Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel   Übungsleiter: M.Sc. Jochen Brenneisen

Klausur

29. September 2021
Beginn: 16:00 Uhr

Nachname: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikel-Nr.: ______________________

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem nicht programmierbaren Taschenrechner.

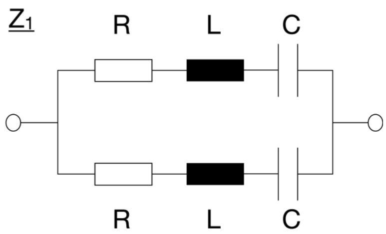
Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein!
Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare!
Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	21	
2	16	
3	20	
4	22	
5	15	
Gesamt:	94	

Aufgabe 1 **(21 Punkte)**
Ortskurve

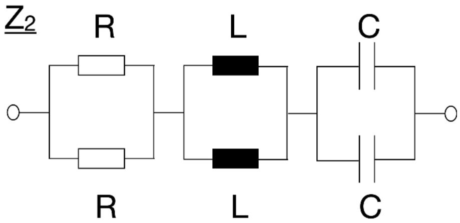
Gegeben sei die folgende Schaltung:



(a) Berechnen Sie die Impedanz $\underline{Z}_1(R, L, C)$ der Gesamtschaltung und trennen Sie die Gleichung nach Real- und Imaginärteil. (3 Punkte)

(b) Zeichnen Sie die Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}_1$ und der zugehörigen Admittanz $\underline{Y}_1$ in Diagramm 1.1 (Impedanz) bzw. in Diagramm 1.2 (Admittanz) ein. (4 Punkte)
Beschriften Sie außerdem den Schnittpunkt mit der x-Achse, sowie die Grenzwerte $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$.

Gegeben sei nun die zweite Schaltung:



(c) Berechnen Sie die Impedanz $\underline{Z}_2(R, L, C)$ der Gesamtschaltung. Berechnen Sie anschießend das Verhältnis der Impedanz beider Schaltungen $\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$. (2 Punkte)

(d) Berechnen Sie die Resonanzkreisfrequenz für die Schaltung mit der Impedanz $\underline{Z}_2$. (3 Punkte)

(e) Berechnen Sie für die Schaltung mit der Impedanz $\underline{Z}_2$ die Kreisfrequenzen, bei der die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung gerade $\mathbf{+45}°$ und $\mathbf{-45}°$beträgt. (4 Punkte)

(f) Bestimmen Sie die Güte der Schaltung mit der Impedanz $\underline{Z}_2$. (2 Punkte)
Bestimmen Sie zusätzlich $R(L, C)$ so, dass $Q = 1$ beträgt.
Hinweis: Die Güte Q einer Schaltung ist definiert durch die Formel:

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_2}.$$

ω_0 ist die Resonanzkreisfrequenz. ω_1 ist die Kreisfrequenz, bei der die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung $\mathbf{+45}°$ beträgt. ω_2 ist die Kreisfrequenz, bei der die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung $\mathbf{-45}°$ beträgt.

(g) Zeichnen Sie eine mögliche Schaltung, für welche gilt: (3 Punkte)

$$\underline{Z}_3 = \frac{R}{3} + \frac{1}{2j\omega C} + j\omega L$$

Hinweis: Passen Sie die Schaltung mit der Impedanz $\underline{Z}_2$ entsprechend an.

Lösung:

(a) Die Gesamtimpedanz kann durch Addition der Teilimpedanzen berechnet werden. Da alle Bauelemente in beiden Zweigen den gleichen Wert haben gilt:

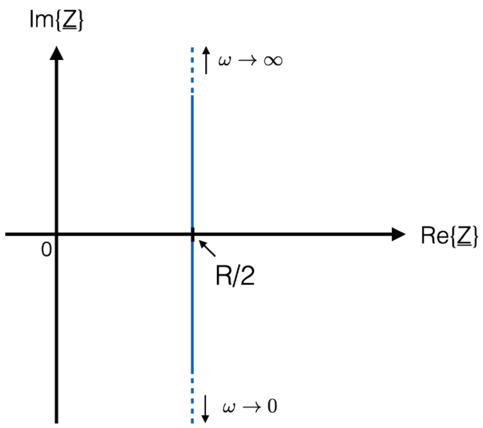
$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{\frac{1}{R+\frac{1}{j\omega C}+j\omega L} + \frac{1}{R+\frac{1}{j\omega C}+j\omega L}}$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{R}{2} + \frac{1}{2\cdot j\omega C} + \frac{j\omega L}{2}$$

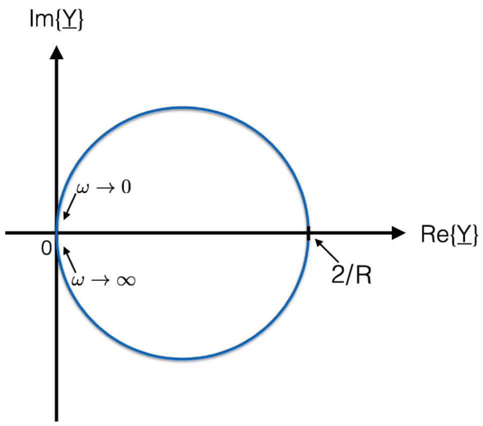
Getrennt nach Imaginär- und Realteil erhält man:

$$\underline{Z}_1 = \frac{R}{2} + j\left(\frac{\omega L}{2} - \frac{1}{2\cdot \omega C}\right)$$

(b) Die Impedanzortskurve ergibt sich wie folgt:



Die Admittanzortskurve kann durch Spiegelung am Einheitskreis bestimmt werden:



(c) Die Gesamtimpedanz kann durch Addition der Teilimpedanzen berechnet werden, da es sich um eine Serienschaltung handelt:

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}} + \frac{1}{j\omega C + j\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega L}+\frac{1}{j\omega L}}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{R}{2} + \frac{1}{2\cdot j\omega C} + \frac{j\omega L}{2}$$

