Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Werner Nahm   Übungsleiter: M.Sc. Jochen Brenneisen

---

Klausur

26. September 2022
Beginn: 8:00 Uhr

Nachname: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikel-Nr.: ______________________

Nummer der Mappe: __________ (=OZ)

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem nicht programmierbaren Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein!
Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare!
Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

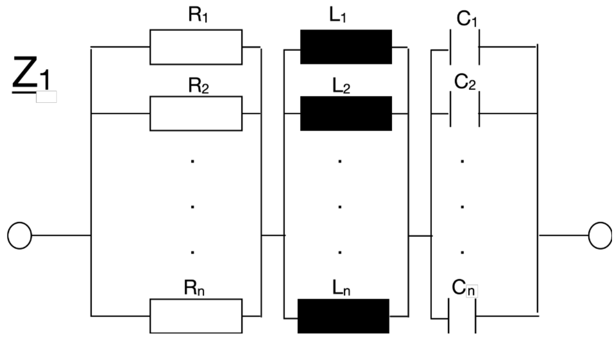
Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	21	
2	16	
3	20	
4	23	
5	14	
Gesamt:	94	

Aufgabe 1 **(21 Punkte)**

Ortskurve

Gegeben sei die folgende Schaltung:



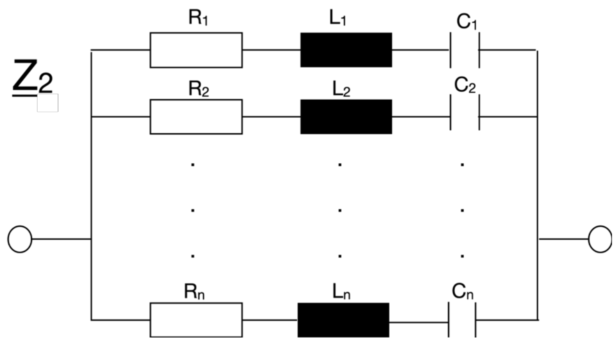
Für diese gilt:

$$R_1 = R_2 = ... = R_n = R$$
$$L_1 = L_2 = ... = L_n = L$$
$$C_1 = C_2 = ... = C_n = C$$

(a) Berechnen Sie die Impedanz $\underline{Z}_1(R, L, C)$ der Gesamtschaltung und trennen Sie diese nach Real- und Imaginärteil. (3 Punkte)

(b) Zeichnen Sie die Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}_1$ und die Ortskurve der Admittanz $\underline{Y}_1$ in die Diagramme 1.1 (Impedanz) bzw. 1.2 (Admittanz). Beschriften Sie dabei in jedem Diagramm den Schnittpunkt mit der x-Achse und die beiden Grenzwerte $\omega = 0$ und $\omega \to \infty$. (4 Punkte)

Nun sei die folgende Schaltung gegeben:



Für diese gilt:

$$R_1 = R_2 = ... = R_n = R$$
$$L_1 = L_2 = ... = L_n = L$$
$$C_1 = C_2 = ... = C_n = C$$

(c) Berechnen Sie die Impedanz $\underline{Z}_2(R, L, C)$ der Gesamtschaltung. Berechnen Sie anschließend das Verhältnis zwischen den Impedanzen beider Schaltungen $\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$. (3 Punkte)

(d) Zeichnen Sie eine Schaltung, deren Impedanz $\underline{Z}_3$ der folgenden Angabe entspricht. Begründen Sie Ihr Vorgehen. (3 Punkte)

$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{j\omega L_i}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{j\omega C_i}$$

Für diese gilt:

$$R_1 \neq R_2 \neq ... \neq R_n$$
$$L_1 \neq L_2 \neq ... \neq L_n$$
$$C_1 \neq C_2 \neq ... \neq C_n$$

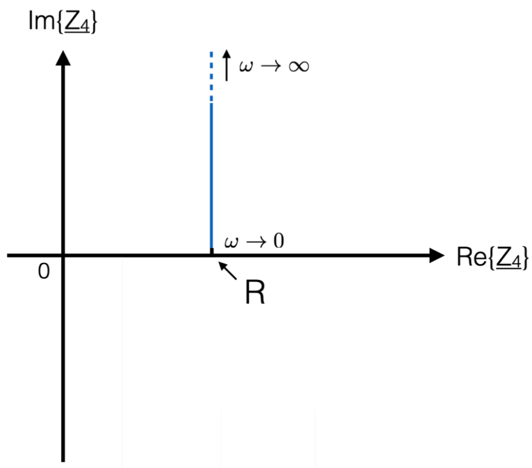
Hinweis: Passen Sie die Schaltung der Impedanz $\underline{Z}_2$ entsprechend an.

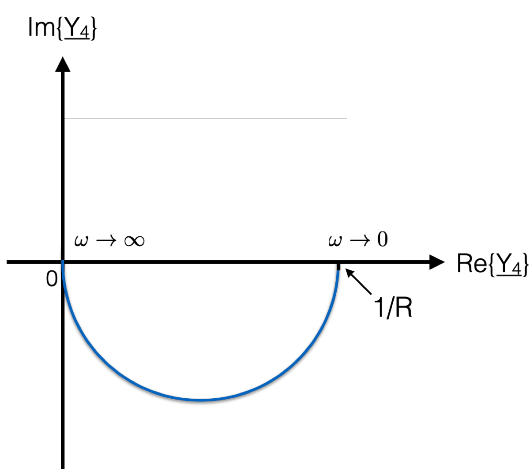
(e) Ersetzen Sie in der Schaltung aus Aufgabenteil d) (Impedanz $\underline{Z}_3$) alle Widerstände durch Kapazitäten und alle Kapazitäten durch Widerstände. Berechnen Sie die Resonanzkreisfrequenz. (3 Punkte)

(f) Berechnen Sie für die Schaltung aus Aufgabenteil d) (Impedanz $\underline{Z}_3$) die Kreisfrequenz, bei der die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung gerade $\mathbf{+45°}$ beträgt. (3 Punkte)

Die folgende Teilaufgabe lässt sich unabhängig von den bisherigen Teilaufgaben lösen.

