Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Biomedizinische Technik

Prof. Dr. rer. nat. O. Dössel
Kaiserstr. 12 / Geb 30.33
Tel.: 0721 / 608 - 2650

MEng. M. Reumann
Kaiserstr. 12 / Geb 30.33
Tel.: 0721 / 608 - 7183

Vordiplomprüfung: Lineare elektrische Netze
am 22. Februar 2006

Aufgabe 1

Gegeben sei folgende OP Schaltung:

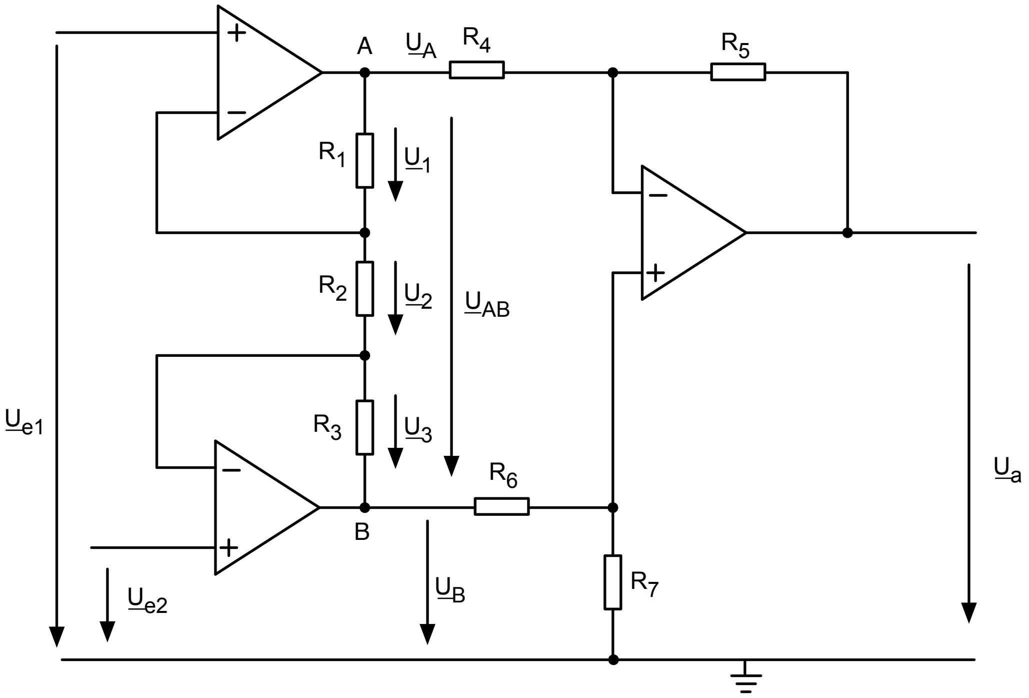


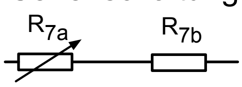
Abb.1

a) Wie lautet die Spannung über $\underline{U}_2$ als Funktion der Eingangsspannungen $\underline{U}_{e1}$ und $\underline{U}_{e2}$. Begründen Sie. (1 Punkt)

b) Welcher Strom fließt durch die Widerstande R_1 und R_3? Berechnen Sie jeweils $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_3$ als Funktion $\underline{U}_{e1}$ und $\underline{U}_{e2}$. (4 Punkte)

c) Berechnen Sie danach $\underline{U}_a$ bezüglich $\underline{U}_{e1}$ & $\underline{U}_{e2}$. Gegeben sei $R_4 = R_5 = R_6 = R_7$. (4 Punkte)

d) In der Praxis ist R_7 oft als Serienschaltung zweier Widerstände realisiert:



Nennen Sie einen Grund. (1 Punkt)

Lösung-Aufgabe 1

a) Weil $\underline{U}_d = 0$, ergibt sich $\underline{U}_2 = \underline{U}_{e1} - \underline{U}_{e2}$

b)

$$U = R \cdot I \;\Rightarrow\; I = \frac{U}{R} \;\Rightarrow\; \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{R}_2} = \frac{\underline{U}_{e1} - \underline{U}_{e2}}{\underline{R}_2}$$

$\underline{U}_3 = R_3 \underline{I}_3 = R_3 \underline{I}_2 \qquad \underline{I}_3 = \underline{I}_2$

$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 = R_1 \underline{I}_2 \qquad \underline{I}_1 = \underline{I}_2$, weil kein Strom in den OP fließt!

$$\Rightarrow \underline{U}_3 = R_3 \frac{\underline{U}_{e1} - \underline{U}_{e2}}{R_2} = \frac{R_3}{R_2} \left(\underline{U}_{e1} - \underline{U}_{e2}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{U}_1 = R_1 \frac{\underline{U}_{e1} - \underline{U}_{e2}}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} \left(\underline{U}_{e1} - \underline{U}_{e2}\right)$$

c)

$$\left(\underline{U}_B - \underline{U}_A\right) = U_{BA} \Rightarrow -\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{BA}$$

$$\Rightarrow \underline{U}_a = \frac{R_5}{R_4}\left(\underline{U}_B - \underline{U}_A\right) \text{ mit } R_7 R_4 = R_5 R_6$$

$$\Rightarrow \underline{U}_a = \left(\underline{U}_B - \underline{U}_A\right), \text{ weil } R_4 = R_5 = R_6 = R_7$$

$$\underline{U}_a = -\underline{U}_{AB} = -\left(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3\right) = \left(\underline{U}_B - \underline{U}_A\right)$$

$$\Rightarrow -\underline{U}_a = \underline{U}_{AB} = \frac{R_1}{R_2}\left(\underline{U}_{e1} - \underline{U}_{e2}\right) + \left(\underline{U}_{e1} - \underline{U}_{e2}\right) + \frac{R_3}{R_2}\left(\underline{U}_{e1} - \underline{U}_{e2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\underline{U}_a = \left(\underline{U}_{e1} - \underline{U}_{e2}\right)\left(1 + \frac{R_1 + R_3}{R_2}\right)$$

d)
Damit $R_7R_4 = R_5R_6$ ist, muss ein Widerstand einstellbar sein, denn in der Praxis sind exakt gleiche Widerstände selten umzusetzen.

Aufgabe 2

Gegeben sei folgendes Netzwerk:

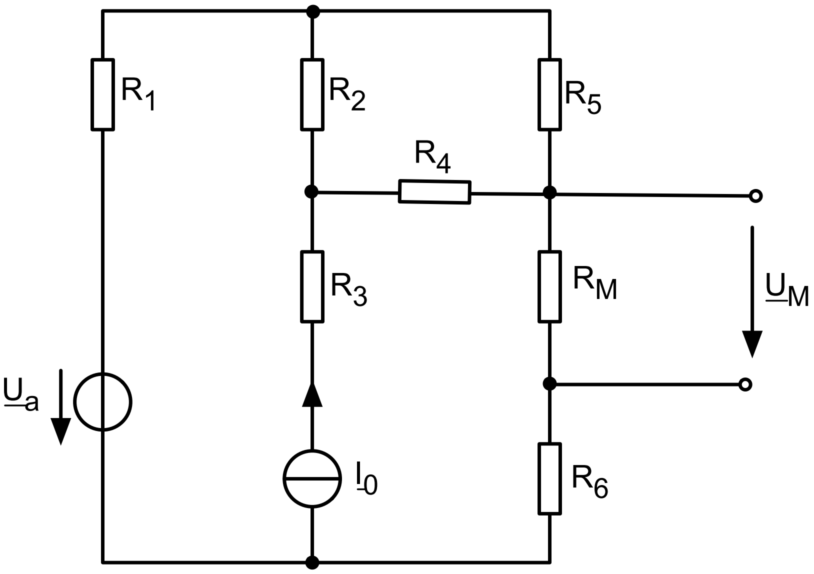


Abb.1

a) Beschreiben Sie in Stichworten das Helmholtzsche Superposition-/ Überlagerungsprinzip, um eine Spannung über einen beliebigen Widerstand in einem Netzwerk zu bestimmen. Gehen Sie davon aus, dass nur lineare und ideale Bauteile verwendet werden. (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_M$ im gegebenen Netzwerk (Abb. 1). Verwenden Sie das Helmholtzsche Superpositionsprinzip. Nehmen Sie folgende Werte der Bauteile an: (13 Punkte)

$\underline{U}_0 = 9V \quad \underline{I}_0 = 1A$

$R_1 = R_M = 1\Omega$

$R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = \frac{1}{3}\Omega$

$R_6 = \frac{7}{9}\Omega$

Hinweis: Rechnen Sie mit Brüchen!!!

Lösung-Aufgabe 2

a) siehe Skript Kapitel 2.7:

Der Überlagerungssatz, den Hermann von Helmholtz als erster formuliert hat, lautet in voller Allgemeinheit:

$$I_{k,ges} = \sum_{\text{Teillösungen } i} I_{k,i}$$

$$U_{l,ges} = \sum_{\text{Teillösungen } i} U_{l,i}$$

D. h. die Summe aller Teilströme, die durch jeweils eine Strom-/Spannungsquelle erzeugt werden, wenn die anderen Quellen "ausgeschaltet" sind, ergibt den Gesamtstrom. Dabei werden alle idealen Spannungsquellen bis auf jeweils eine duch einen Kurzschluss ersetzt und alle idealen Stromquellen bis auf jeweils eine durch eine Unterbrechung.

b) Anwenden des Helmholtzprinzips ergibt Abb.2.

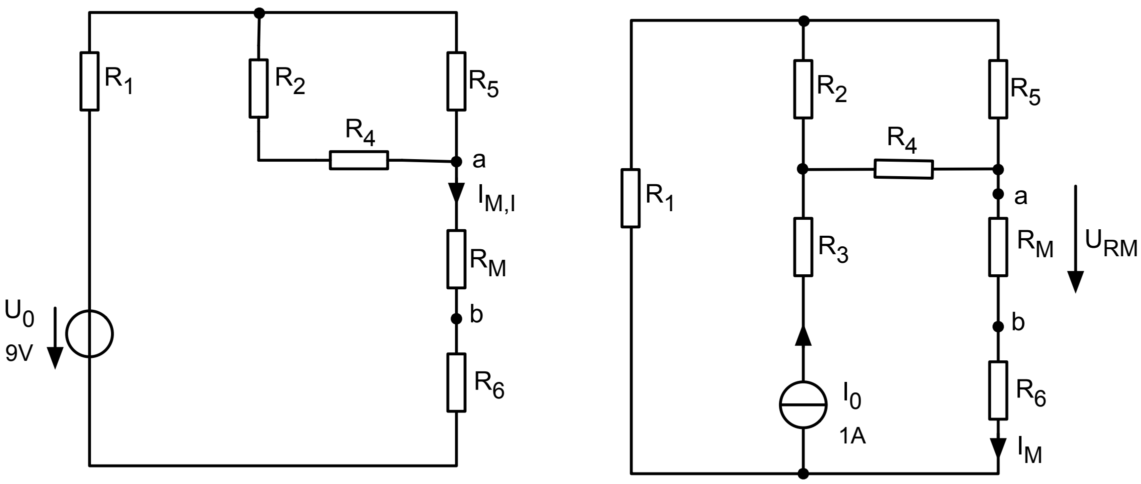


Abb.2: Teilnetzwerk I und Teilnetzwerk II.

Im Teilnetzwerk I (Abb. 2) wird zunächst nur die Spannungsquelle als aktive Quelle berücksichtigt. Der Strompfad durch den Teilwiderstand R_3 wird unterbrochen. Somit resultiert folgende Schaltung:

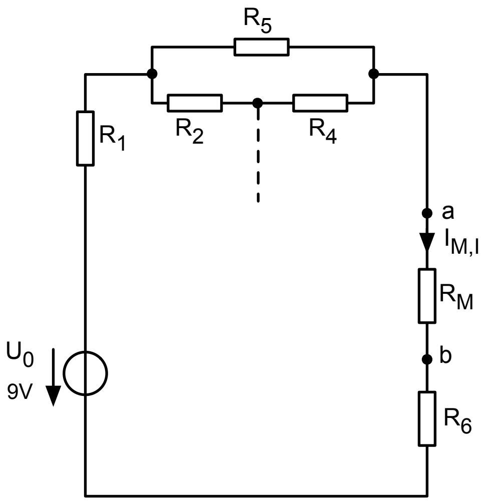


Abb. 3: Resultierendes Teilnetzwerk I nach der Unterbrechung des Strompfades mit der Stromquelle I_0.

Es resultiert eine Parallelschaltung mit dem Stromwiderstand $R_p = R_5 \parallel (R_2 + R_4)$ der in der Serie zu den Widerständen R_1, R_M, R_6 liegt. Der Strom $I_{M,I}$ ist der Quotient aus der Quellspannung U_0 und der Summe der Serienwiderstände.

$$I_{M,I} = U_0 / R_{ges} \quad \text{mit} \quad R_{ges} = R_1 + R_p + R_M + R_6$$

$$R_p = (R_2 + R_4) \| R_5 = \left(\frac{1}{3}\Omega + \frac{1}{3}\Omega \right) \Big\| \frac{1}{3}\Omega = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{2}{9}\Omega$$

$$\text{und damit : } R_{ges} = 1\Omega + \frac{2}{9}\Omega + 1\Omega + \frac{7}{9}\Omega = 3\Omega$$

Der Strom $I_{M,I}$ beträgt somit:

$$I_{M,I} = \frac{U_0}{R_{ges}} = \frac{9V}{3\Omega} = 3A$$

Im Teilnetzwerk II (Abb. 2) wird nur die Stromquelle als aktive Quelle berücksichtigt. Wir berechnen jetzt den Strom durch den Widerstand R_M, wenn nur die Stromquelle als aktive Quelle zugelassen ist. Die Spannungsquelle wird kurzgeschlossen (Abb. 4). Dann werden beide Teilströme $I_{M,I}$ und $I_{M,II}$, die beide in der gleichen Richtung fliessen, vorzeichenrichtig überlagert.

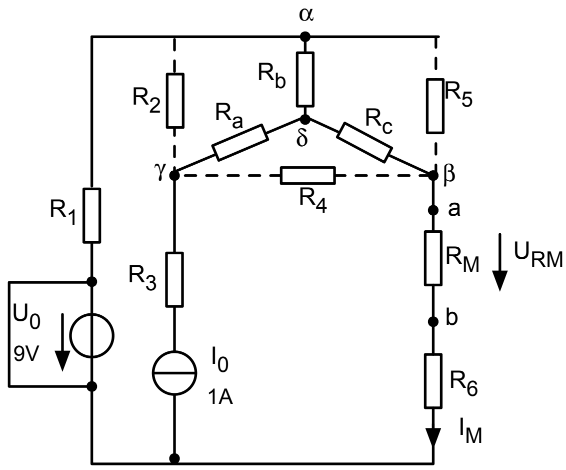


Abb. 4 Netzwerk II.

Damit wir in dieser Schaltung den Strom $I_{M,II}$ berechnen können, wird die Dreieckschaltung, gebildet aus den Widerständen R_2, R_4 und R_5, in eine Sternschaltung umgewandelt (Abb. 5).

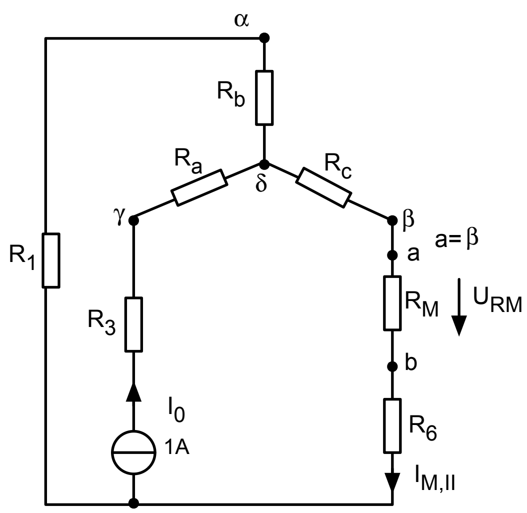


Abb. 5: Resultierendes Ersatzschaltbild nach der D-Y Umwandlung.

Es wird die Umwandlung von nur einem Widerstand ausgeführt, da die D-Schaltung symmetrisch ist.

$$R_a = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{\frac{1}{9}\Omega^2}{1\Omega} = \frac{1}{9}\Omega$$

$$R_b = \frac{1}{9}\Omega$$

$$R_c = \frac{1}{9}\Omega$$

Nach der Dreieck-Sternumwandlung hat die Schaltung folgende Gestalt (Abb. 6):

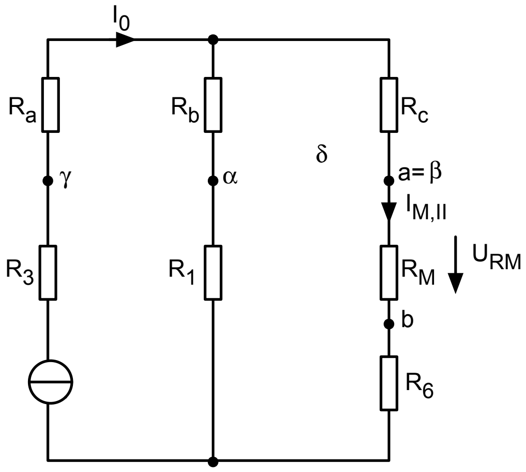


Abb. 6: Umgezeichnete Schaltung nach der D-Y-Umwandlung.

Das Produkt des Gesamtstromes I_0 mit dem zusammengefassten Widerstand der verbleibenden Parallelschaltung liefert den Spannungsabfall über dieser Parallelschaltung, der sich ebenso aus dem Produkt eines der Teilströme mit der Summe der Teilwiderstände dieses Zweiges ergibt:

$$I_0 \cdot R_{pII} = I_{M,II}\left(R_c + R_M + R_6\right)$$

$$R_{pII} = \left(R_1 + R_b\right) \| \left(R_c + R_M + R_6\right)$$

$$R_{pII} = \left(1\Omega + \frac{1}{9}\Omega\right) \| \left(\frac{1}{9}\Omega + 1\Omega + \frac{7}{9}\Omega\right)$$

$$R_{pII} = \frac{\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9}+1+\frac{7}{9}\right)}{1+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+1+\frac{7}{9}}\Omega = \frac{\frac{10}{\cancel{9}}\frac{17}{9}}{\frac{27}{\cancel{9}}}\Omega = \frac{170}{243}\Omega$$

Der Widerstand R_{PII} beträgt $170/243\,\Omega$.

Der Zweigstrom $I_{M,II}$ berechnet sich somit zu:

$$I_{M,II} = \frac{I_0 \cdot R_{pII}}{R_C + R_M + R_6}$$

$$I_{M,II} = 1A \cdot \frac{\frac{170\Omega}{243}}{\frac{1}{9}\Omega + \frac{9}{9}\Omega + \frac{7}{9}\Omega} = 1A \cdot \frac{\frac{170\Omega}{243}}{\frac{17}{9}\Omega} = 1A \cdot \frac{170\Omega}{243} \cdot \frac{9}{17\Omega} = \frac{90}{243}A$$

Der Gesamtstrom ergibt sich jetzt aus der Superposition der Teilströme $I_{M,XX}$.

$$I_M = I_{M,I} + I_{M,II}$$

$$I_M = 3A + \frac{90}{243}A = \frac{819}{243}A \approx 3{,}37A$$

Der Spannugsabfall beträgt:

$$U_{RM} = I_M \cdot 1\Omega = 3{,}37V$$

Aufgabe 3

a) Wie berechnen sich im Allgemeinen der Betrag in dB und die Phase einer Funktion $\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}$ bei einem Bodediagramm? (2 Punkte)

b) Gegeben sei folgende Funktion:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -100\frac{\left(1+j10^{-3}\Omega\right)^4}{\left(1+j10^{-2}\Omega\right)^2\left(1+j10^{-4}\Omega\right)^2}$$

Zeichnen Sie ein Bodediagramm (Betrag und Phase) dieser Funktion. (8 Punkte)

c) In welchem Frequenzbereich wird das Signal maximal vertärkt? Geben Sie die Lösung als Frequenz in Hz an, wobei die Bezugsfrequenz 1 Hz ist. Um welchen Faktor erhöht sich hier die Amplitude des Eingangssignals? (2 Punkte)

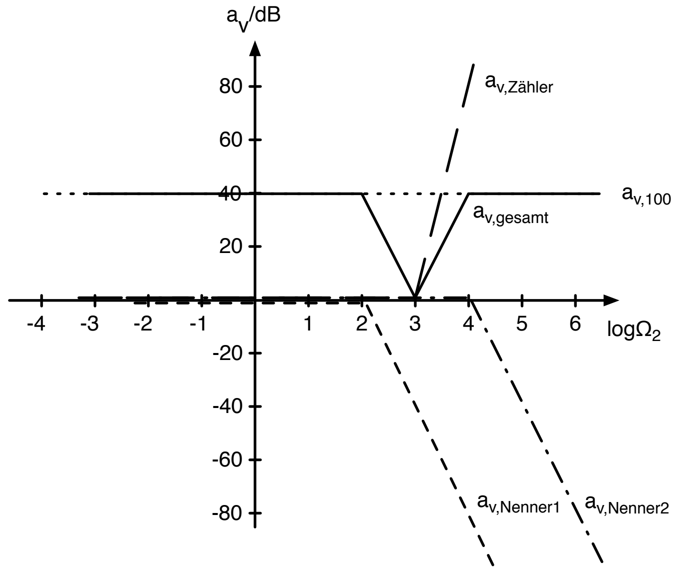
d) Ein Eingangssignal $\underline{U}_e$ enthält einen Frequenzanteil bei $\Omega = 10^5$ mit einem Betrag von 2 V. Welchen Betrag hat das Ausgangssignal $\underline{U}_a$ bei dieser Frequenz? (2 Punkte)

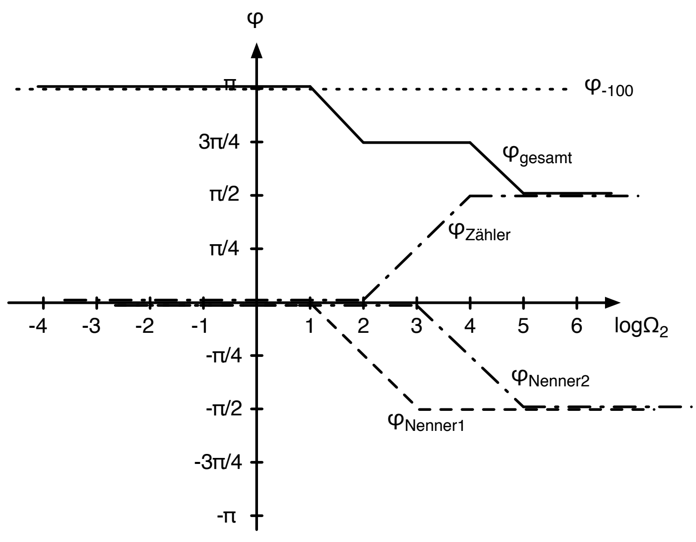
Lösung-Aufgabe 3

a)

$$a_v = 20\log\left|\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right| \qquad \varphi = \varphi_{Zähler} - \varphi_{Nenner} = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left\{\left.\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right|_{Zähler}\right\}}{\mathrm{Re}\left\{\left.\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right|_{Zähler}\right\}}\right) - \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left\{\left.\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right|_{Nenner}\right\}}{\mathrm{Re}\left\{\left.\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right|_{Nenner}\right\}}\right)$$

b)





c)
Bis logΩ = 2 und wieder ab logΩ = 4 wird das Signal maximal verstärkt, in diesem Falle mit 40dB. Bezogen auf 1Hz bedeutet das: f < 100Hz bzw. f > 10.000Hz.

Verstärkungsfaktor des Ausgangssignals:

$$\begin{aligned} 20\log\left|\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right| &= 40 \\ \log\left|\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right| &= 2 \\ \left|\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}\right| &= 100 \end{aligned}$$

d)
Bei $\Omega = 10^5$, d.h. $\log\Omega = 5$ wird das Eingangssignal mit 40dB verstärkt. Mit dem dafür in c) bestimmten Verstärkungsfaktor von 100 werden so aus 2V am Eingang 200V am Ausgang.
Ein Blick auf das Phasendiagramm zeigt, dass das Vorzeichen der Ausgangsspannung gleich dem der Eingangsspannung bleibt.

Aufgabe 4

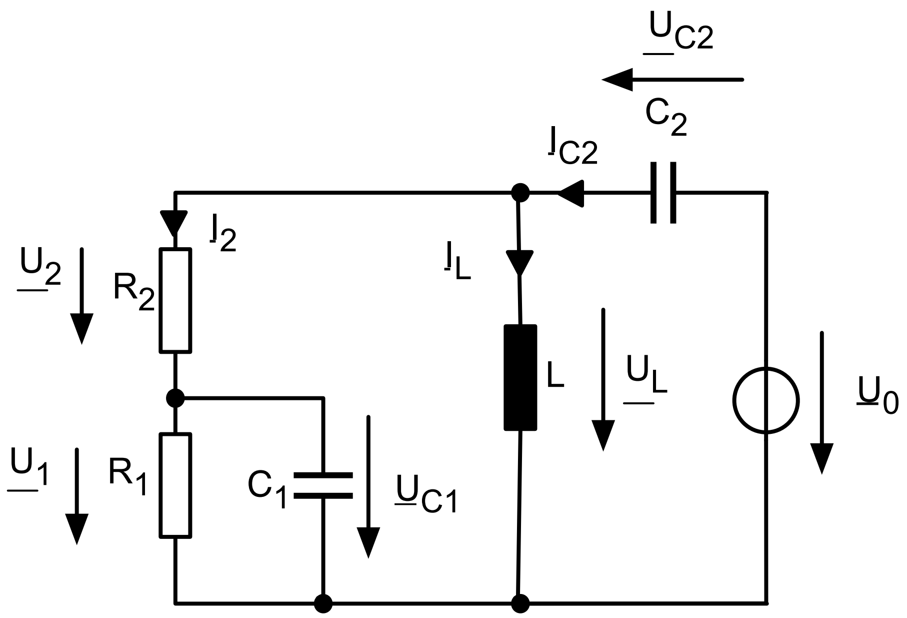


Abb. 4.1

Zeichnen Sie ein Zeigerdiagramm für das Netzwerk. Verwenden Sie nur **ein** Koordinatensystem für alle Ströme uns alle Spannungen. Sie benötigen -1 cm bis +15 cm auf der positiven Realachse und -6 cm bis +11 cm auf der Imaginärachse. Verwenden Sie folgende Maßeinheiten:

$$1\text{V} = 0{,}5\text{cm}$$
$$1\text{A} = 0{,}25\text{cm}$$

a) Gegeben sei $R_1 = 1\Omega$, $\underline{Z}_{C1} = -j2\Omega$, $R_2 = \frac{1}{5}\Omega$, $\underline{U}_L = 29\text{V}$. Berechnen Sie $\underline{U}_2$ und Tragen Sie $\underline{U}_L$ und $\underline{U}_2$ in das Koordinatensystem ein. (2 Punkte)

b) Konstruieren Sie $\underline{U}_1$. (1 Punkt)

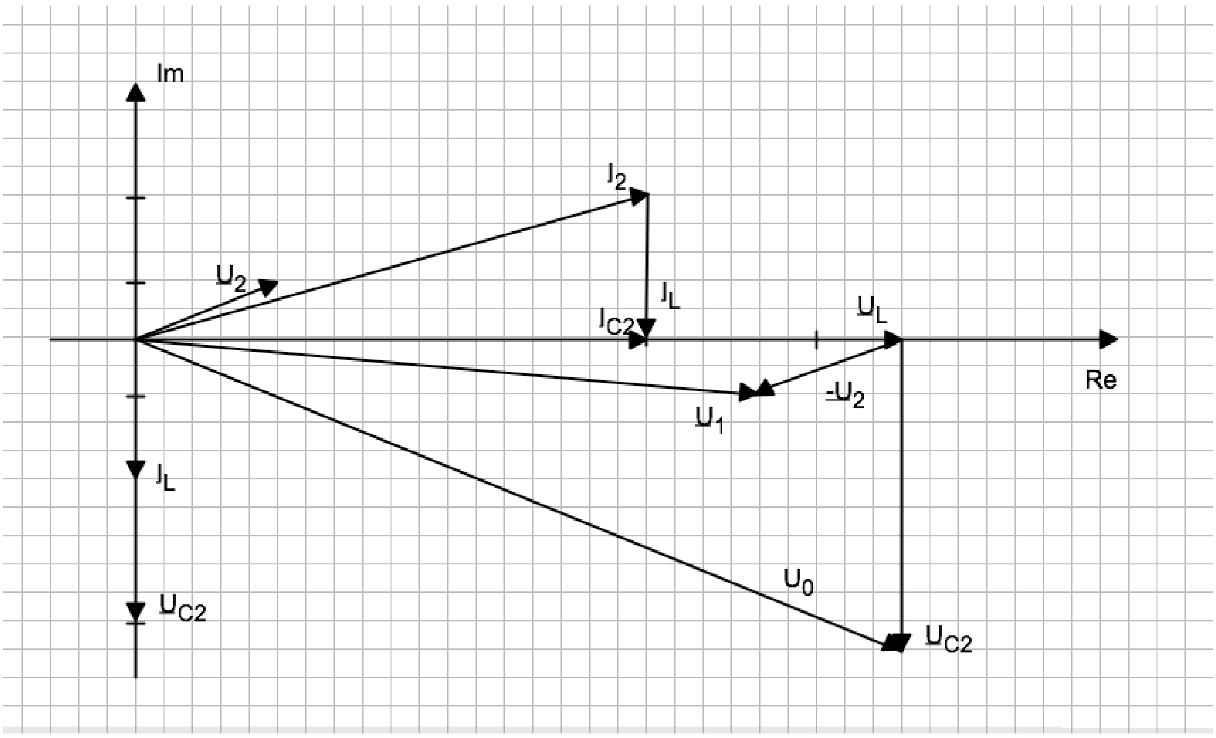
c) Berechnene Sie $\underline{I}_2$ und zeichnen Sie $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_L$ in das Koordinatensystem ein. $|\underline{I}_L|=10\text{A}$. (2 Punkte)

d) Konstruieren Sie $\underline{I}_{C2}$ und folglich $\underline{U}_{C2}$ mit $|\underline{U}_{C2}|=10\text{V}$. (2 Punkte)

e) Konstruierren Sie $\underline{U}_0$. (1 Punkt)

f) Bestimmen Sie die Werte für $\underline{Z}_L$ und $\underline{Z}_{C2}$. (2 Punkte)

Lösung-Aufgabe 4



Werte und Kontrollwerte siehe unten

a)

$$\underline{U}_2 = \frac{R_2}{R_2 + \left(R_1 \| C_1\right)} \underline{U}_L$$

$$\underline{U}_2 = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \left(\frac{1(-j2)}{1+(-j2)}\right)} 29V = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{(-j2)(1+j2)}{(1+4)}} 29V$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}(1+4-j2)} 29V = \frac{29}{5-j2} V$$

$$= \frac{29(5+j2)}{25+4} V = 5 + j2V$$

b)

$\underline{U}_1 = \underline{U}_L - \underline{U}_2 = 29\text{V} - (5 - j2) = (24 - j2)\text{V}$

c)

$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{R_2} \Rightarrow \underline{I}_2 = \frac{5 + j2}{\frac{1}{5}}\text{A} = 25 + j10\text{A}$

Da $\left|\underline{I}_L\right| = 10\text{A}$ folgt $\underline{Z}_L = j2{,}9\Omega$ und damit $\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{Z}_L} \Rightarrow \underline{I}_L = \frac{29\text{V}}{j2{,}9\Omega} = -j10\text{A}$

d)

$$\underline{I}_{C2} = \underline{I}_L + \underline{I}_2$$
$$\Rightarrow \underline{I}_{C2} = -10j\text{A} + (25 + j10)\text{A} = 25\text{A}$$
$$\underline{U}_{C2} = \underline{Z}_{C2}\underline{I}_{C2} \Rightarrow \underline{U}_{C2} = (-j0{,}4 \cdot 25)\text{V} = j10\text{V}$$

Da $\left|\underline{U}_{C2}\right| = 10\text{V}$ folgt $\underline{Z}_{C2} = -j0{,}4\Omega$

e)

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_{C2} + \underline{U}_L$$
$$\Rightarrow \underline{U}_0 = -j10\text{V} + 29\text{V}$$
$$= (29 - j10)\text{V}$$

f)

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_L} \Rightarrow \underline{Z}_L = \frac{29\text{V}}{-j10\text{A}} = j2{,}9\Omega$$
$$\underline{Z}_{C2} = \frac{\underline{U}_{C2}}{\underline{I}_{C2}} \Rightarrow \underline{Z}_{C2} \frac{-j10\text{V}}{25\text{A}} = -j0{,}4\Omega$$

Aufgabe 5

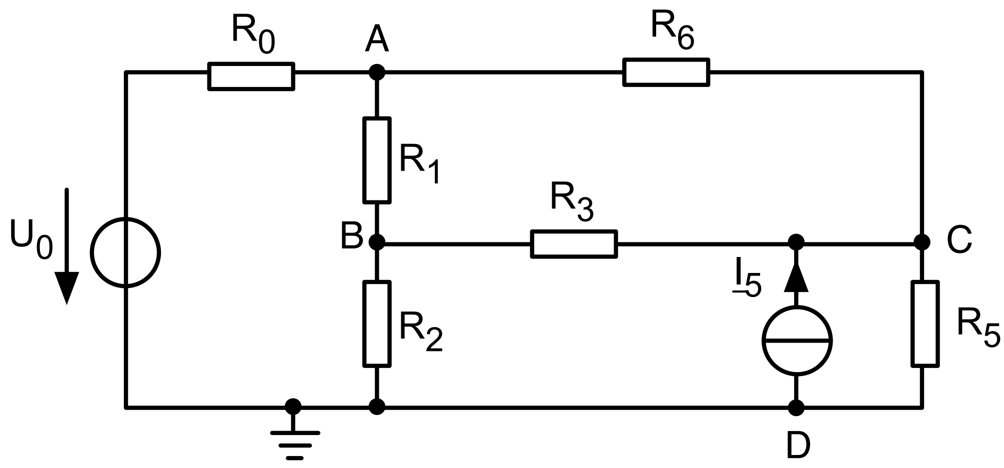


Abb.1

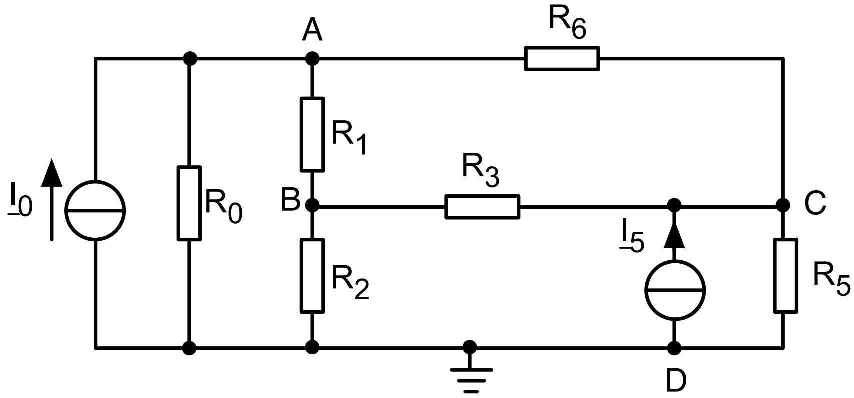
a) Erstellen Sie mit Hilfe des formalisierten Knotenpunktpotentialverfahrens die Matrixgleichung für das Netzwerk in Abb. 1. (3 Punkte)

b) Berechnen Sie das Knotenpotential U_B mit Hilfe der Cramerschen Regel. Die Determinante der Matrixgleichung aus a) sei gegeben durch
D = 0,05. Verwenden Sie folgende Werte:
$R_0 = R_2 = R_5 = 5\Omega$
$R_1 = R_3 = R_6 = 10\Omega$
$U_0 = 50V$ $I_5 = 1A$
(5 Punkte)

c) Wie groß (Betrag) ist der Strom, der durch R_2 fliesst? (1 Punkt)

Lösung-Aufgabe 5

a)



$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_0}+\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_6}\right) & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_6} \\ -\frac{1}{R_1} & \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_6} & -\frac{1}{R_3} & \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 \\ 0 \\ I_5 \end{pmatrix}$$

b)

Mit:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_0} \text{ und } R_0 = 5\Omega \text{ und } U_0 = 50V \Rightarrow I_0 = 10A$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right) & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right) & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0,4 & -0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,4 & -0,1 \\ -0,1 & -0,1 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$D = 0,4\left(0,16 - 0,01\right) - \left(-0,1\right)\left(-0,04 - 0,01\right) + \left(-0,1\right)\left(0,01 - \left(-0,04\right)\right)$$

$$= 0,4 \cdot 0,15 + 0,1\left(-0.05\right) - 0,1 \cdot 0,05$$

$$= 0,06 - 0,005 - 0,005 = 0,06 - 0,01 = 0,05$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0,4 & 10 & -0,1 \\ -0,1 & 0 & -0,1 \\ -0,1 & 1 & 0,4 \end{vmatrix} = 0,4\left(0 - \left(-0,1\right)\right) - 10\left(-0,04 - 0,01\right) + \left(-0,1\right)\left(\left(-0.1\right) - 0\right)$$

$$\Rightarrow D_2 = 0,04 + 0,5 + 0,01 = \underline{0,55}$$

$$U_B = \frac{D_2}{D}$$

$$\Rightarrow U_B = \frac{0,55}{0,05} = 11V$$

c)

$$\left|I_2\right| = \left|\frac{U_B}{R_2}\right|$$

$$\Rightarrow \left|I_2\right| = \frac{|11|}{|5|} A = 2,2A$$