Das Verhältnis ist:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = 1$$

(d) Für die Resonanzkreisfrequenz ω_0 gilt:

$$Im(\underline{Z}_2) = 0$$

Daraus folgt:

$$\frac{\omega_0 L}{2} - \frac{1}{2 \cdot \omega_0 C} = 0$$
$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

Stellt man diese Gleichung nach ω_0 um, erhält man die Gleichung für die Resonanzkreisfrequenz:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(e) Für eine Phasenverschiebung von $+45°$ zwischen Strom und Spannung gilt:

$$Im\{\underline{Z}_2\} = Re\{\underline{Z}_2\}$$

Setzt man die Ergebnisse aus Aufgabenteil c) ein, erhält man:

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = R$$

Zieht man R auf die linke Seite und multipliziert die Gleichung mit ω_1, erhält man:

$$\omega_1^2 L - \omega_1 R - \frac{1}{C} = 0$$
$$\omega_1^2 - \omega_1 \frac{R}{L} - \frac{1}{LC} = 0$$

Diese quadratische Gleichung kann z.B. mit der pq-Formel oder durch quadratische Ergänzung gelöst werden. Man erhält:

$$\omega_1 = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

Der Term unter der Wurzel ist für alle R, L und C größer als der Term vor der Wurzel. Da eine Frequenz nicht negativ sein kann gilt:

$$\omega_1 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

Für eine Phasenverschiebung von $-45°$ zwischen Strom und Spannung gilt:

$$-Im\{\underline{Z}\} = Re\{\underline{Z}\}$$

$$-\left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right) = R$$

$$\omega_2^2 L + \omega_2 R - \frac{1}{C} = 0$$
$$\omega_2^2 + \omega_2 \frac{R}{L} - \frac{1}{LC} = 0$$

$$\omega_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

Auch hier ist nur ein positives Vorzeichen vor der Wurzel sinnvoll:

$$\omega_2 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

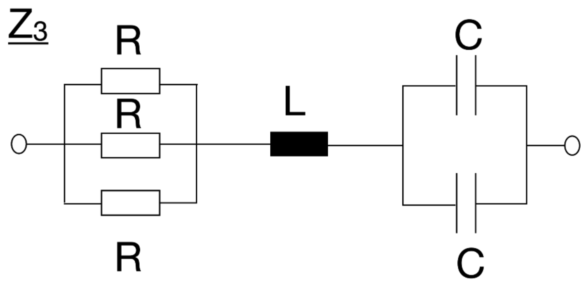
(f) Mit den Gleichungen aus Aufgabenteil e) und f) ergibt sich:

$$Q(R, L, C) = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Damit $Q = 1$ wird, muss der Widerstand wie folgt gewählt werden:

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

(g) Die entsprechende Schaltung ist:



Aufgabe 2 **(16 Punkte)**

Netzwerk

Gegeben sind die folgenden beiden Schaltungen:

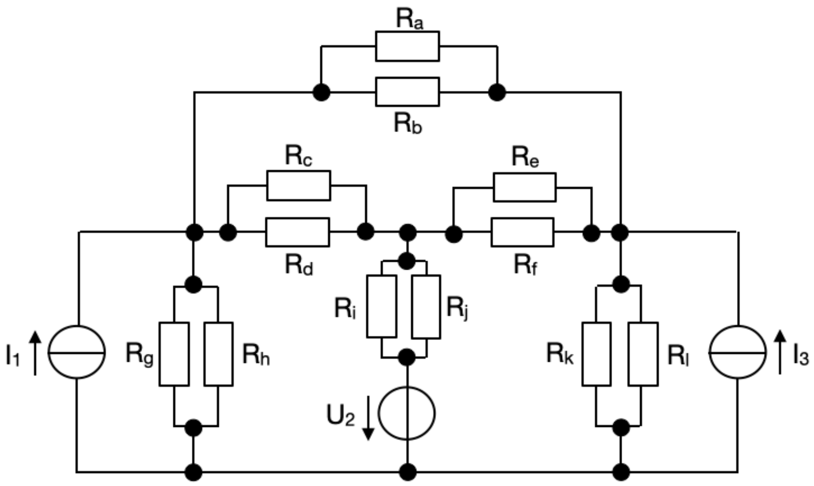


Abbildung 1: Darstellung des Netzwerks

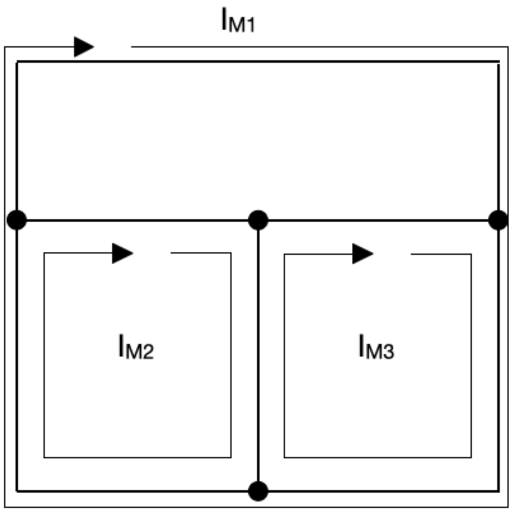


Abbildung 2: Darstellung der Netztopologie

Mit den gegebenen Werten:

$$R_a = R_i = 1,5\,k\Omega,\ R_b = 3\,k\Omega,\ R_c = R_d = R_g = 2\,k\Omega,\ R_e = 5\,k\Omega,$$
$$R_f = 1,25\,k\Omega,\ R_h = 500\,\Omega,\ R_j = 7,5\,k\Omega,\ R_k = 6\,k\Omega,\ R_l = 1,2\,k\Omega$$
$$U_2 = 20\,\mathrm{V}$$
$$I_1 = 0{,}025\,\mathrm{A},\ I_3 = 0{,}015\,\mathrm{A}$$

(a) Nennen Sie die Kirchhoff'schen Gleichungen. (2 Punkte)

(b) i) Fassen Sie alle parallelen und in Reihe geschalteten Widerstände soweit wie möglich zusammen. Berechnen Sie die resultierenden Widerstandswerte. (4 Punkte)

ii) Führen Sie nun eine geeignete Quellenumwandlung für das Maschenstromverfahren durch. Berechnen Sie die resultierenden Spannungen.

iii) Zeichnen Sie die vereinfachte Schaltung unter Berücksichtigung der Netztopologie in Abbildung 2.