(g) Entwerfen Sie eine mögliche Realisierungen der Schaltung 4 (Impedanz $\underline{Z}_4$), die zu den beiden im folgenden gegebenen Ortskurven passt und begründen Sie Ihre Bauteilwahl. (2 Punkte)





Lösung:

(a) Die Gesamtimpedanz kann durch Addition der Teilimpedanzen berechnet werden, da es sich um eine Parallelschaltung handelt:

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{j\omega L_i}} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} j\omega C_i}$$

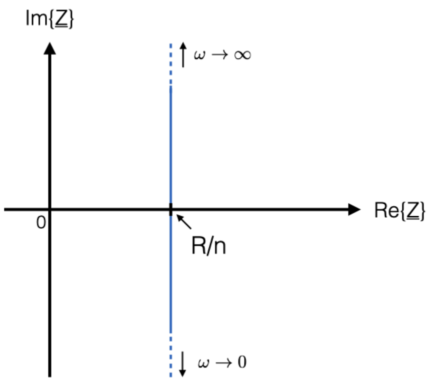
$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{\frac{n}{R}} + \frac{1}{\frac{n}{j\omega L}} + \frac{1}{nj\omega C_i}$$

$$\underline{Z}_1 = \frac{R}{n} + \frac{j\omega L}{n} + \frac{1}{nj\omega C_i}$$

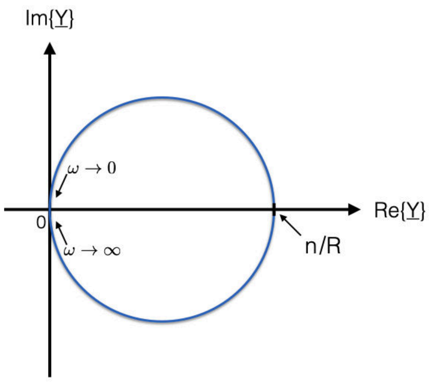
Getrennt nach Imaginär- und Realteil erhält man:

$$\underline{Z}_1 = \frac{R}{n} + j\left(\frac{\omega L}{n} - \frac{1}{n\omega C}\right)$$

(b) Die Impedanzortskurve ergibt sich wie folgt:



Die Admittanzortskurve kann durch Spiegelung am Einheitskreis bestimmt werden:



(c) Die Gesamtimpedanz kann durch Addition der Teilimpedanzen berechnet werden, da es sich um eine Serienschaltung handelt:

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i + j\omega L_i + \frac{1}{j\omega C_i}}}$$

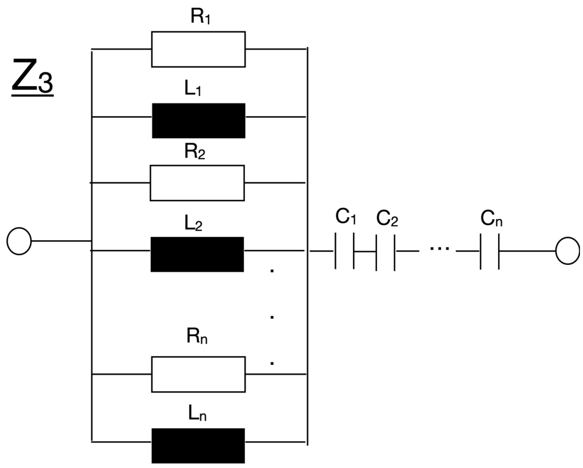
$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{n}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}}$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{n}$$

Für das Verhältnis gilt entsprechend:

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = 1$$

(d) Die entsprechende Schaltung ist:



(e) Ersetzen der Bauteile und Aufteilen der Impedanz ergibt:

$$\underline{Z}_3 = \sum_{i=1}^{n} R_i + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} j\omega C_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{j\omega L_i}}$$

$$\underline{Z}_3 = \sum_{i=1}^{n} R_i + \frac{1}{j\omega \sum_{i=1}^{n} C_i + \frac{1}{j\omega} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}}$$

$$\underline{Z}_3 = \sum_{i=1}^{n} R_i + \frac{j\omega}{-\omega^2 \sum_{i=1}^{n} C_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i}}$$

$$\underline{Z}_3 = \sum_{i=1}^{n} R_i + j\left(\frac{\omega}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i} - \omega^2 \sum_{i=1}^{n} C_i}\right)$$

Für die Resonanzkreisfrequenz ω_0 gilt:

$$Im(\underline{Z}) = 0$$

Daraus folgt:

$$\frac{\omega_0}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i} - \omega_0^2 \sum_{i=1}^{n} C_i} = 0$$

Stellt man diese Gleichung nach ω_0 um, erhält man die Gleichung für die Resonanzkreisfrequenz:

$$\omega_0 = 0$$

(f) Für eine Phasenverschiebung von +45° zwischen Strom und Spannung gilt:

$$Im\{\underline{Z}\} = Re\{\underline{Z}\}$$

Setzt man die Ergebnisse aus Aufgabenteil e) ein, erhält man:

$$\sum_{i=1}^{n} R_i = \frac{\omega_1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i} - \omega_1^2 \sum_{i=1}^{n} C_i}$$

Multipliziert man mit dem (-1)-fachen des Nenners und subtrahiert man ω_1 auf die linke Seite, erhält man:

$$\omega_1^2 \sum_{i=1}^{n} C_i \sum_{i=1}^{n} R_i + \omega_1 - \sum_{i=1}^{n} R_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i} = 0$$

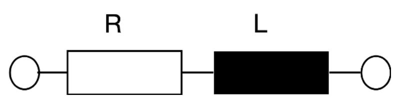
Diese quadratische Gleichung kann mit der Mitternachtsformel, mit der pq-Formel oder durch quadratische Ergänzung gelöst werden. Man erhält:

$$\omega_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(\sum_{i=1}^{n} R_i)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i} \sum_{i=1}^{n} C_i}}{2 \sum_{i=1}^{n} C_i \sum_{i=1}^{n} R_i}$$

Der Term unter Wurzel ist für alle R, L und C größer als der Term vor der Wurzel. Da eine Frequenz nicht negativ sein kann gilt:

$$\omega_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(\sum_{i=1}^{n} R_i)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i} \sum_{i=1}^{n} C_i}}{2 \sum_{i=1}^{n} C_i \sum_{i=1}^{n} R_i}$$

(g) Aus der Impedanzortskurve lässt sich ablesen, dass für kleine Frequenzen ein rein reeller Wert vorliegt. Die Halbgerade oberhalb der x-Achse lässt auf eine serielle Spule schließen. Eine mögliche Realisierungen ist somit:

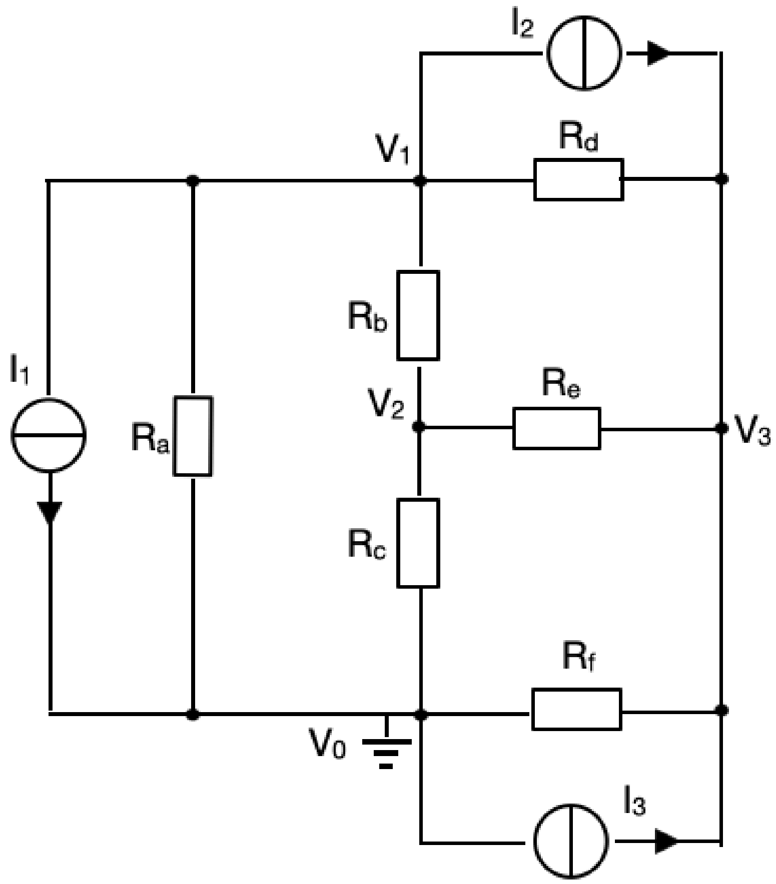


Aufgabe 2 **(16 Punkte)**

Netzwerke

Gegeben sei die folgende Schaltung mit den zugehörigen Bauteilwerten:

Schaltung 1



$$R_a = R_b = R_c = R_d = R_e = R_f = 1\,\Omega$$
$$I_1 = 2\,\mathrm{A};\ I_2 = 6\,\mathrm{A};\ I_3 = 22\,\mathrm{A}$$

(a) Schreiben Sie ein allgemeines „Kochrezept“ für das formalisierte Maschenstromverfahren. (6 Punkte)

(b) Analysieren Sie Schaltung 1 mit Hilfe des formalisierten Knotenpunktpotentialverfahrens. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

i. Stellen Sie das Gleichungssystem auf. (2 Punkte)

ii. Definieren Sie die Cramersche Regel (die Gleichung genügt). (1 Punkt)

iii. Bestimmen Sie **eines** der Potentiale V_1, V_2 oder V_3 mit Hilfe der Cramerschen Regel. (3 Punkte)

(c) Wandeln Sie die Stromquellen aus Schaltung 1 in Spannungsquellen um und zeichnen Sie das aktualisierte Schaltbild. (3 Punkte)

(d) Führen Sie zeichnerisch an geeigneter Stelle eine Stern-Dreiecks-Transformation durch. (1 Punkt)

Lösung:

(a) Für das Maschenstromverfahren gilt:

1. Umwandlung aller Stromquellen in Spannungsquellen.
2. Festlegung der Zählpfeile für Strom und Spannung.
3. Maschenströme definieren.
4. Alle linear unabhängigen Mascheingleichungen aufstellen, wobei die Maschenströme als Unbekannte gewählt werden.
5. Gleichungssystem nach den Maschenströmen auflösen.
6. Zweigströme aus den Maschenströmen berechnen.

(b) i.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_d} & -\frac{1}{R_b} & -\frac{1}{R_d} \\ -\frac{1}{R_b} & \frac{1}{R_b}+\frac{1}{R_c}+\frac{1}{R_e} & -\frac{1}{R_e} \\ -\frac{1}{R_d} & -\frac{1}{R_e} & \frac{1}{R_d}+\frac{1}{R_e}+\frac{1}{R_f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_1-I_2 \\ 0 \\ I_2+I_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & -\frac{1}{1} \\ -\frac{1}{1} & \frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1} & -\frac{1}{1} \\ -\frac{1}{1} & -\frac{1}{1} & \frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-6 \\ 0 \\ 6+22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}$$

ii. Die Komponenten x_i eines lineares Gleichungssystems der Form $Ax = b$ sind gegeben durch

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}\,.$$

iii. Im Fall von Schaltung 1 lautet die Cramersche Regel $V_i = \frac{\det(G_i)}{\det(G)}$. Daher müssen die Determinanten von G, G_1, G_2 und G_3 bestimmt werden.

$$\det(G) = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 16$$

$$\det(G_1) = \det \begin{pmatrix} -8 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 28 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 48$$

$$\det(G_2) = \det \begin{pmatrix} 3 & -8 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 28 & 3 \end{pmatrix} = 80$$

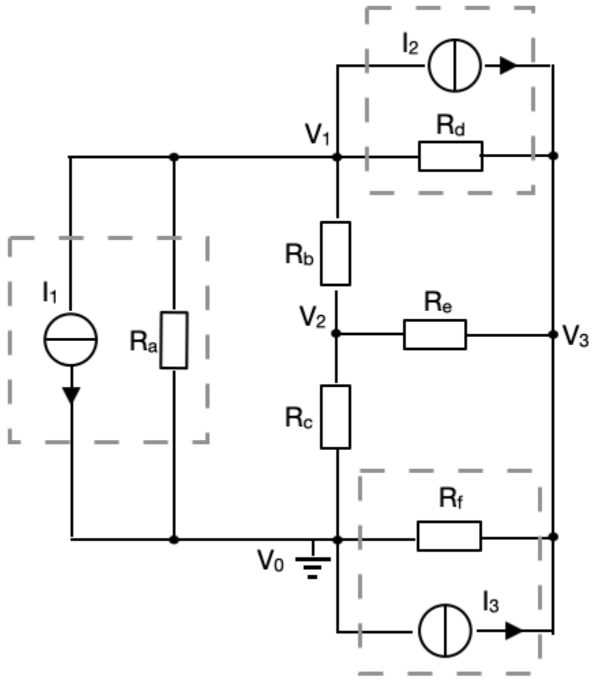
$$\det(G_3) = \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & -8 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 28 \end{pmatrix} = 192$$

