie sich der Amplituden- und Phasengang im Vergleich zu Ihrem Ergebnis aus Teilaufgabe (b) verändern wird. (2 Punkte)

Lösung:

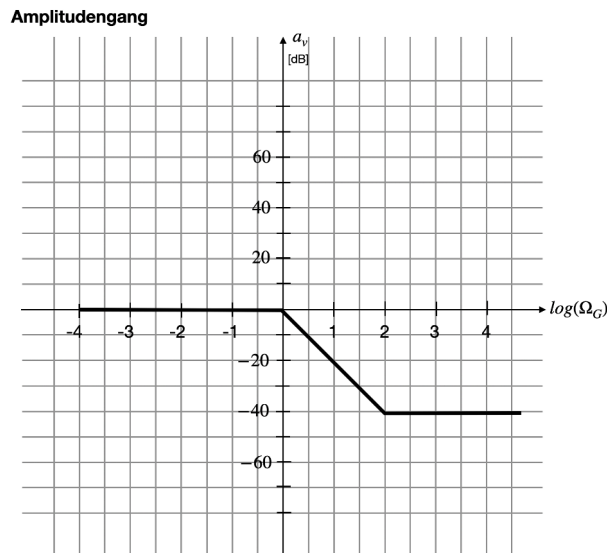


Abbildung 5: Gewünschter Amplitudengang.

(a)

$$M_1 : -\underline{U}_1 + \underline{I}_1(R_1 + R_3) + \underline{U}_2 = 0$$

$$M_2 : -\underline{U}_1 + \underline{I}_2\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C}\right) = 0$$

$$M_3 : \underline{I}_1 R_1 = \underline{I}_2 R_2$$

M_3 nach \underline{I}_1 auflösen und in M_1 einsetzen ergibt:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 \frac{R_2}{R_1}$$

$$-\underline{U}_1 + \underline{I}_2 \frac{R_2}{R_1} (R_1 + R_3) + \underline{U}_2 = 0$$

M_2 nach \underline{I}_2 auflösen und in obige Gleichung einsetzen ergibt:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_1}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{j\omega C \underline{U}_1}{1 + j\omega R_2 C}$$

$$-\underline{U}_1 + \frac{j\omega C \underline{U}_1}{1 + j\omega R_2 C} \frac{R_2}{R_1} (R_1 + R_3) + \underline{U}_2 = 0$$

Diese Gleichung kann nun in die gewünschte Übertragungsfunktion $\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$ umgeformt werden:

$$\underline{U}_1 \left(1 - \frac{j\omega C \underline{U}_1}{1 + j\omega R_2 C} \frac{R_2}{R_1} (R_1 + R_3) \right) = \underline{U}_2$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = 1 - \frac{j\omega C \underline{U}_1}{1 + j\omega R_2 C} \frac{R_2}{R_1} (R_1 + R_3)$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_1 + j\omega C R_1 R_2 - j\omega C R_2 (R_1 + R_3)}{R_1 + j\omega C R_2 R_1}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_1 + j\omega C R_1 R_2 - j\omega C R_2 R_1 - j\omega C R_2 R_3}{R_1 + j\omega C R_2 R_1}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_1 - j\omega C R_2 R_3}{R_1 + j\omega C R_2 R_1}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1 - j\omega C \frac{R_2 R_3}{R_1}}{1 + j\omega C R_2}$$

(b) Mit $R_1 = R_3$ ergibt sich die folgende Übertragungsfunktion:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1 - j\omega C R_2}{1 + j\omega C R_2}$$

[Hinweis: Mit der Normierungsfrequenz $\Omega = \frac{\omega}{\omega_G} = \omega C R_2$ gilt der folgende Lösungsweg. Mit der ursprünglichen Normierung gilt $\Omega = \frac{\omega}{C R_2}$. Auch dies wird bepunktet.]

Einsetzen der Normierungsfrequenz ergibt:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1 - j\Omega}{1 + j\Omega}$$

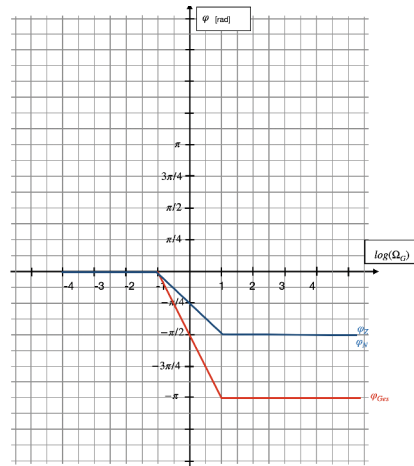
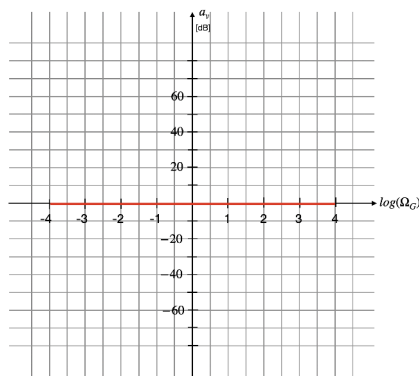
Daraus folgenden die Formeln für Amplituden- und Phasengang:

$$a_v = 20 \cdot \log(1 - j\Omega) - 20 \cdot \log(1 + j\Omega)$$

$$\varphi = \arg(1 - j\Omega) - \arg(1 + j\Omega)$$

$$\varphi = \arctan(-j\Omega) - \arctan(j\Omega)$$

Der Amplituden- und Phasengang ist in den folgenden Abbildungen zu sehen:



- (c) Die Schaltung stellt einen Allpass dar. Im Bodediagramm des Amplitudengangs ist ersichtlich, dass die Verstärkung für alle Frequenzen gleich 1 ist.
- (d) Im Bodediagramm des Phasengangs sieht man, dass mit dem Allpass eine Phasendrehung von 180° realisiert werden kann. Diese Eigenschaft kann z.B. dann eingesetzt werden, wenn frequenzabhängige Phasenverzögerungen kompensiert oder verstärkt werden sollen.
- (e) Der Amplitudengang des Nenners muss um zwei Dekaden nach rechts verschoben werden um den gewünschten Amplitudengang aus Abbildung 5 zu erhalten. Damit ergibt sich die folgende Übertragungsfunktion:

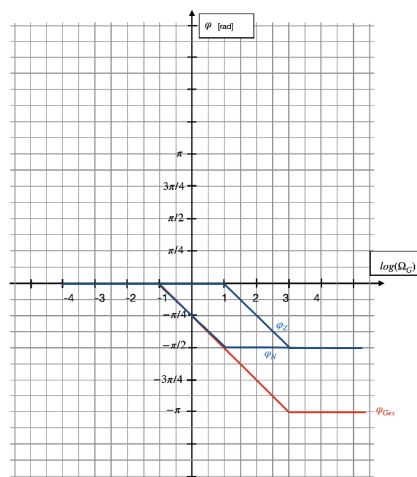
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{1 - j10^{-2}\Omega}{1 + j\Omega}$$

und somit:

$$\frac{R_3}{R_1} = 10^{-2} = 0.01$$

- (f) Der Phasengang ergibt sich zu:

$$\varphi = \arctan(-j10^{-2}\Omega) - \arctan(j\Omega)$$



(g) Für $R_1 \rightarrow \infty$ ergibt sich:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 + j\omega CR_2}$$

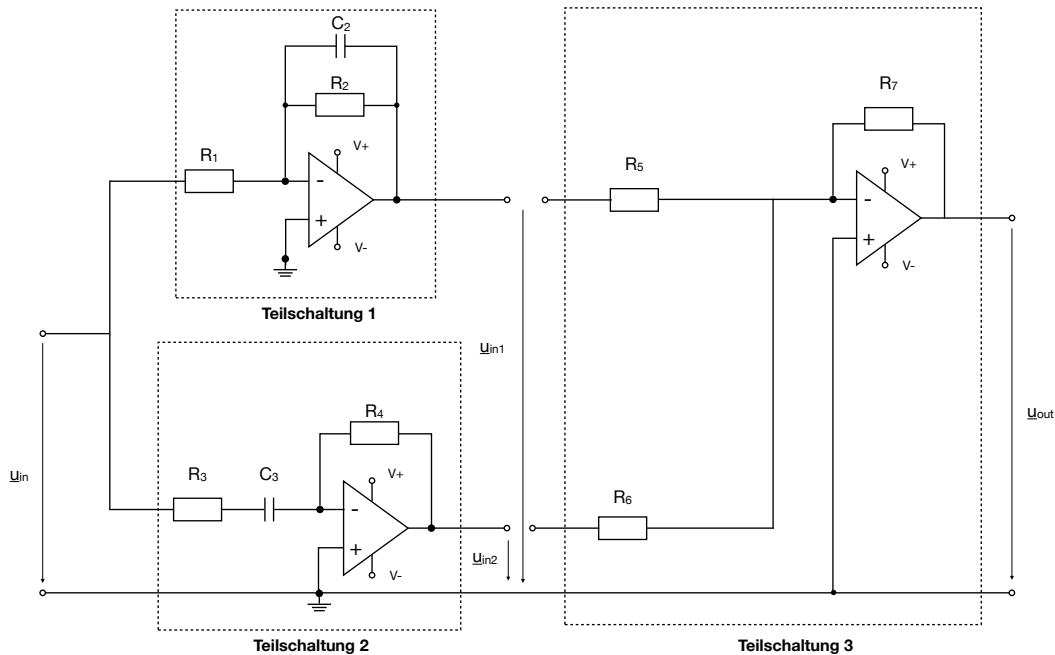
Somit wird der Amplitudengang Tiefpassverhalten zeigen
(Knickfrequenz bei Ω_G). Die Phase wird von 0° bis -90° gedreht.

Aufgabe 6

Operationsverstärker

(14 Punkte)

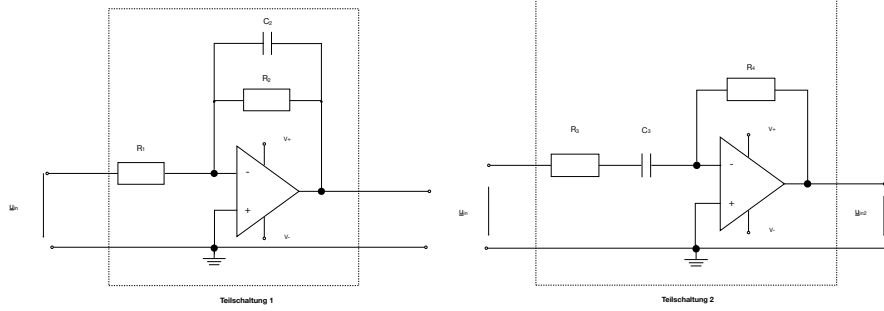
Die unten gezeigte Operationsverstärkerschaltung besteht aus drei idealen Operationsverstärkern, den Widerständen R_1 bis R_7 und zwei Kondensatoren C_2 und C_3 . Die idealen Operationsverstärker sind an eine Spannungsversorgung von $V_{CC+} = 5V$ und $V_{CC-} = -5V$ angeschlossen. Die Schaltung besteht aus Teilschaltung 1, Teilschaltung 2 und Teilschaltung 3.



- (a) Was gilt für den Eingangswiderstand eines idealen Operationsverstärkers? (1 Punkt)
- (b) Geben Sie den vollständigen Namen von Teilschaltung 1 und Teilschaltung 2 an. (2 Punkte)
- (c) Leiten Sie die Übertragungsfunktionen von Teilschaltung 1 und Teilschaltung 2 her. Geben Sie diese in der Form $\underline{u}_{in1} = f(\underline{u}_{in}, R_1, R_2, C_2)$ und $\underline{u}_{in2} = f(\underline{u}_{in}, R_3, R_4, C_3)$ an. (4 Punkte)
- (d) Leiten Sie die Übertragungsfunktion von Teilschaltung 3 her. Geben Sie diese in der Form $\underline{u}_{out} = f(\underline{u}_{in,i}, R_j)$ mit $i \in \{1, 2\}$ und $j \in \{5, 6, 7\}$ an. (2 Punkte)
- (e) Gegeben sind nun die beiden Grenzfrequenzen 10 Hz und 100 Hz. Verwenden Sie die Übertragungsfunktionen aus Aufgabenteil (c) und nehmen Sie an, dass $C_2 = C_3 = 1 \mu F$ gilt. Ordnen Sie die Grenzfrequenzen der jeweiligen Teilschaltung und dem entsprechenden Widerstand zu. Berechnen Sie den Wert der Widerstände. (5 Punkte)

Lösung:

- (a) Für den Eingangswiderstand eines idealen Operationsverstärkers gilt $R_{ein} \rightarrow \infty$.
- (b) Teilschaltung 1: Aktiver invertierender Tiefpass.
Teilschaltung 2: Aktiver invertierender Hochpass.
- (c) Die betreffenden Teilschaltungen sind:



Für Teilschaltung 1 gilt:

$$Z_1 = R_1 \text{ und } \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_2} + j\omega C_2. \text{ Also } Z_2 = \frac{R_2}{1+j\omega C_2 R_2} \text{ und somit}$$

$$\underline{u}_{in1} = -\frac{Z_2}{Z_1} \cdot \underline{u}_{in} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1+j\omega C_2 R_2} \cdot \underline{u}_{in}$$

Für Teilschaltung 2 gilt: $Z_4 = R_4$ und $Z_3 = R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}$

$$\underline{u}_{in2} = -\frac{Z_4}{Z_3} \cdot \underline{u}_{in} = -\frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{j\omega C_3 R_3}{1+j\omega R_3 C_3} \cdot \underline{u}_{in}$$

- (d) Legt man einen Knoten an den invertierenden Eingang des Operationsverstärkers, so gilt in diesem:

$$\frac{\underline{u}_d - \underline{u}_{in1}}{R_5} + \frac{\underline{u}_d - \underline{u}_{in2}}{R_6} = \frac{\underline{u}_{out} - \underline{u}_d}{R_7}$$

Mit $\underline{u}_d = 0$ folgt:

$$\underline{u}_{out} = -R_7 \cdot \left(\frac{\underline{u}_{in1}}{R_5} + \frac{\underline{u}_{in2}}{R_6} \right)$$

- (e) Für die Knickfrequenz $\omega_K = 2\pi f_k$ einer RC-Schaltung gilt $\omega_K = \frac{1}{RC}$.

Für R_3 (niedrige Frequenz: 10 Hz , definiert untere Grenze, muss zum Hochpass gehören, somit Teilschaltung 2, somit R_3) gilt:

$$R_3 = \frac{1}{2\pi \cdot 10 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} \approx 16 \text{ k}\Omega$$

Für R_2 (höhere Frequenz: 100 Hz , definiert obere Grenze, muss zum Tiefpass gehören, somit Teilschaltung 1, somit R_2) gilt:

$$R_2 = \frac{1}{2\pi \cdot 100 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} \approx 1,6 \text{ k}\Omega$$