(c) Bestimmen Sie mit dem formalisierten Maschenstormverfahren das Gleichungssystem für die Maschenströme I_{M1}, I_{M2} und I_{M3}. Verwenden Sie die in Abbildung 2 eingezeichnete Definition der Maschenströme und beachten Sie Masche 1. (7 Punkte)
Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe der Cramer'schen Regel. Berechnen Sie mindestens eine Determinante schriftlich.
Hinweis: Geben Sie jeden Zwischenschritt an. Achten Sie auf eine verständliche Beschriftung.

(d) Berechnen Sie die Ströme durch die Parallelschaltungen $R_g||R_h$, $R_i||R_j$ und $R_k||R_l$. (3 Punkte)

Lösung:

(a) 1. Die Summe aller Ströme, die auf einen Knoten zulaufen, muss Null sein.
2. Die Summe aller Spannungen in einer Masche muss Null sein.

(b) i) Parallelschaltung von Widerständen. Möchte man zwei Widerstände zu einem Gesamtwiderstand zusammenfassen, dann nutzt man die folgende Gleichung:

$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

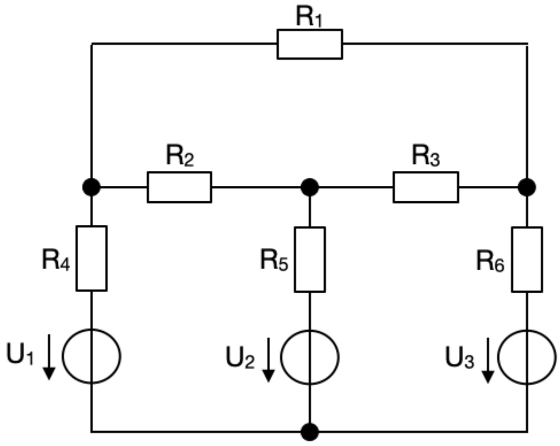
Dann ist die Lösung.

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{R_a \cdot R_b}{R_a + R_b} = 1\,k\Omega \\
R_2 &= \frac{R_c \cdot R_d}{R_c + R_d} = 1\,k\Omega \\
R_3 &= \frac{R_e \cdot R_f}{R_e + R_f} = 1\,k\Omega \\
R_4 &= \frac{R_g \cdot R_h}{R_g + R_h} = 400\,\Omega \\
R_5 &= \frac{R_i \cdot R_j}{R_i + R_j} = 1,25\,k\Omega \\
R_6 &= \frac{R_k \cdot R_l}{R_k + R_l} = 1\,k\Omega
\end{aligned}$$

ii) Stromquellen in Spannungsquellen umwandeln:

$$U_1 = I_1 \cdot R_4 = 10\,V$$
$$U_3 = I_3 \cdot R_6 = 15\,V$$

iii) **Lösung Schaltung 1**



(c) Das Gleichungssystem für die Maschen M_1, M_2 und M_3 ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} R_4+R_1+R_6 & R_4 & R_6 \\ R_4 & R_4+R_2+R_5 & -R_5 \\ R_6 & -R_5 & R_5+R_3+R_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathrm{M1}} \\ I_{\mathrm{M2}} \\ I_{\mathrm{M3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1-U_3 \\ U_1-U_2 \\ U_2-U_3 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Werte:

$$\begin{pmatrix} 2,4\,\mathrm{k\Omega} & 400\,\Omega & 1\,\mathrm{k\Omega} \\ 400\,\Omega & 2,65\,\mathrm{k\Omega} & -1,25\,\mathrm{k\Omega} \\ 1\,\mathrm{k\Omega} & -1,25\,\mathrm{k\Omega} & 3,25\,\mathrm{k\Omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\mathrm{M1}} \\ I_{\mathrm{M2}} \\ I_{\mathrm{M3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\,\mathrm{V} \\ -10\,\mathrm{V} \\ 5\,\mathrm{V} \end{pmatrix}$$

Zur Lösung des Gleichungssystems wird die Cramer'sche Regel verwendet:

$$I_{Mi} = \frac{\det(\mathbf{R_i})}{\det(\mathbf{R})} \quad \text{für} \quad i = 1,2,3$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{R}) &= \begin{vmatrix} 2,4 & 0,4 & 1 \\ 0,4 & 2,65 & -1,25 \\ 1 & -1,25 & 3,25 \end{vmatrix}\ \mathrm{k\Omega} \\ &= 20,67 - 0,5 - 0,5 - 2,65 - 3,75 - 0,52 \\ &= 12,75\,\mathrm{k\Omega}^3 \end{aligned}$$

$i = 1$:

$$\det(\mathbf{R_1}) = \begin{vmatrix} -5\,\mathrm{V} & 0,4\,\mathrm{k\Omega} & 1\,\mathrm{k\Omega} \\ -10\,\mathrm{V} & 2,65\,\mathrm{k\Omega} & -1,25\,\mathrm{k\Omega} \\ 5\,\mathrm{V} & -1,25\,\mathrm{k\Omega} & 3,25\,\mathrm{k\Omega} \end{vmatrix} = -25,5\,\mathrm{k\Omega^2 V}$$

$$I_{\mathrm{M1}} = \frac{-25,5\,\mathrm{k\Omega^2 V}}{12,75\,\mathrm{k\Omega^3}} = -2\,\mathrm{mA}$$

$i = 2$:

$$\det(\mathbf{R_2}) = \begin{vmatrix} 2,4\,\mathrm{k\Omega} & -5\,\mathrm{V} & 1\,\mathrm{k\Omega} \\ 0,4\,\mathrm{k\Omega} & -10\,\mathrm{V} & -1,25\,\mathrm{k\Omega} \\ 1\,\mathrm{k\Omega} & 5\,\mathrm{V} & 3,25\,\mathrm{k\Omega} \end{vmatrix} = -38,25\,\mathrm{k\Omega^2 V}$$

$$I_{\mathrm{M2}} = \frac{-38,25\,\mathrm{k\Omega^2 V}}{12,75\,\mathrm{k\Omega^3}} = -3\,\mathrm{mA}$$