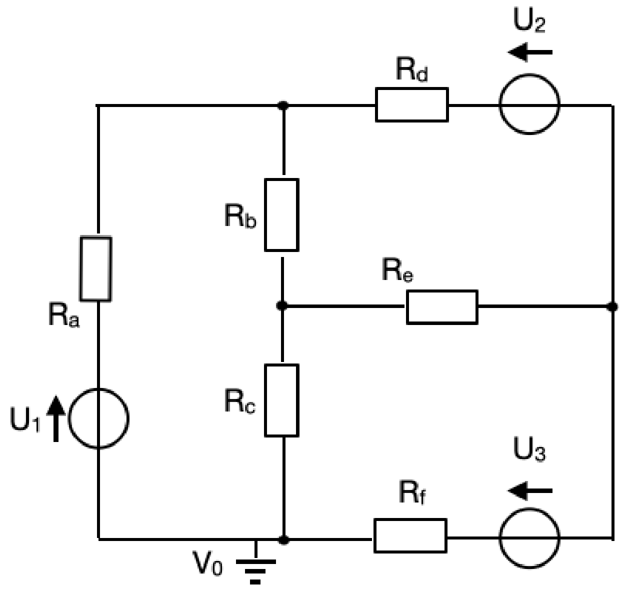
Daraus folgen die Potentiale:

$$V_1 = \frac{det(G_1)}{det(G)} = \frac{48}{16} = 3\,\mathrm{V}\,, \quad V_2 = \frac{det(G_2)}{det(G)} = \frac{80}{16} = 5\,\mathrm{V}\,,$$

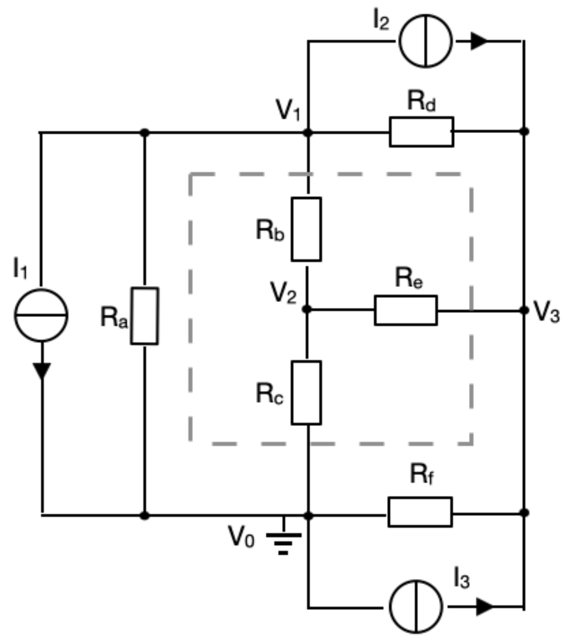
$$V_3 = \frac{det(G_3)}{det(G)} = \frac{192}{16} = 12\,\mathrm{V}\,.$$

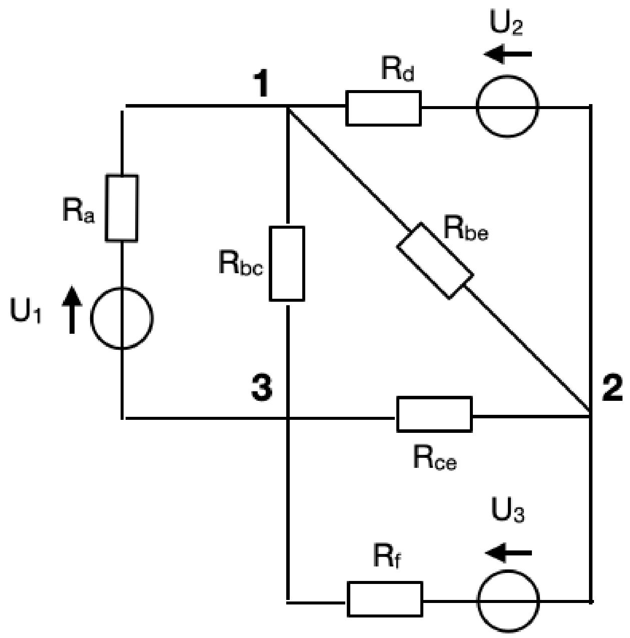
(c) Zeichnerische Lösung:





(d) Zeichnerische Lösung:





Aufgabe 3 **(20 Punkte)**

Komplexe Wechselstromlehre

In dieser Aufgabe soll folgende Schaltung aus Quelle, Übertrager und Verbraucher betrachtet werden (Abbildung 1). Dabei gelten die folgenden Annahmen und Bauteilwerte: $f = 50\,Hz$, $L_1 = 200\,mH$, $L_2 = 10 \cdot L_1$, $R_1 = R_2 = 1\,\Omega$.

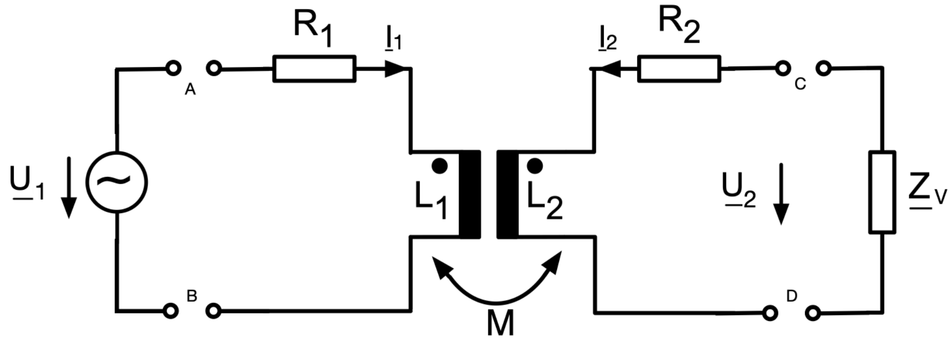


Abbildung 1: Zu untersuchende Schaltung

Für die ersten Aufgabenteile sind alle Klemmen A bis D verbunden. Wichtig: Runden Sie in dieser Aufgabe alle Ergebnisse auf drei Nachkommastellen.

(a) Geben Sie die drei Gleichungen an, mit denen sich die Schaltung vollständig beschreiben lässt. (3 Punkte)
Hinweis: Zwei der Gleichungen beziehen sich auf die Spannung $\underline{U}_2$.

(b) Zeigen Sie, dass für die Eingangsimpedanz der Schaltung gilt: (2 Punkte)

$$\underline{Z}_{ein} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_V}.$$

Ab sofort seien die Klemmen C und D nicht mehr verbunden.