$i = 3$:

$$\det(\mathbf{R_3}) = \begin{vmatrix} 2,4\,\mathrm{k\Omega} & 0,4\,\mathrm{k\Omega} & -5\,\mathrm{V} \\ 0,4\,\mathrm{k\Omega} & 2,65\,\mathrm{k\Omega} & -10\,\mathrm{V} \\ 1\,\mathrm{k\Omega} & -1,25\,\mathrm{k\Omega} & 5\,\mathrm{V} \end{vmatrix} = 12.75\,\mathrm{k\Omega^2 V}$$

$$I_{\mathrm{M3}} = \frac{12.75\,\mathrm{k\Omega^2 V}}{12,75\,\mathrm{k\Omega^3}} = 1\,\mathrm{mA}$$

Alternativ kann I_{M3} durch Einsetzen von I_{M1} und I_{M2} in eine der Gleichungen des Gleichungssystems berechnet werden.

(d) Alle Ströme durch die kombinierten Widerstände werden mit Hilfe der Kirchhoff'schen Regeln berechnet:

$$I_{gh} = I_{M1} + I_{M2} = -5\,\mathrm{mA}$$
$$I_{ij} = I_{M3} - I_{M2} = 4\,\mathrm{mA}$$
$$I_{kl} = -I_{M1} - I_{M3} = 1\,\mathrm{mA}$$

Da die Richtung der Ströme nicht vorgegeben war, können auch alle drei Ströme mit umgekehrtem Vorzeichen angegeben werden.

Aufgabe 3 **(20 Punkte)**
Komplexe Wechselstromlehre

Auf dem Dachboden Ihrer Großeltern fällt Ihnen zufällig ein über 20 Jahre altes Lehrbuch über Elektrotechnik in die Hände. Sie sind natürlich sofort fasziniert und finden auf der erstbesten Seite eine hochspannende Schaltung:

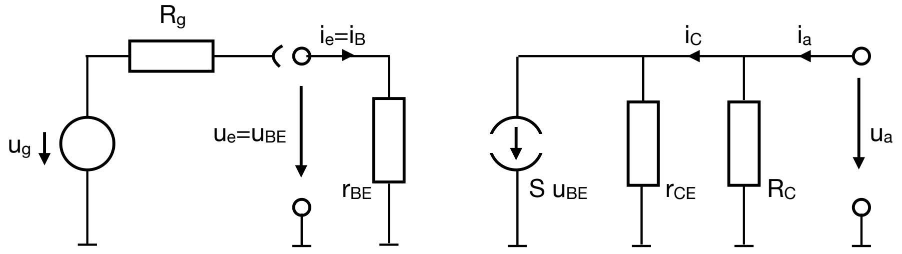
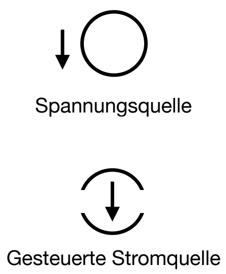


Abbildung 3: Kleinsignalersatzschaltbild der Emitterschaltung

Da Ihnen die Emitterschaltung irgendwo schon mal über den Weg gelaufen ist, beschließen Sie, die Schaltung näher zu analysieren. Hilfreicherweise finden Sie am Ende des Buches ein Symbolverzeichnis, sowie eine Umrechnungstabelle, die die folgenden Hinweise liefern:



$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} & \frac{det\ \underline{Z}}{\underline{Z}_{21}} \\ \frac{1}{\underline{Z}_{21}} & \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} & -\frac{1}{\underline{Y}_{21}} \\ -\frac{det\ \underline{Y}}{\underline{Y}_{21}} & -\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{det\ \underline{H}}{\underline{H}_{21}} & -\frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{21}} \\ -\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}} & -\frac{1}{\underline{H}_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{P}_{21}} & \frac{\underline{P}_{22}}{\underline{P}_{21}} \\ \frac{\underline{P}_{11}}{\underline{P}_{21}} & \frac{det\ \underline{P}}{\underline{P}_{21}} \end{bmatrix}$$

Betrachten Sie im ersten Schritt nur die Schaltung **ohne** die Generatorspannung u_g.

(a) Geben Sie die allgemeine Definition der vier Matrixelemente der Impedanzmatrix an. Zeichnen Sie außerdem die beiden zur Bestimmung der Impedanzmatrixelemente sinnvollen vereinfachten Ersatzschaltbilder für die Schaltung aus Abbildung 3 und bestimmen Sie die Matrixelemente. (6 Punkte)

(b) Ist die Schaltung kopplungssymmetrisch? Unter welchen Umständen ist die Schaltung widerstandssymmetrisch? (2 Punkte)

Ab sofort wird die Generatorspannung u_g berücksichtigt.

(c) Wie sollte r_{BE} definiert sein, damit möglichst viel Leistung aus der Quelle in den Vierpol übertragen wird? (1 Punkt)

(d) Welche Funktion hat der Parameter S? Welche Einheit hat S? Begründen Sie. (2 Punkte)

Sie möchten die Signale am Schaltungsausgang nun mit einer Filterschaltung weiterverarbeiten. Sie bauen alles so auf, dass die Schaltungen vollständig entkoppelt sind und entscheiden sich für einen Parallelschwingkreis. Leider ist dieser verlustbehaftet, sodass sich das folgende Ersatzschaltbild ergibt:

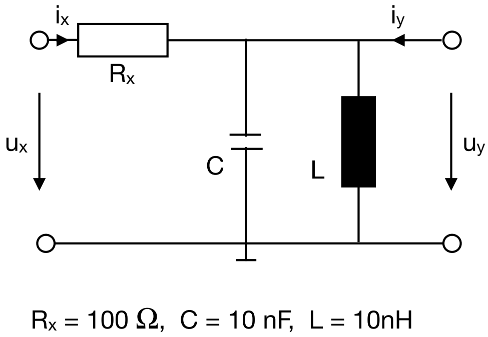


Abbildung 4: Realer Schwingkreis

(e) Wie ist die Leerlauf-Spannungsübersetzung allgemein definiert? Berechnen Sie diese für die Schaltung in Abbildung 4 und vereinfachen Sie soweit möglich. (3 Punkte)

(f) Nun wollen Sie natürlich auch die Leerlauf-Spannungsübersetzung der Gesamtschaltung berechnen. Geben Sie diese zuerst für die Schaltung in Abbildung 3 an und dann für die Verkettung der beiden Schaltungen. (4 Punkte)

(g) Welche Resonanzfrequenz f_0 ergibt sich? (2 Punkte)

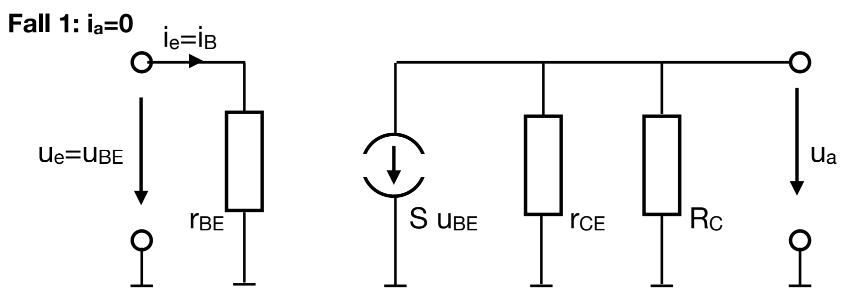
Lösung:

(a) Es gilt:

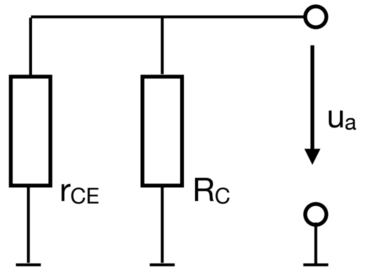
$$\underline{Z}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} \qquad \underline{Z}_{21} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0}$$

$$\underline{Z}_{22} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} \qquad \underline{Z}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0}$$

Es ergeben sich die folgenden Ersatzschaltbilder:



Fall 2: i_e=0



Für die Matrixelemente gilt:

$$\underline{Z}_{ee} = \left.\frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_e}\right|_{\underline{I}_a=0} = r_{BE}$$

$$\underline{Z}_{ae} = \left.\frac{\underline{U}_a}{\underline{I}_e}\right|_{\underline{I}_a=0} = \frac{S \cdot u_{BE} \cdot R_C||r_{CE}}{\underline{I}_e} = S \cdot r_{BE}\frac{r_{CE} \cdot R_C}{r_{CE} + R_C}$$

$$\underline{Z}_{aa} = \left.\frac{\underline{U}_a}{\underline{I}_a}\right|_{\underline{I}_e=0} = r_{CE}||R_C = \frac{r_{CE} \cdot R_C}{r_{CE} + R_C}$$

$$\underline{Z}_{ea} = \left.\frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_a}\right|_{\underline{I}_e=0} = 0$$

(b) Wegen $\underline{Z}_{ae} \neq \underline{Z}_{ea}$ ist die Schaltung **nicht** kopplungssymmetrisch. Für $\underline{Z}_{ee} = \underline{Z}_{aa}$, also $\frac{r_{CE} \cdot R_C}{r_{CE} + R_C} = r_{BE}$ ist die Schaltung widerstandssymmetrisch.

(c) Der Innenwiderstand der Quelle sollte im Optimalfall gleich der Eingangsimpedanz der Schaltung sein, also gilt: $R_g = r_{BE}$.

(d) S wirkt als Verstärkungsfaktor. Da es sich um eine spannungsgesteuerte Stromquelle handelt, muss dieser die Einheit eines Leitwerts haben: Siemens.

(e) Die Leerlauf-Spannungsübersetzung ist definiert als

$$\underline{A}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_2=0} \qquad \text{Leerlauf-Spannungsübersetzung (Einheit: 1)}$$

Für die Schaltung ergibt sich mittels Spannungsteiler:

$$
\begin{aligned}
\frac{U_1}{U_2} \quad bzw. \quad \frac{U_x}{U_y} &= \frac{R_x + Z_C||Z_L}{Z_C||Z_L} \\
&= 1 + \frac{R_x}{\frac{\frac{1}{j\omega C} \cdot j\omega L}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L}} \\
&= 1 + R_x \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L}{\frac{L}{C}} \\
&= 1 + R_x \cdot \frac{C}{L} \cdot \frac{1 + j\omega L \cdot j\omega C}{j\omega C} \\
&= 1 - j\frac{R_x}{\omega L}(1 - \omega^2 LC)
\end{aligned}
$$

(f) Für die Gesamtfunktion wird zuerst die Leerlauf-Spannungsübersetzung der Schaltung aus Abbildung 3 berechnet. Nach Umrechnungsvorschrift ergibt sich:
$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} = \frac{r_{BE}}{S \cdot r_{BE} \frac{r_{CE} \cdot R_C}{r_{CE} + R_C}} = \frac{1}{S} \cdot \frac{r_{CE} + R_C}{r_{CE} \cdot R_C}$
Die gesamte Leerlauf-Spannungsübersetzung erhält man durch Multiplikation der beiden Einzelkomponenten.
$\underline{A}_{ges} = \underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{xx} = \frac{1}{S} \cdot \frac{r_{CE} + R_C}{r_{CE} \cdot R_C} \cdot (1 - j\frac{R_x}{\omega L}(1 - \omega^2 LC))$

(g) Für die Resonanzkreisfrequenz im Parallelschwingkreis gilt $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
Für die Frequenz ergibt das
$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10\,nH \cdot 10\,nF}} = 15,9\,MHz$

Aufgabe 4 **(22 Punkte)**

Bodediagramm

(a) Ordnen Sie die Amplitudengänge A-D den Schaltungen 1-4 in Abbildung 5 zu. Geben Sie zusätzlich für jede Schaltung eine korrekte Bezeichnung an. Geben Sie außerdem wenn zutreffend an, ob es sich um eine aktive oder passive Schaltung handelt und welche Ordnung sie besitzt. (8 Punkte)

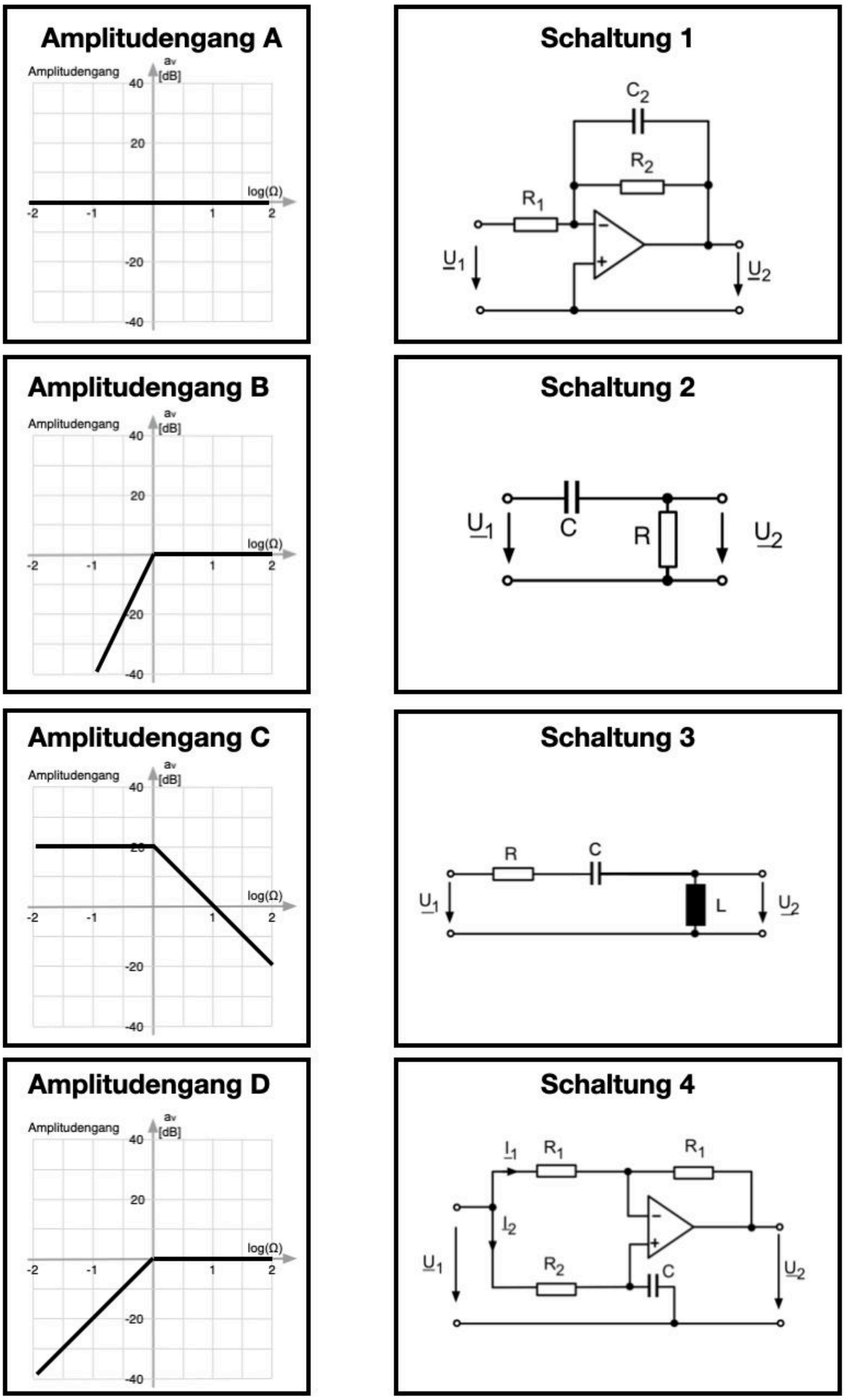


Abbildung 5: Bodediagramme und Schaltbilder

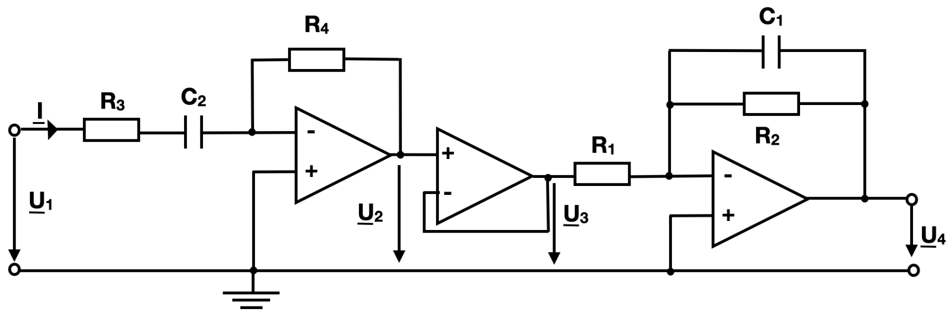


Abbildung 6: Schaltbild

(b) Betrachten Sie nun die Schaltung in Abbildung 6. Wozu dient der Operationsverstärker in der Mitte der Schaltung? Was gilt somit für das Spannungsverhältnis $\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2}$? (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion der Schaltung in Abbildung 6 die folgende Form besitzt: (2 Punkte)

$$\frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1} = \frac{R_2R_4}{R_1R_3} \cdot \frac{j\omega R_3C_2}{(1+j\omega R_2C_1)\cdot(1+j\omega R_3C_2)}$$

(d) Im Folgenden gilt $R_2C_1 = 10^{-2}R_3C_2$, $R_3 = R_4 = 1\,k\Omega$, $C_1 = 0,75\,nF$ und $C_2 = 15\,nF$. Berechnen Sie die Werte der Widerstände R_1 und R_2, sodass sich im Durchlassbereich eine Verstärkung von 20 dB einstellt. (2 Punkte)

(e) Wählen Sie die Normierungsfrequenz $\Omega_G = \omega R_3C_2$ und geben Sie die Gleichungen für Amplituden- und Phasengang an. (2 Punkte)

(f) Skizzieren Sie Amplituden- und Phasengang der Schaltung aus Abbildung 6 in Diagramm 4.1 (Amplitudengang) und Diagramm 4.2 (Phasengang). Beschriften Sie alle Achsen! (5 Punkte)

(g) Wie nennt man die Schaltung aus Abbildung 6? (1 Punkt)

Lösung:

(a) Schaltung 1: Amplitudengang C, aktiver Tiefpass, 1. Ordnung
Schaltung 2: Amplitudengang D, passiver Hochpass 1. Ordnung
Schaltung 3: Amplitudengang B, passiver Hochpass 2. Ordnung
Schaltung 4: Amplitudengang A, Allpass

(b) Der Spannungsfolger wird eingesetzt um beide Teilschaltungen voneinander zu entkoppeln. Für $\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2}$ gilt somit $\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} = 1$.

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1} &= \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_3} \cdot \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \\
&= \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_3} \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \\
&= \left(-\frac{R_4}{R_3 + \frac{1}{j\omega C_2}}\right) \cdot \left(-\frac{\frac{R_2}{1+j\omega R_2C_1}}{R_1}\right) \\
&= \frac{R_2R_4}{R_1R_3} \cdot \frac{j\omega R_3C_2}{(1+j\omega R_2C_1)\cdot(1+j\omega R_3C_2)}
\end{aligned}$$

(d) Es gilt: $R_2C_1 = 10^{-2}R_3C_2$, daher lässt sich R_2 wie folgt berechnen:

$$R_2 = \frac{10^{-2}R_3C_2}{C_1} = \frac{10^{-2}\cdot 1\,k\Omega\cdot 15\,nF}{0,75\,nF} = 200\,\Omega$$

Im Durchlassbereich soll eine Verstärkung von 20 dB gelten, daher gilt $\frac{R_2R_4}{R_1R_3} = 10$ und somit für R_1:

$$R_1 = \frac{R_2R_4}{10\cdot R_3} = 20\,\Omega$$

(e) Für die Übertragungsfunktion gilt:

$$\frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1} = 10\cdot\frac{j\Omega_G}{(1+j\Omega_G)\cdot(1+10^{-2}j\Omega_G)}$$

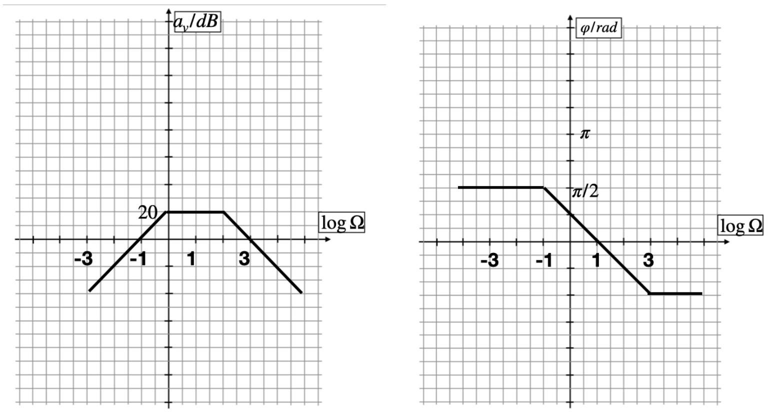
Für den Amplitudengang gilt:

$$a_v = 20dB + 20\log(j\Omega_G) - 20\log(1+j\Omega_G) - 20\log(1+j10^{-2}\Omega_G)$$

Für den Phasengang gilt:

$$\varphi = \arg(j\Omega_G) - \arg(1+j\Omega_G) - \arg(1+j10^{-2}\Omega_G)$$

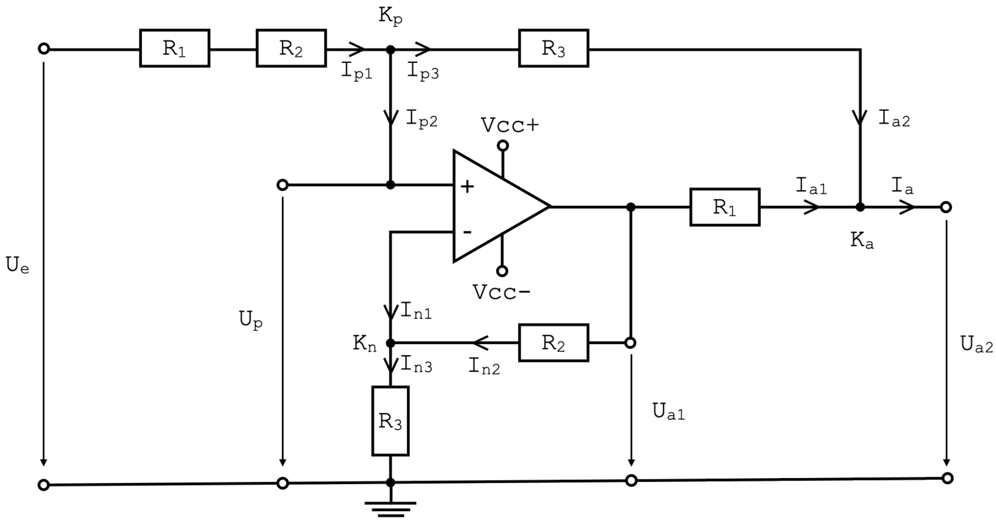
(f) Amplituden- und Phasengang sehen wie folgt aus:



(g) Bandpass

Aufgabe 5 **(15 Punkte)**
Operationsverstärker

Gegeben sei die folgende Operationsverstärkerschaltung. Treffen Sie für alle folgenden Aufgabenteile die Annahme, dass es sich um einen idealen Operationsverstärker handelt.



(a) Was gilt für die Differenzspannung zwischen dem invertierenden und nicht-invertierenden Eingang des Operationsverstärkers in Gegenkopplung? Welche Spannung liegt zwischen dem Knoten K_n und Masse an? (1 Punkt)

(b) Drücken Sie die Ströme I_{p1}, I_{p2}, I_{p3}, I_{n1}, I_{n2}, I_{n3}, I_{a1} und I_{a2} jeweils in Abhängigkeit von U_e, U_p, U_{a1}, U_{a2}, R_1, R_2 und R_3 aus. (3 Punkte)

(c) Stellen Sie die Knotengleichungen für die Knoten K_p, K_n und K_a in Abhängigkeit von U_e, U_p, U_{a1}, U_{a2}, R_1, R_2, R_3 und I_a auf. (3 Punkte)

(d) Zeigen Sie, dass für I_a gilt: (4 Punkte)

$$I_a = \frac{1}{R_1} U_e + \frac{R_2 - R_3}{R_1 R_3} U_{a2}$$

Hinweis: Leiten Sie zunächst Ausdrücke für U_{a1} und U_p aus den Knotengleichungen K_n und K_p her. Die folgenden Aufgabenteile können unabhängig von diesem gelöst werden.

Im Folgenden gelte $R_2 = R_3$.

(e) Welche Besonderheit ergibt sich hiermit für den Ausgangsstrom I_a? (1 Punkt)

(f) Benennen Sie die Schaltung. (1 Punkt)

(g) Wodurch ist I_a in der Praxis begrenzt? (1 Punkt)

(h) In der Praxis weichen Bauteile oft geringfügig von ihren Nennwerten ab. Wie kann dennoch sichergestellt werden, dass R_2 und R_3 exakt gleich groß sind? (1 Punkt)

Lösung:

(a) Für den idealen Operationsverstärker beträgt die Differenzspannung zwischen den beiden Eingängen 0 V. Daher liegt zwischen dem Knoten K_n und Masse die Spannung U_p an.

(b)

$$I_{p1} = \frac{U_e - U_p}{R_1 + R_2}$$
$$I_{p2} = 0$$
$$I_{p3} = \frac{U_p - U_{a2}}{R_3}$$
$$I_{n1} = 0$$
$$I_{n2} = \frac{U_{a1} - U_p}{R_2}$$
$$I_{n3} = \frac{U_p}{R_3}$$
$$I_{a1} = \frac{U_{a1} - U_{a2}}{R_1}$$
$$I_{a2} = I_{p3} = \frac{U_p - U_{a2}}{R_3}$$

(c) K_p :

$$I_{p1} - I_{p2} - I_{p3} = 0$$
$$\frac{U_e - U_p}{R_1 + R_2} + \frac{U_{a2} - U_p}{R_3} = 0$$

K_n :

$$I_{n1} + I_{n2} - I_{n3} = 0$$
$$\frac{U_{a1} - U_p}{R_2} - \frac{U_p}{R_3} = 0$$

K_a :

$$I_{a1} + I_{a2} - I_a = 0$$
$$\frac{U_{a1} - U_{a2}}{R_1} + \frac{U_p - U_{a2}}{R_3} - Ia = 0$$

(d) Durch Auflösen der Knotengleichung des Knotens K_n nach U_{a1} ergibt sich:

$$U_{a1} - U_p = \frac{R_2}{R_3} U_p$$
$$U_{a1} = \frac{R_2}{R_3} U_p + U_p$$

Durch Auflösen der Knotengleichung des Knotens K_p nach U_p ergibt sich:

$$(U_e - U_p) R_3 + (U_{a2} - U_p)(R_1 + R_2) = 0$$
$$R_3 U_e - R_3 U_p + (R_1 + R_2) U_{a2} - (R_1 + R_2) U_p = 0$$
$$R_3 U_e + (R_1 + R_2) U_{a2} = U_p (R_3 + R_1 + R_2)$$
$$U_p = \frac{R_3 U_e + (R_1 + R_2) U_{a2}}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Durch Auflösen der Knotengleichung des Knotens K_a nach I_a und Einsetzen der Gleichungen für U_{a1} und U_p ergibt sich:

$$\begin{aligned}
I_a &= \frac{U_{a1} - U_{a2}}{R_1} + \frac{U_p - U_{a2}}{R_3} \\
&= \frac{\frac{R_2}{R_3} U_p + U_p - U_{a2}}{R_1} + \frac{U_p - U_{a2}}{R_3} \\
&= \frac{R_2}{R_1 R_3} U_p + \frac{1}{R_1} U_p - \frac{1}{R_1} U_{a2} + \frac{1}{R_3} U_p - \frac{1}{R_3} U_{a2} \\
&= U_p \left(\frac{1}{R_1} + \frac{R_2}{R_1 R_3} + \frac{1}{R_3} \right) - U_{a2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) \\
&= U_p \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 R_3} - U_{a2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) \\
&= \frac{R_3 U_e + (R_1 + R_2) U_{a2}}{R_1 R_3} - U_{a2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) \\
&= \frac{1}{R_1} U_e + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{R_2}{R_1 R_3} - \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3} \right) U_{a2} \\
&= \frac{1}{R_1} U_e + \frac{R_2 - R_3}{R_1 R_3} U_{a2}
\end{aligned}$$

(e) I_a ist ausschließlich von U_e abhängig. Insbesondere ist I_a unabhängig von der Ausgangsspannung U_{a2} und der Last.

(f) Spannungsgesteuerte Stromquelle.

(g) In der Praxis ist I_a durch den maximalen Ausgangsstrom des Operationsverstärkers begrenzt.

(h) Indem mindestens drei der vier Instanzen von R_2 und R_3 als einstellbare Widerstände (Potentiometer) realisiert werden, wird sichergestellt, dass trotz Bauteiltoleranzen R_2 und R_3 den exakt gleichen Widerstand aufweisen.