(c) Um die magnetische Kopplung M zu quantifizieren, wurde eine Spannung $\underline{U}_1 = 230\,V$ an der Quelle eingestellt. Eine Messung hat ergeben, dass die Spannung $\underline{U}_2 \approx (287{,}427 + j4{,}575)\,V$ beträgt. Berechnen Sie den gesuchten Wert. (4 Punkte)

Das Ersatzschaltbild des Verbrauchers $\underline{Z}_V$ lässt sich in folgender Schaltung darstellen:

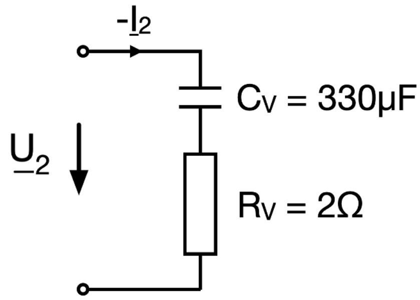


Abbildung 2: Ersatzschatbild des Verbrauchers

(d) Da die Reaktanz (Imaginärteil der Impedanz) nicht erwünscht ist, erhalten Sie den Auftrag, diese zu kompensieren. Bestehende Verschaltungen können dafür nicht verändert werden. Welches Bauteil wird deshalb wie verschaltet? Begründen Sie, welches Bauteil eingesetzt wird und geben Sie die Verschaltung an. Zeichnen Sie das aktualisierte Ersatzschaltbild. Berechnen Sie außerdem den benötigen Bauteilwert. Geben Sie zusätzlich die resultierende Gesamtimpedanz der kompensierten Schaltung $\underline{Z}_{V,k}$ an. (6 Punkte)

(e) Nun wird der kompensierte Verbraucher an die restliche Schaltung angeschlossen (Alle Klemmen A bis D sind also verbunden). An den kompensierten Verbraucher soll nun eine reine Wirkleistung von $P_V = 3\,kW$ übertragen werden. Wie muss die Quellspannung $\underline{U}_1$ eingestellt werden, um dies zu erreichen? (5 Punkte)
Hinweise: Berechnen Sie zuerst den Strom $\underline{I}_2$.
Falls Sie Aufgabenteil c) oder d) nicht bearbeitet haben, nehmen Sie an, dass die folgenden Werte gelten: $M = 300\,mH$, $\underline{Z}_{V,k} = 50\,\Omega$.

Lösung:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 && (I)\\
\underline{U}_2 &= j\omega M \underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 && (II)\\
\underline{U}_2 &= -\underline{Z}_V \cdot \underline{I}_2 && (III)
\end{aligned}$$

(b) Gleichsetzen von II und III

$$\begin{aligned}
\underline{U}_2 &= j\omega M \underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 = -\underline{I}_2 \underline{Z}_V\\
0 &= j\omega M \underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_V)\underline{I}_2\\
\underline{I}_2 &= -\frac{j\omega M \underline{I}_1}{R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_V}
\end{aligned}$$

in I einsetzen ergibt

$$\underline{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + (j\omega M) \cdot \frac{(-j\omega M \underline{I}_1)}{R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_V}$$

Damit gilt

$$\underline{Z}_{ein} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_V}$$

(c) Es gilt $\underline{I}_2 = 0$. Somit folgt aus I und II: $\underline{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1$ und $\underline{U}_2 = j\omega M \underline{I}_1$. Nach $\underline{I}_1$ auflösen und gleichsetzen liefert:

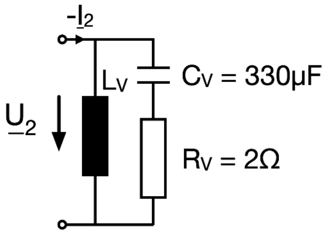
$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{\underline{U}_2}{j\omega M}$$

und somit

$$M = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \cdot \frac{R_1 + j\omega L_1}{j\omega} = 250\,mH$$

(d) Vor der Kompensation gilt $\underline{Z}_V = R_V + \frac{1}{j\omega C_V}$.
Der Verbraucher verhält sich also ohmsch-kapazitiv. Damit bei der Kompensation die Reaktanz verschwindet, muss also eine Spule verwendet

werden. Damit die bisherige Verschaltung nicht verändert wird, wird diese parallel geschaltet. Somit ergibt sich das Ersatzschaltbild:



Für die Gesamtadmittanz der kompensierten Schaltung gilt:

$$\underline{Y}_{V,k} = \frac{1}{j\omega L_V} + \frac{1}{R_V + \frac{1}{j\omega C_V}} = -j\frac{1}{\omega L_V} + \frac{j\omega C_V}{1 + j\omega C_V R_V}$$
$$= \frac{j\omega C_V(1 - j\omega C_V R_V)}{1 + \omega^2 C_V^2 R_V^2} - j\frac{1}{\omega L_V} = \frac{\omega^2 C_V^2 R_V}{1 + \omega^2 C_V^2 R_V^2} + j(\frac{\omega C_V}{1 + \omega^2 C_V^2 R_V^2} - \frac{1}{\omega L_V})$$

Mit $Im\{\underline{Y}_{V,k}\} = 0$ folgt

$$\frac{\omega C_V}{1 + \omega^2 C_V^2 R_V^2} = \frac{1}{\omega L_V}$$

Aufgelöst nach L_V ergibt sich

$$L_V = \frac{1 + \omega^2 C_V^2 R_V^2}{\omega^2 C_V} = \frac{1}{\omega^2 C_V} + C_V R_V^2 = 32\,mH$$

Aus dem Realteil der Admittanz folgt durch die Kompensation ($Im\{Y_{V,k}\} = 0$):

$$\underline{Z}_{V,k} = \frac{1}{Re\{\underline{Y}_{V,k}\}} = \frac{1 + \omega^2 C_V^2 R_V^2}{\omega^2 C_V^2 R_V} = 48,52\,\Omega$$

(e) Unter Berücksichtigung der auf der Abbildung vorgegebenen Pfeilrichtung des Stromes $\underline{I}_2$ und unter der Voraussetzung, dass der Strom rein reell sein soll, gilt für diesen Strom:

$$P_V = \underline{I}_2^2 \cdot \underline{Z}_{V,k}$$
$$\underline{I}_2 = -\sqrt{\frac{P_V}{\underline{Z}_{V,k}}} = -7,863\,A.$$

Um die Spannung zu berechnen, werden wieder die 3 Gleichungen aus Aufgabenteil a) umgestellt. Aus II und III folgt:

$$j\omega M\underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 = -\underline{Z}_{V,k} \cdot \underline{I}_2$$
$$0 = j\omega M\underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_{V,k})\underline{I}_2$$
$$\underline{I}_1 = -\frac{R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_{V,k}}{j\omega M}\underline{I}_2 = (62,904 - j4,958)\,A$$

Einsetzen beider Ströme in I liefert:

$$\underline{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + j\omega M\underline{I}_2$$
$$= (1 + j62,832)\,\Omega \cdot (62,904 - j4,958)\,A + j78,540\,\Omega \cdot (-7,863)\,A$$
$$= (374,425 + j3329,866)\,V$$

Alternative Werte:

$$\underline{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + j\omega M\underline{I}_2$$
$$= (1 + j62,832)\,\Omega \cdot (51,640 - j4,191)\,A + j94,248\,\Omega \cdot (-7,746)\,A$$
$$= (314,969 + j2510,408)\,V$$

Aufgabe 4 (23 Punkte)
Bodediagramm

(a) Ordnen Sie jeder Schaltung 1-4 in Abbildung 3 einen Amplitudengang von A-D und einen Phasengang von I-III zu. (12 Punkte)

Hinweis: Einer der Phasengänge kann zu zwei Schaltungen zugewiesen werden.

Geben Sie zusätzlich für jede Schaltung eine korrekte Bezeichnung an. Geben Sie außerdem wenn zutreffend an, ob es sich um eine aktive oder passive Schaltung handelt und welche Ordnung sie besitzt.

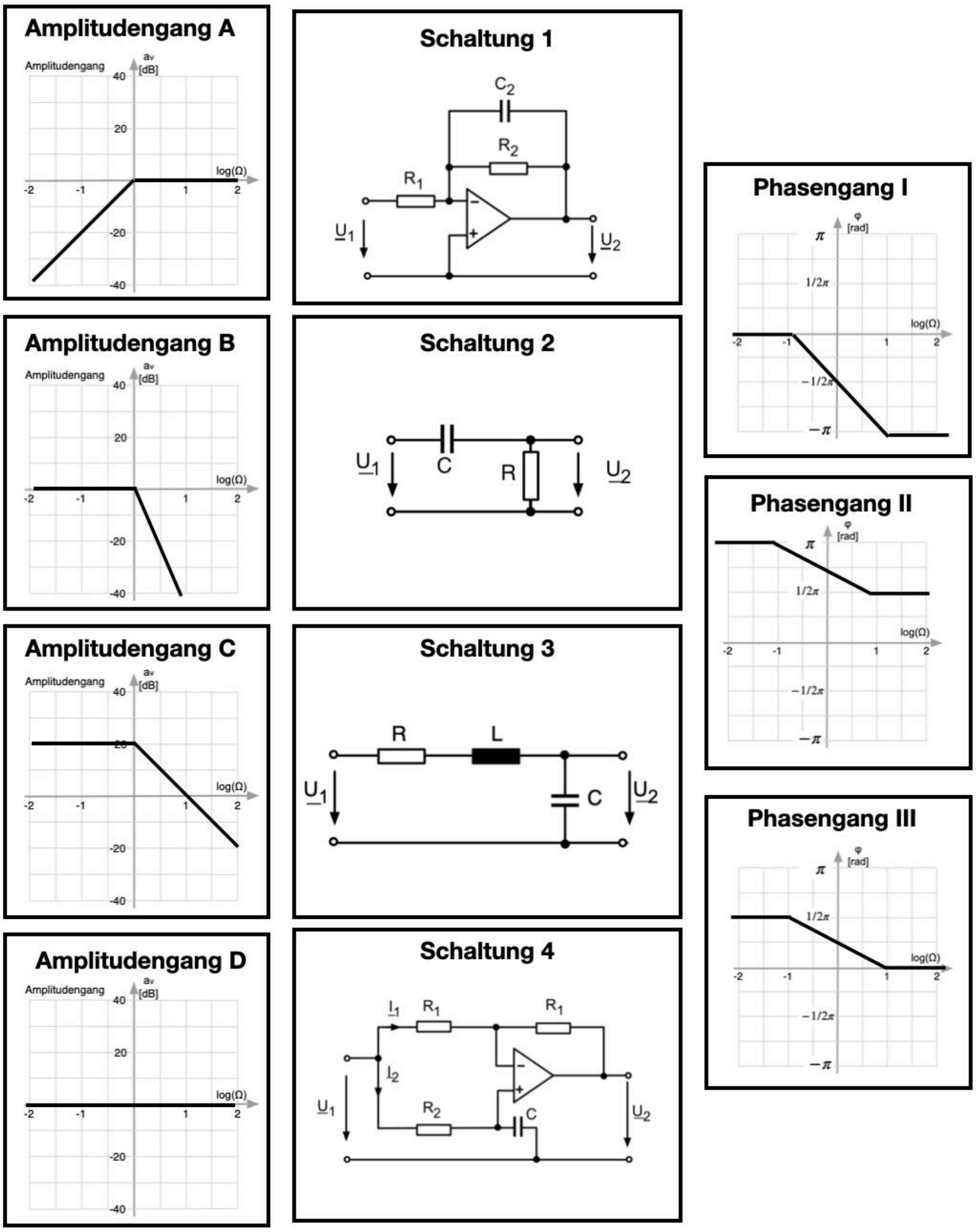


Abbildung 3: Amplitudengänge, Schaltbilder und Phasengänge

Betrachten Sie ab sofort die Schaltung in Abbildung 4.

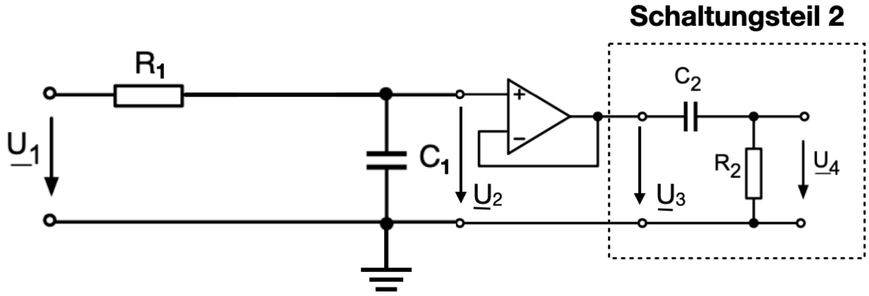


Abbildung 4: Schaltbild

(b) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion der Schaltung in Abbildung 4 die folgende Form besitzt: (2 Punkte)

$$\frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega R_2 C_2}{(1 + j\omega R_2 C_2) \cdot (1 + j\omega R_1 C_1)}$$

(c) Im Folgenden gilt $R_1 C_1 = 10^{-1} R_2 C_2$. Wählen Sie die Normierungsfrequenz $\Omega_G = \omega R_2 C_2$ und geben Sie die Gleichungen für Amplituden- und Phasengang an. (2 Punkte)

(d) Skizzieren Sie Amplituden- und Phasengang der Schaltung aus Abbildung 4 in Diagramm 4.1 (Amplitudengang) und Diagramm 4.2 (Phasengang). Beschriften Sie alle Achsen! (5 Punkte)

(e) Wie können Sie Schaltungsteil 2 um einen Operationsverstärker und einen Widerstand R_3 erweitern, um eine Verstärkung von 20 dB im Durchlassbereich zu erreichen? Wie muss dafür das Widerstandsverhältnis R_3/R_2 gewählt werden? (2 Punkte)

Lösung:

(a) Schaltung 1: Amplitudengang C, Phasengang II, aktiver Tiefpass, 1. Ordnung
Schaltung 2: Amplitudengang A, Phasengang III, passiver Hochpass 1. Ordnung
Schaltung 3: Amplitudengang B, Phasengang I, passiver Tiefpass 2. Ordnung
Schaltung 4: Amplitudengang D, Phasengang I, Allpass

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1} &= \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_3} \cdot \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \\
&= \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_3} \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \\
&= \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1} \cdot \frac{j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega R_2 C_2}
\end{aligned}$$

(c) Für die Übertragungsfunktion gilt:

$$\frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1} = \frac{j\Omega_G}{(1 + j\Omega_G) \cdot (1 + 10^{-1} j\Omega_G)}$$

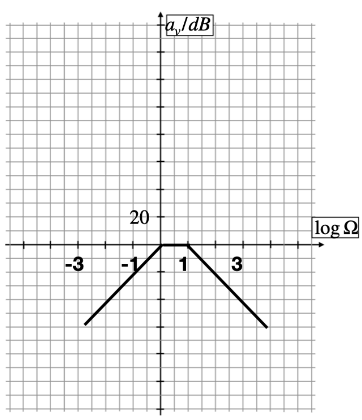
Für den Amplitudengang gilt:

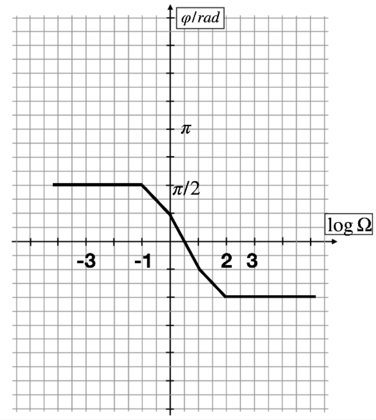
$$a_v = 20\log(j\Omega_G) - 20\log(1 + j\Omega_G) - 20\log(1 + j10^{-1}\Omega_G)$$

Für den Phasengang gilt:

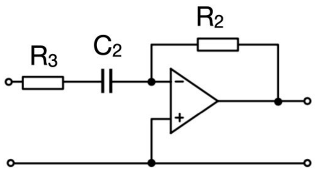
$$\begin{aligned}\varphi &= \arg(j\Omega_G) - \arg(1 + j\Omega_G) - \arg(1 + j10^{-1}\Omega_G \\ &= \pi/2 - arctan(\Omega_G) - arctan(10^{-1}\Omega_G\end{aligned}$$

(d) Amplituden- und Phasengang sehen wie folgt aus:





(e) Die entsprechende Schaltung ergänzt durch einen weiteren Widerstand R_3 und einen Operationsverstärker sieht wie folgt aus:

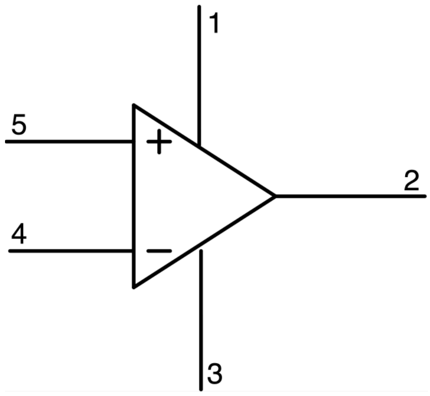


Im Durchlassbereich soll eine Verstärkung von 20dB gelten, daher gilt $\frac{R_3}{R_2} = 10^{-1}$.

Hinweis: Ein Tausch der beiden Widerstände ist selbstverständlich möglich. Dann resultiert der Kehrwert des Widerstandsverhältnisses.

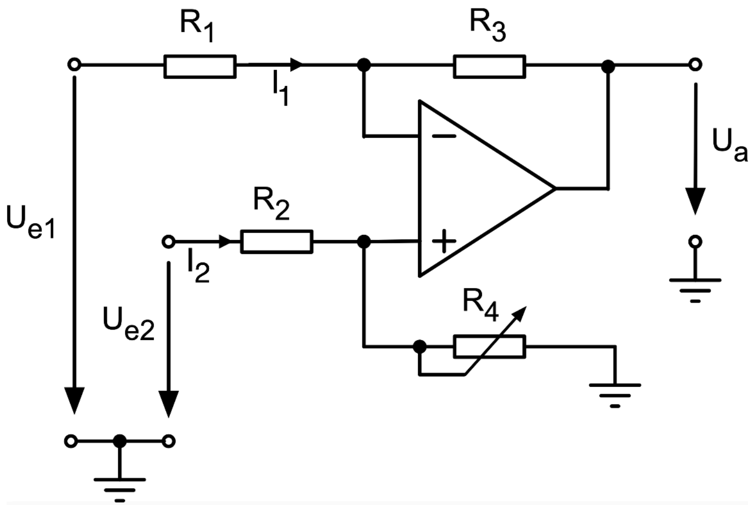
Aufgabe 5 **(14 Punkte)**
Operationsverstärker

Die nachfolgende Abbildung zeigt das Schaltbild eines Operationsverstärkers.



(a) Benennen Sie die Anschlüsse 1 bis 5. (2 Punkte)

Die nachfolgende Abbildung zeigt das Schaltbild einer klassischen Operationsverstärkeranwendung, die in der Vorlesung vorgestellt wurde:



(b) Zeigen Sie, dass die Ausgangsspannung $\underline{U}_\mathrm{a}$ durch (6 Punkte)

$$\underline{U}_\mathrm{a} = -\frac{R_3}{R_1}\underline{U}_\mathrm{e1} + \frac{R_3}{R_1}\frac{(R_4R_1 + R_4R_3)}{(R_3R_2 + R_3R_4)}\underline{U}_\mathrm{e2}$$

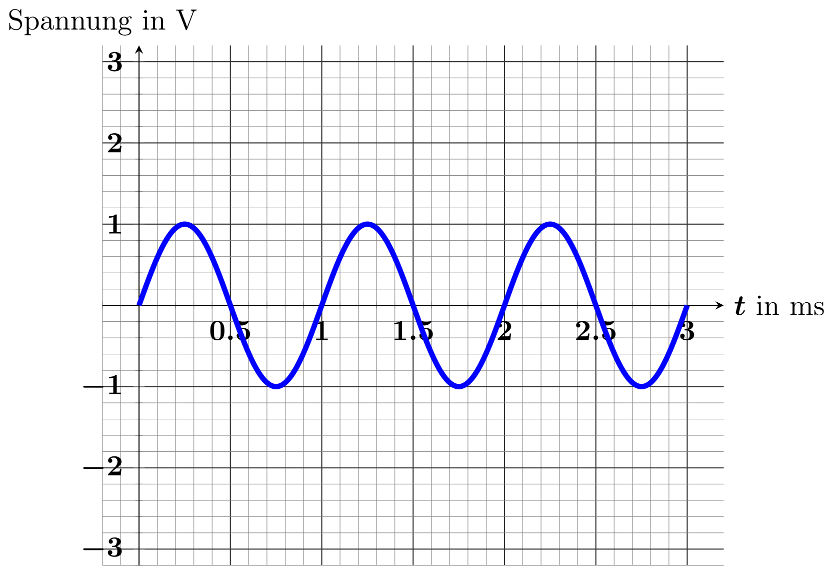
angegeben werden kann.

(c) Wie müssen die Widerstände $R_1, R_2, R_3, R_4 \neq 0$ gewählt werden, damit die aus der vorherigen Teilaufgabe bekannte Gleichung sich zu (2 Punkte)

$$\underline{U}_\mathrm{a} = \frac{R_3}{R_1}\left(\underline{U}_\mathrm{e2} - \underline{U}_\mathrm{e1}\right)$$

vereinfacht? Zeigen Sie den dazugehörigen Rechenweg.

Für die folgenden Teilaufgaben werden die bisher unbekannten Größen mit Werten versehen. Nehmen Sie an, dass $R_1 = R_2 = R_3 = 10\,\mathrm{k\Omega}$ und $\underline{U}_{\mathrm{e}1} = \underline{U}_{\mathrm{e}2} = \underline{U}_{\mathrm{e}}(t) = \hat{U}_{\mathrm{e}} \sin(2\pi f t)$ mit $\hat{U}_{\mathrm{e}} = 1\,\mathrm{V}$ und $f = 1\,\mathrm{kHz}$ gilt. Der Verlauf der Eingangsspannung ist in der folgenden Abbildung, genauso wie in Diagramm 5.1 dargestellt.



R_4 ist veränderlich. Zeichnen Sie in Diagramm 5.1 den Verlauf der Ausgangsspannung $\underline{U}_{\mathrm{a}}$ für

(d) $R_4 = 10\,\mathrm{k\Omega}$ (2 Punkte)

(e) $R_4 = 0\,\mathrm{k\Omega}$ (2 Punkte)

ein und kennzeichnen Sie deutlich, welcher Verlauf zu welcher Teilaufgabe gehört.

Lösung:

(a) (Punkte: 1 für 3 richtige, 2 für 5 richtige)

1: V+ = positive Spannungsversorgung
2: Ausgang
3: V- = negative Spannungsversorgung
4: N-Eingang = invertierender Eingang
5: P-Eingang = nichtinvertierender Eingang

(b) (Punkte: 1 für jede Masche, jeweils 1 für I_1, I_2 und Endergebnis.)

Maschen:

$$\begin{aligned} \mathrm{M1}:\ 0 &= -\underline{U}_{\mathrm{e1}} + R_1 I_1 + R_3 I_1 + \underline{U}_{\mathrm{a}} \\ \mathrm{M2}:\ 0 &= -\underline{U}_{\mathrm{e1}} + R_1 I_1 + R_4 I_2 \\ \mathrm{M3}:\ 0 &= -\underline{U}_{\mathrm{e2}} + R_2 I_2 + R_4 I_2 \end{aligned}$$

Ströme:

Aus M3 folgt: $$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_{\mathrm{e2}}}{R_2 + R_4}$$

Aus M2 folgt: $$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_{\mathrm{e1}}}{R_1} - \frac{R_4}{R_1} \frac{\underline{U}_{\mathrm{e2}}}{(R_2 + R_4)}$$

Endergebnis:

Aus M1 folgt: $$\underline{U}_{\mathrm{a}} = -\frac{R_3}{R_1}\underline{U}_{\mathrm{e1}} + \frac{R_3}{R_1}\frac{(R_4 R_1 + R_4 R_3)}{(R_3 R_2 + R_3 R_4)}\underline{U}_{\mathrm{e2}}$$

(c) (Punkte: 1 für Bedingung, 1 für Rechnung)

Bedingung:

$R_4 R_1 = R_3 R_2$ (Andere Schreibweisen selbstverst. auch zulässig.)

Rechenweg: Um die geforderte Bedingung zu erfüllen, muss folgender Term 1 ergeben:

$$1 \stackrel{!}{=} \frac{R_4 R_1 + R_4 R_3}{R_3 R_2 + R_3 R_4} = \frac{\frac{R_4}{R_4} R_1 + \frac{R_4}{R_4} R_3}{R_3 \frac{R_2}{R_4} + R_3 \frac{R_4}{R_4}} = \frac{R_1 + R_3}{R_3 \frac{R_2}{R_4} + R_3}$$

Koeffizientenvegleich liefert $R_1 = R_3 \frac{R_2}{R_4}$

(d) (Punkte: 2 für richtigen Verlauf (auch ihre Rechnung), wenn Verlauf falsch/nicht da, aber Rechnung richtig: 1 Punkt)

Rechnung: (Anm. es gilt Vereinfachung von davor, da $R_1 R_4 = R_2 R_3$ erfüllt ist)

$$U_{\mathrm{a}} = \frac{R_3}{R_1}(U_{\mathrm{e1}} - U_{\mathrm{e2}}) = \frac{R_3}{R_1}(U_{\mathrm{e}}(t) - U_{\mathrm{e}}(t)) = 0$$

Eingezeichnet in das Diagramm in der Lösung zu Teilaufgabe e) in grün (Linie bei y=0 V).

(e) (Punkte: 2 für richtigen Verlauf (auch ihne Rechnung), wenn Verlauf falsch/nicht da, aber Rechnung richtig: 1 Punkt)

Rechnung: (Anm: Vereinfachung gilt nicht mehr)

$$\begin{aligned}\underline{U}_\mathrm{a} &= -\frac{R_3}{R_1}\underline{U}_\mathrm{e}(t) + \frac{R_3}{R_1}\frac{(R_4R_1 + R_4R_3)}{(R_3R_2 + R_3R_4)}\underline{U}_\mathrm{e}(t)\\ &= -\frac{10}{10}\underline{U}_\mathrm{e}(t) + \frac{10}{10}\cdot\frac{0\cdot 10 + 0\cdot 10}{10\cdot 10 + 10\cdot 0} = -\underline{U}_\mathrm{e}(t)\end{aligned}$$

Gleiche Amplitude, aber Phasenverschiebung um 180° durch negatives Vorzeichen. Eingezeichnet in das Diagramm in rot/gestrichelt: