

Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Biomedizinische Technik

Prof. Dr. rer. nat. O. Dössel
Kaiserstr. 12 / Geb 30.33
Tel.: 0721 / 608 - 2650

Dipl.-Ing. T.Baas
Kaiserstr. 12 / Geb 30.33
Tel.: 0721 / 608 - 2791

Bachelorprüfung: Lineare elektrische Netze
15. Februar 2010

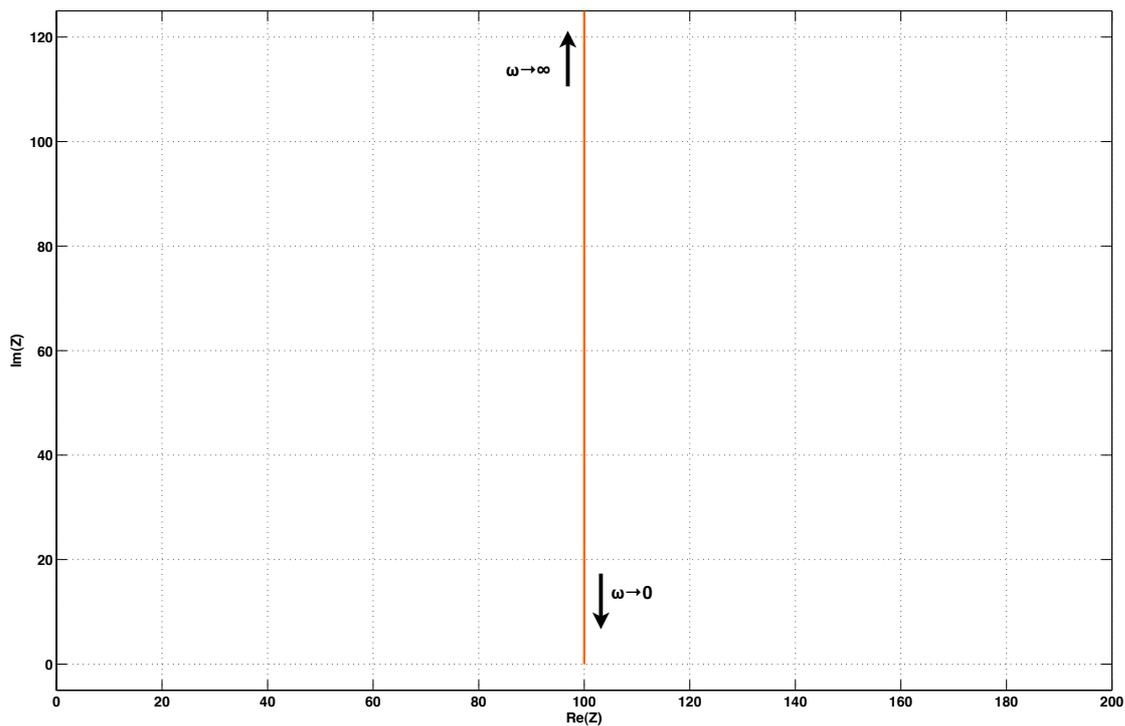
Lösung

Aufgabe 1

Ortskurve

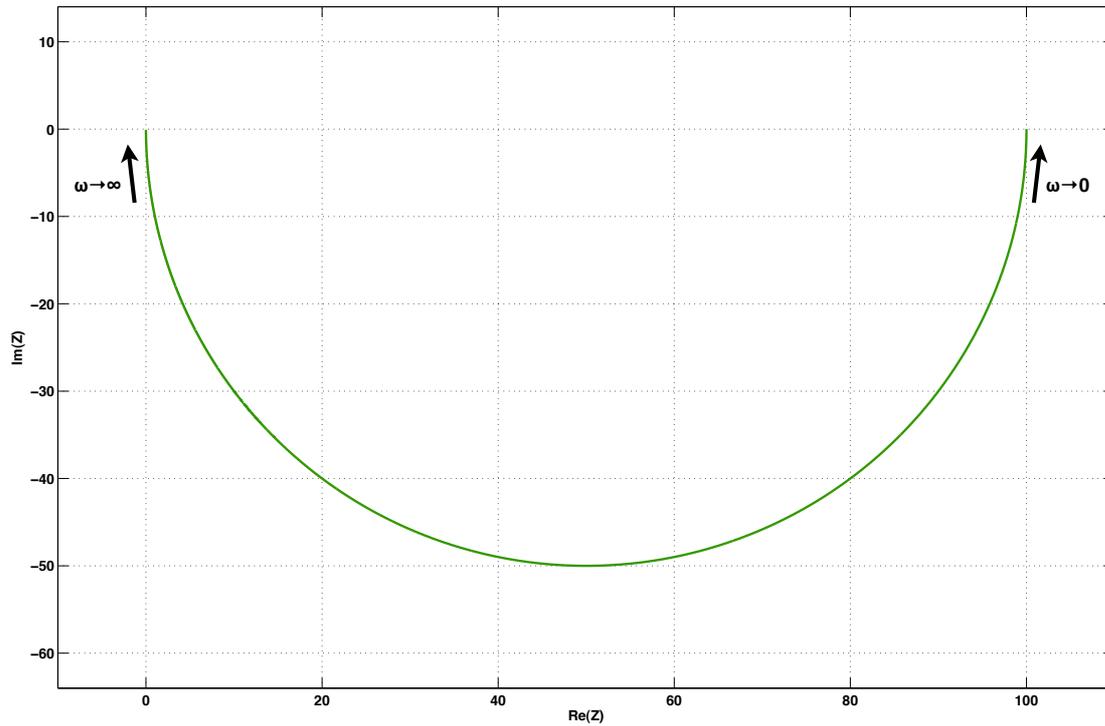
(11 Punkte)

a)



Schaltungsteil A

b)



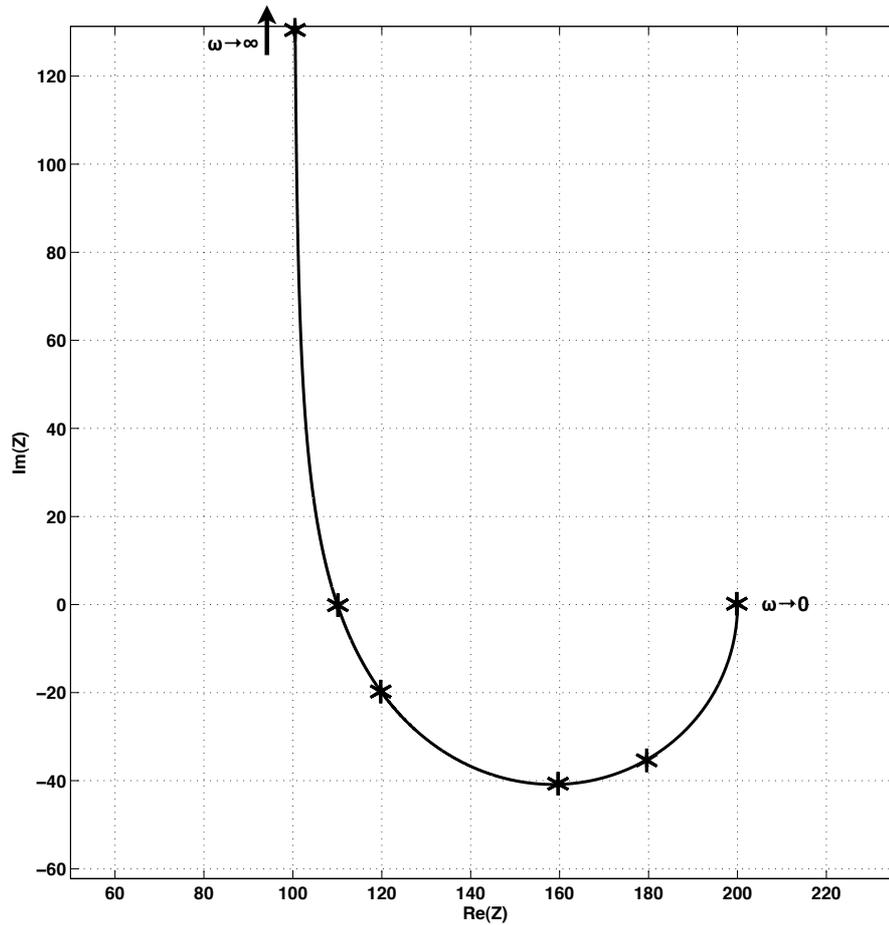
Schaltungsteil B

$$\begin{aligned}
 Z_{ges} &= R_1 + j\omega L + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C} \\
 &= R_1 + j\omega L + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C} \cdot \frac{1 - j\omega R_2 C}{1 - j\omega R_2 C} \\
 &= R_1 + j\omega L + \frac{R_2 - j\omega R_2^2 C}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2} \\
 \operatorname{Re}\{Z_{ges}\} &= R_1 + \frac{R_2}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2} \\
 \operatorname{Im}\{Z_{ges}\} &= \omega L - \frac{\omega R_2^2 C}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2}
 \end{aligned}$$

c)

$Z(\omega)$	$\text{Re}\{Z\} [\Omega]$	$\text{Im}\{Z\} [\Omega]$
$\omega \rightarrow 0$	200	0
$\omega = 500\text{s}^{-1}$	180	-35
$\omega = 816\text{s}^{-1}$	160	-40,82
$\omega = 2000\text{s}^{-1}$	120	-20
$\omega = 3000\text{s}^{-1}$	110	0
$\omega \rightarrow \infty$	100	∞

d)

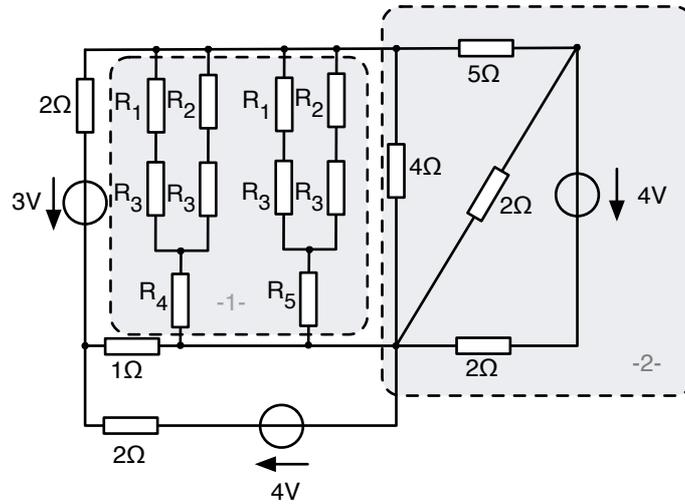


Aufgabe 2

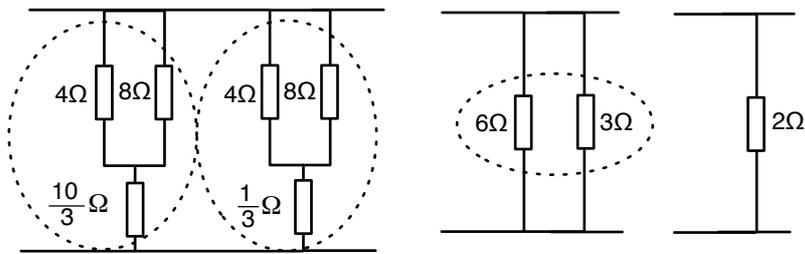
Netzwerk

(17 Punkte)

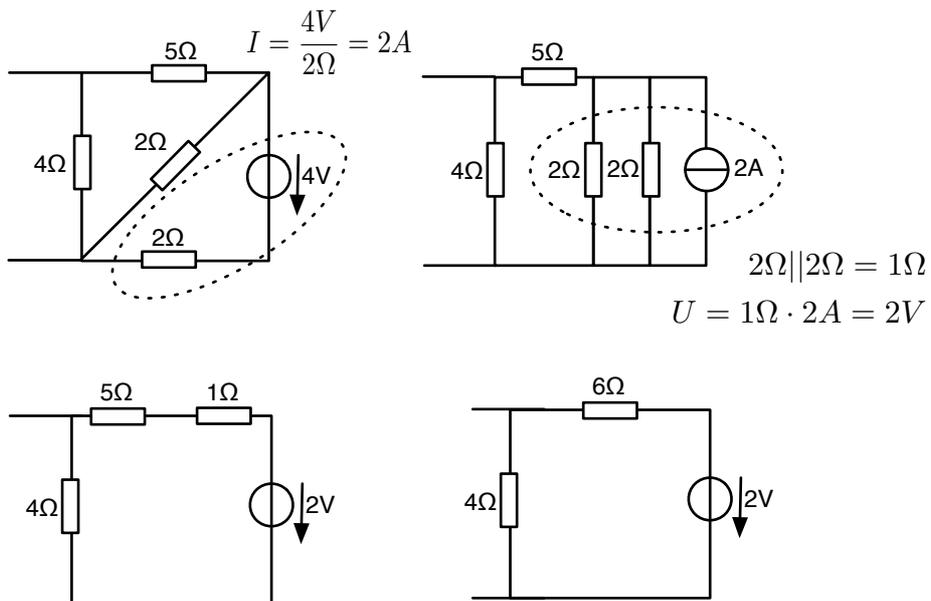
a)



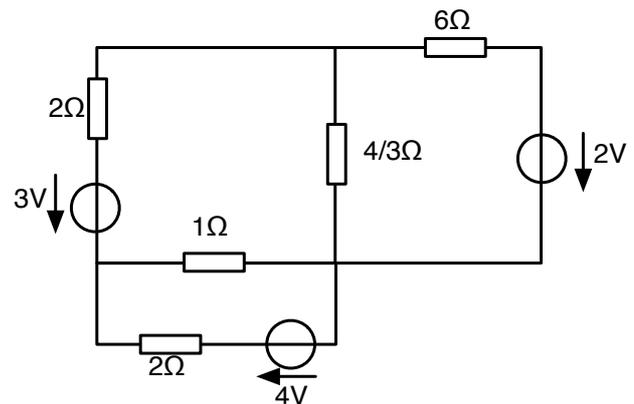
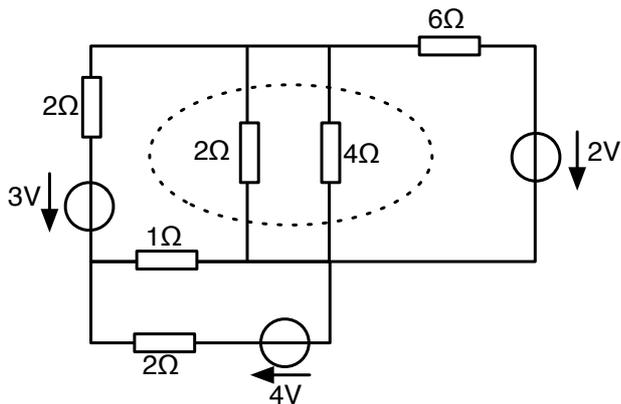
1:



2:



Zusammensetzen:



damit sind:

$$R_x = 4/3\Omega,$$

$$R_y = 6\Omega$$

$$U_z = 2V$$

b)

$$\vec{b} = A \cdot \vec{x}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} (2+4+1) & -4 & -1 \\ -4 & (3+4) & 0 \\ -1 & 0 & (2+1) \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix}$$

$$\text{Cramersche Regel anwenden: } x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

A_i = Matrix A mit i -ter Spaltenvektor durch Vektor \vec{b} ersetzt

$$\begin{aligned} D &= \det(A) = \begin{vmatrix} 7 & -4 & -1 \\ -4 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 7 \cdot 21 - (-4) \cdot (-12) + (-1) \cdot 7 = 92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \det(A_1) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -6 & 7 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot 21 - (-4) \cdot (-18) + (-1) \cdot 28 = -37 \\ I_{M1} &= \frac{D_1}{D} = \frac{-37}{92} A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \det(A_2) = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -1 \\ -4 & -6 & 0 \\ -1 & -4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 7 \cdot (-18) - 3 \cdot (-12) + (-1) \cdot [16 - 6] = -100 \\ I_{M2} &= \frac{D_2}{D} = \frac{-100}{92} A = \frac{-25}{23} A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_3 &= \det(A_2) = \begin{vmatrix} 7 & -4 & 3 \\ -4 & 7 & -6 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 7 \cdot (-28) - (-4) \cdot [16 - 6] + 3 \cdot 7 = -135 \\ I_{M3} &= \frac{D_3}{D} = \frac{-135}{92} A = -1 \frac{43}{92} A \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Zeigerdiagramm

(21 Punkte)

a) Komplexe Impedanz des Verbrauchers:

$$\underline{Z}_v = \frac{\underline{U}_a}{\underline{I}_a} = \frac{10V - j6V}{0,2A + j0,1A} = 28\Omega - j44\Omega$$

Phasenwinkel:

$$\varphi_{ui} = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\underline{Z}_v)}{\operatorname{Re}(\underline{Z}_v)}\right) = -57,53^\circ = -1\text{rad}$$

b) Die Schaltung wird ohmisch und kapazitiv belastet, da Z_v einen Realteil und einen negativen Imaginärteil hat.

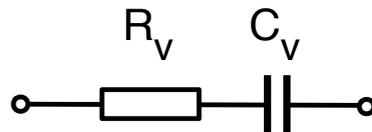
$$\underline{Z}_v = 28\Omega - j44\Omega$$

$$\rightarrow R_v = 28\Omega$$

$$\rightarrow \frac{1}{\omega C_v} = 44\Omega$$

$$C_v = \frac{1}{\omega \cdot 44\Omega} = 4,55\mu F$$

Schaltbild:



c)

$$\underline{U}_{L1} = \underline{I}_a \cdot \underline{Z}_{R1,C,L}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{L1,C} &= \frac{j\omega L_1 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{j\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C} = -j100\Omega \end{aligned}$$

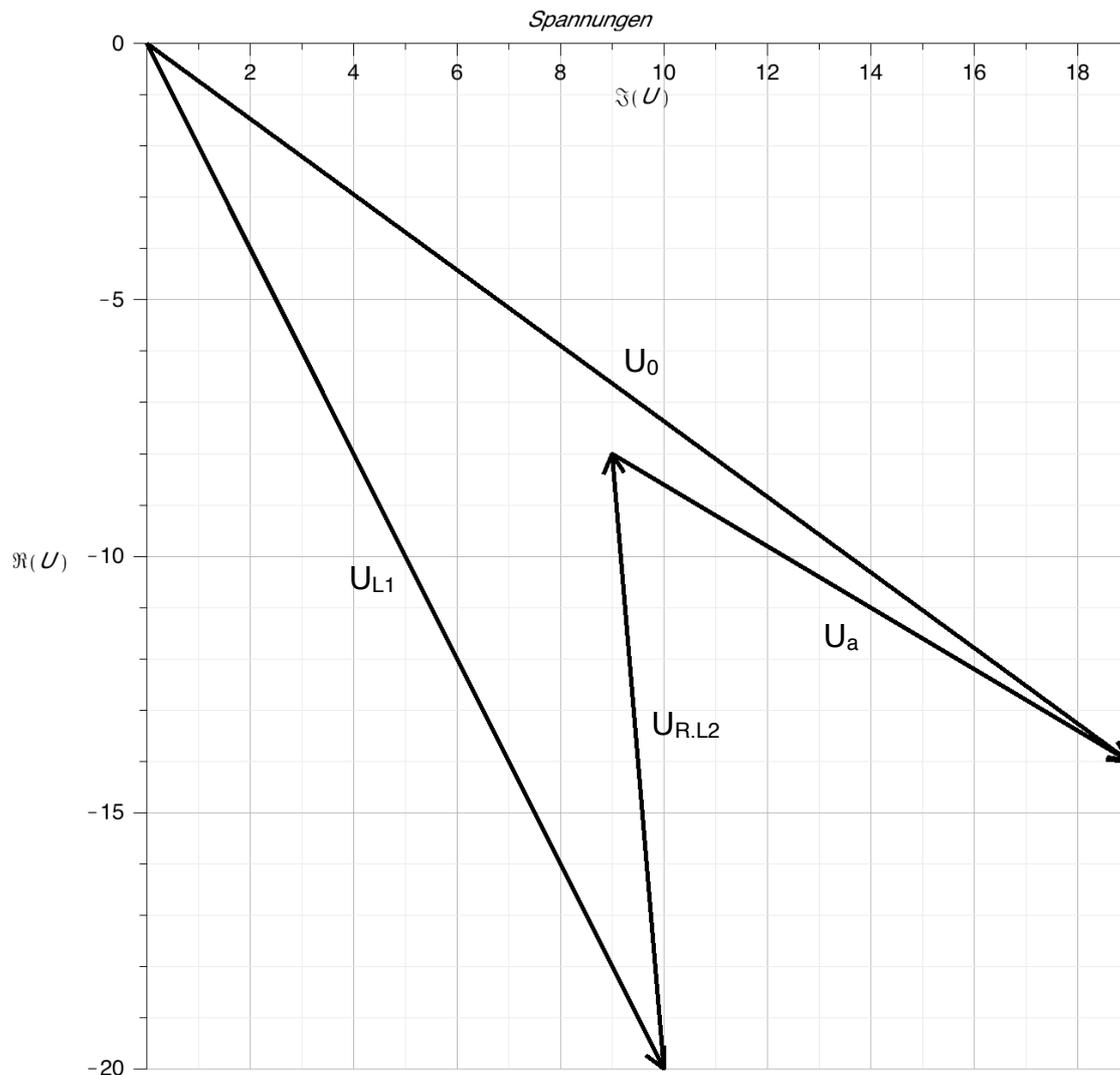
$$\begin{aligned} \underline{U}_{L1} &= \underline{I}_a \cdot \underline{Z}_{L1,C} \\ &= 10V - j20V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{R,L2} &= \underline{I}_a \cdot (R + j\omega L_2) \\ &= -1V + j12V \end{aligned}$$

Berechnen des Stromes durch L1:

$$\underline{I}_{L1} = \frac{\underline{U}_{L1}}{j\omega L_1} = -0,8A - j0,4A$$

c)

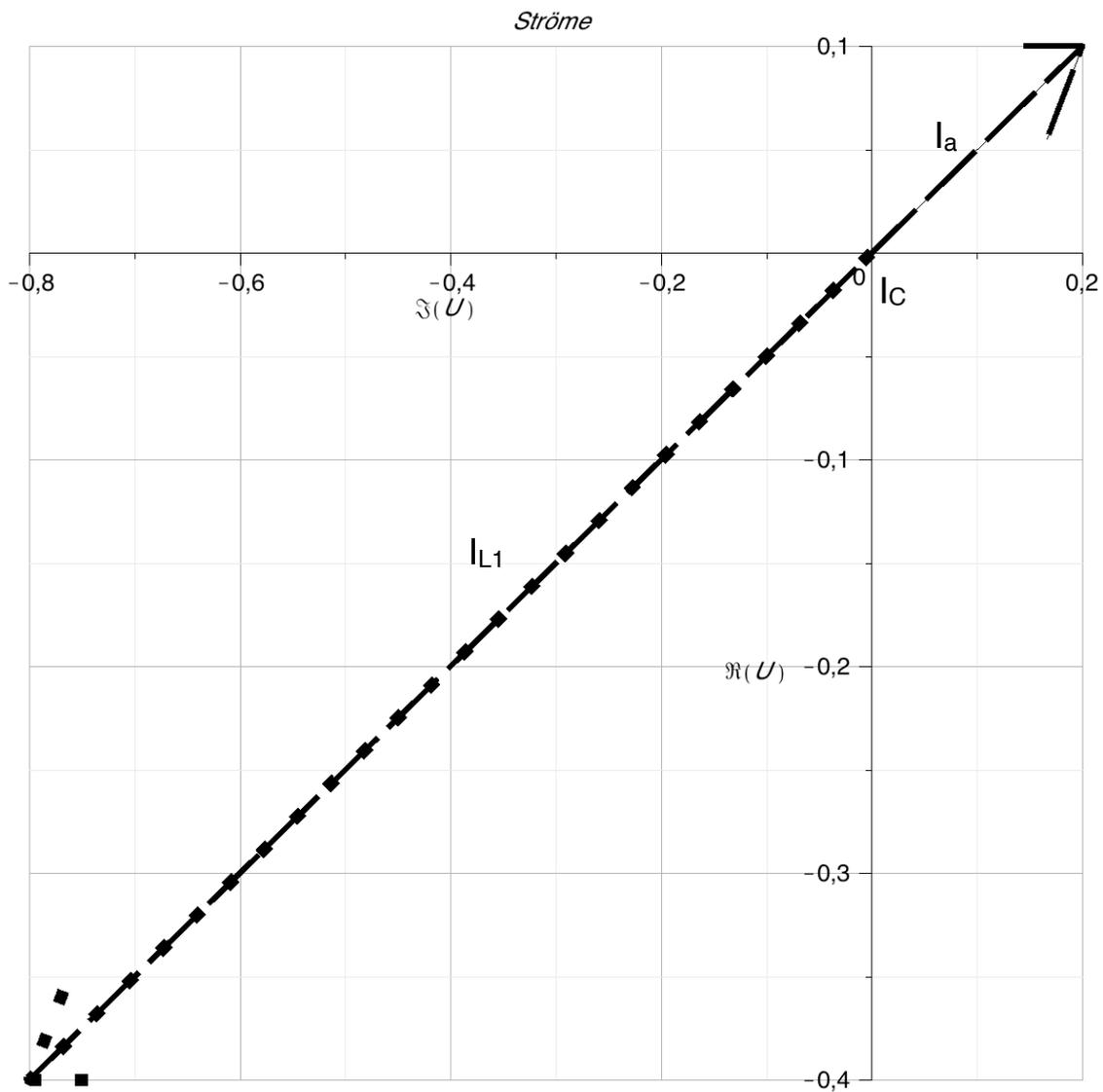


Abgelesener Wert:

$$\underline{U}_0 = 19V - j14V$$

$$\begin{aligned} &\text{Minimal:} \\ &= 18,5V - j13,5V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Maximal:} \\ &= 19,5V - j14,5V \end{aligned}$$



Abgelesener Wert:

$$\underline{I}_C = 1A + j0,5A$$

$$\begin{aligned} &\text{Minimal:} \\ &= 0,95A + j0,45A \end{aligned}$$

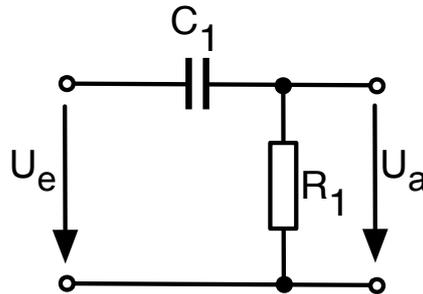
$$\begin{aligned} &\text{Maximal:} \\ &= 1,05A + j0,55A \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Bodediagramm

(27 Punkte)

a)



Die Übertragungsfunktion eines passiven RC-Hochpasses lautet

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{j\omega C_1 R_1}{1 + j\omega C_1 R_1}$$

Die Knickkreisfrequenz bestimmt sich zu

$$\omega_1 = \frac{1}{C_1 R_1}$$

Berücksichtigt man dabei $\omega = 2\pi f$, folgt

$$\begin{aligned} 2\pi f_1 &= \frac{1}{C_1 R_1} \\ f_1 &= \frac{1}{2\pi C_1 R_1} \stackrel{!}{=} 10 \text{ Hz} \\ C_1 &= \frac{1}{2\pi f_1 R_1} = \frac{1}{2\pi \cdot 10 \text{ Hz} \cdot 100 \text{ k}\Omega} \approx 159,15 \text{ nF} \end{aligned}$$

Es lässt sich direkt eine geeignete Normierung ableiten:

$$\omega_1 = \frac{1}{C_1 R_1}$$

Damit wird die normierte Übertragungsfunktion zu:

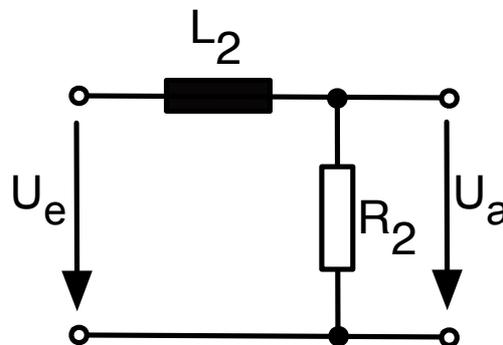
$$a_{v1} = 20 \log \left| \frac{j\Omega_1}{1 + j\Omega_1} \right| = 20 \log |j\Omega_1| - 20 \log |1 + j\Omega_1|$$

Phase:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(G_1(j\omega))}{\operatorname{Re}(G_1(j\omega))}\right) \\
 &= \arctan\left(\frac{\Omega_1}{0}\right) - \arctan\left(\frac{\Omega_1}{1}\right) \\
 &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\Omega_1}{1}\right)
 \end{aligned}$$

Bodediagramm siehe weiter unten

b)



Die Übertragungsfunktion eines passiven RL-Tiefpasses lautet:

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R_2}{R_2 + j\omega L_2} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L_2}{R_2}}$$

Die Knickkreisfrequenz ist damit

$$\omega_2 = \frac{R_2}{L_2}$$

Einsetzen der vorgegebenen Werte und Auflösen nach R_2 führt zu

$$\begin{aligned}
 2\pi f_2 &= \frac{R_2}{L_2} \\
 f_2 &= \frac{R_2}{2\pi L_2} \stackrel{!}{=} 10.000 \text{ Hz} \\
 R_2 &= f_2 \cdot 2\pi \cdot L_2 = 10.000 \text{ Hz} \cdot 2\pi \cdot 100 \mu\text{H} \approx 6,28 \Omega
 \end{aligned}$$

Geeignete Normierung für Teil b) wäre:

$$\omega_2 = \frac{R_2}{L_1}$$

Die Verschiebung der beiden Graphen gegeneinander bestimmt sich über

$$\begin{aligned}\frac{\omega_2}{\omega_1} &= \frac{\frac{R_2}{L_1}}{\frac{1}{C_1 R_1}} = \frac{R_2 \cdot C_1 R_1}{L_1} = 1000 \\ \omega_2 &= 1000 \cdot \omega_1\end{aligned}$$

In einem auf ω_1 normierten Graphen ist das zu b) gehörige Bodediagramm damit um 3 Einheiten ($\log(1000) = 3$) nach rechts verschoben.

damit wird a_{v2} zu:

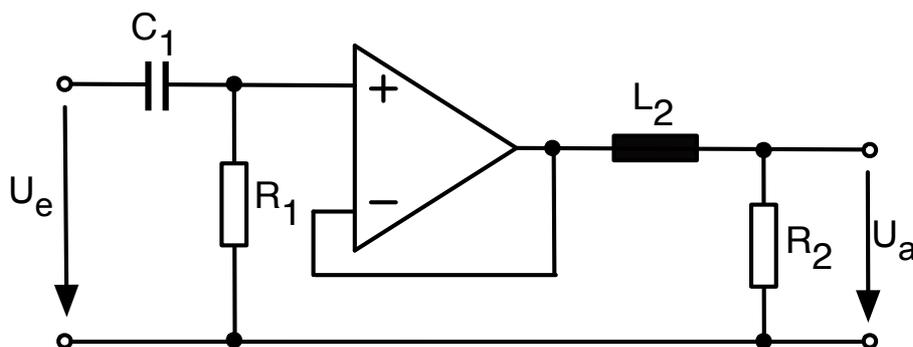
$$a_{v2} = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j10^{-3}\Omega_1} \right| = 20 \log |1| - 20 \log |1 + j10^{-3}\Omega_1| = -20 \log |1 + j10^{-3}\Omega_1|$$

Phase:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}(G_1(j\omega))}{\operatorname{Re}(G_1(j\omega))} \right) \\ &= \arctan \left(\frac{0}{1} \right) - \arctan \left(\frac{10^{-3} \cdot \Omega_1}{1} \right) \\ &= -\arctan \left(\frac{10^{-3}\Omega_1}{1} \right)\end{aligned}$$

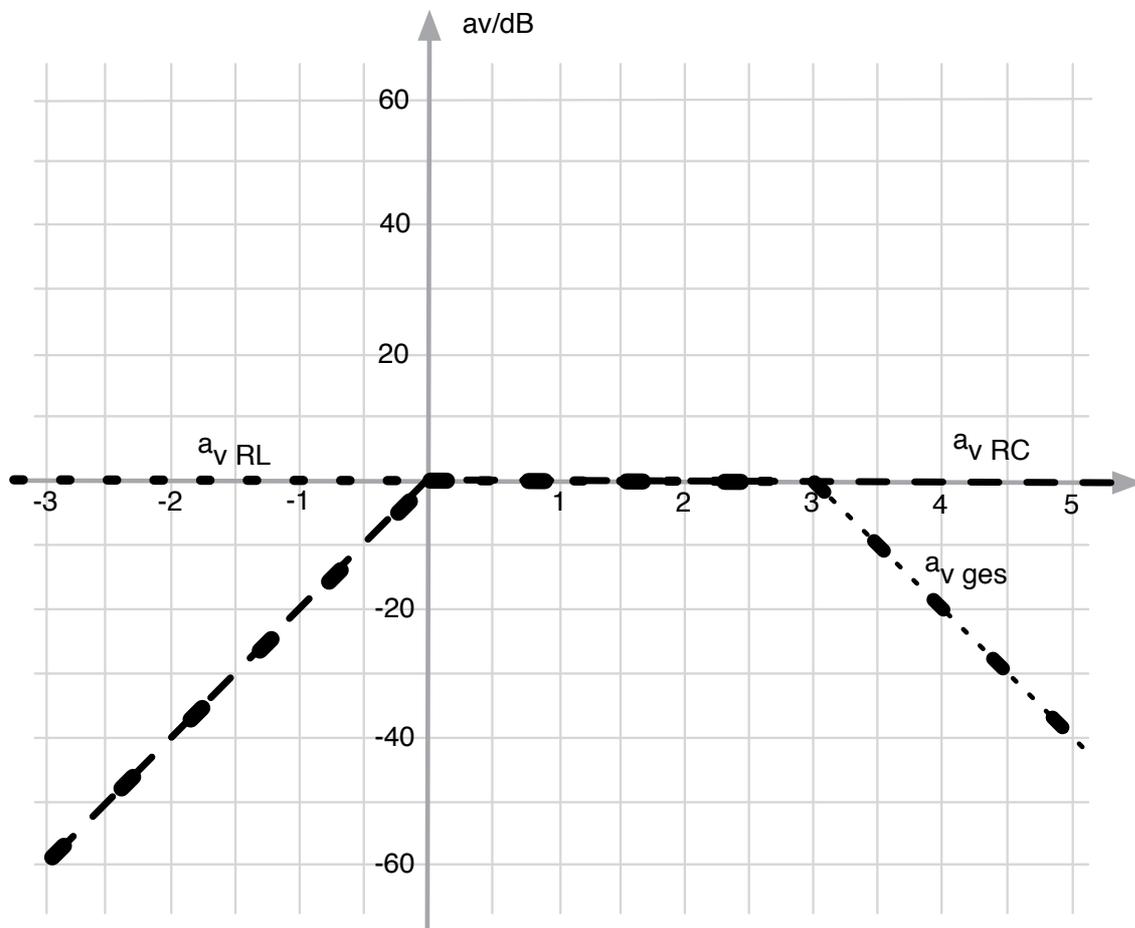
Bodediagramm siehe weiter unten

- c) Da es sich um passive Schaltungen handelt dürfen diese nicht direkt hintereinander geschaltet werden. Der Tiefpass würde den passiven Hochpass belasten und damit das Frequenzverhalten des Hochpasses verändern. Abhilfe schafft hier ein Impedanzwandler (Spannungswandler). Dieser sorgt dafür, dass der passive Hochpass nicht belastet wird.

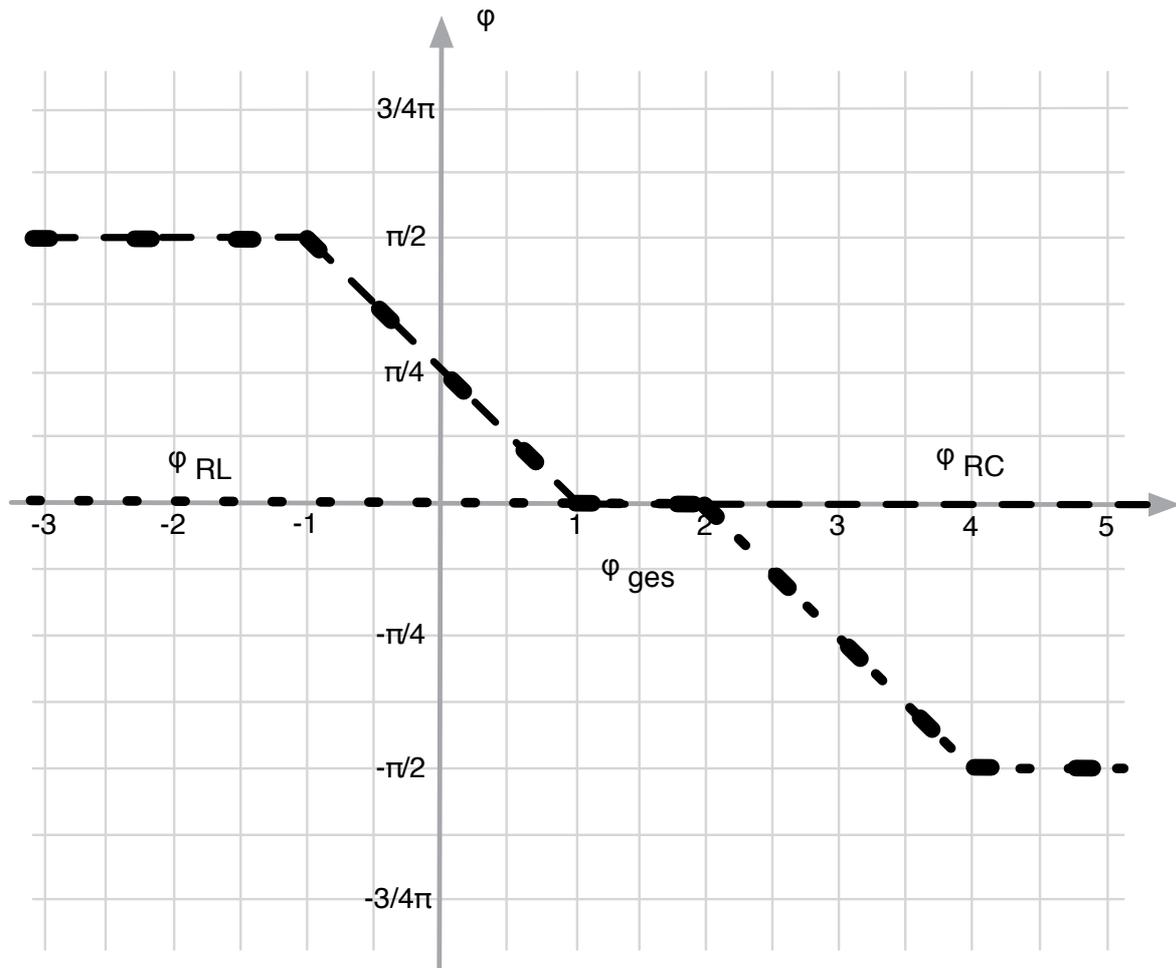


Bodediagramme

d) D5: Amplitudengang:



Phasengang:



e) Ausgangsspannung U_a bei einer Eingangsspannung von 1V Amplitude und einer Frequenz von 100kHz:

Die Amplitude der Ausgangsspannung beträgt 0,1 Volt, da bei $\log\Omega=4$ die Dämpfung -20dB beträgt.

$$U_a = 0,1 \cdot U_e = 0,1 \cdot 1V = 0,1V.$$

f) Die Übertragungsfunktion der Schaltung lautet:

$$\begin{aligned} \frac{U_a}{U_e} &= -\frac{R_4 \parallel \frac{1}{j\omega C_2}}{R_3} = -\frac{\frac{R_4 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{R_4 + \frac{1}{j\omega C_2}}}{R_3} \\ &= -\frac{\frac{R_4}{1+j\omega C_2 R_4}}{R_3} = -\frac{R_4}{R_3} \frac{1}{1+j\omega C_2 R_4} \end{aligned}$$

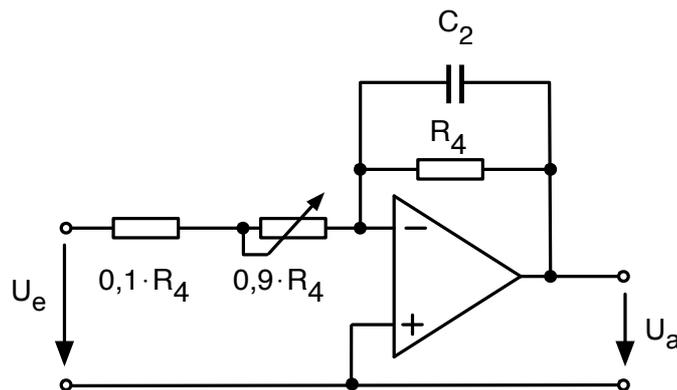
Bei einer Verstärkung von 0dB ($V=1$) muss $R_3=R_4=100k\Omega$ sein.

g) Die Knickfrequenz soll bei 10kHz liegen, damit gilt:

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \frac{1}{C_2 R_4} \\ \rightarrow C_2 &= \frac{1}{\omega_2 \cdot R_3} = \frac{1}{2\pi f_2 \cdot R_3} \\ C_2 &= 159 \text{ pF}\end{aligned}$$

0dB bis 20dB bedeutet eine Verstärkung von 1 bis 10. Damit muss R_3 zwischen $0,1 \cdot R_4$ und $1 \cdot R_4$ veränderbar sein.

Durch Ersetzen des Widerstandes R_3 durch eine Reihenschaltung aus einem Festwiderstand von $10 \text{ k}\Omega$ und einem Potentiometer von $90 \text{ k}\Omega$ lässt sich die Verstärkung wie gewünscht einstellen.



Aufgabe 5

Operationsverstärker

(14 Punkte)

a) Übertragungsfunktionen:

Schaltung A : Spannungsfolger/Impedanzwandler

$$\frac{U_a}{U_e} = 1$$

Schaltung B : Nicht-invertierender Verstärker

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{I \cdot (R_1 + R_2)}{I \cdot R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

Schaltung C : Invertierender Verstärker

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{-I \cdot R_n}{I \cdot R_1} = -\frac{R_n}{R_1}$$

Schaltung D : Bandpass

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{U_1}{U_e} \cdot \frac{U_a}{U_1}$$

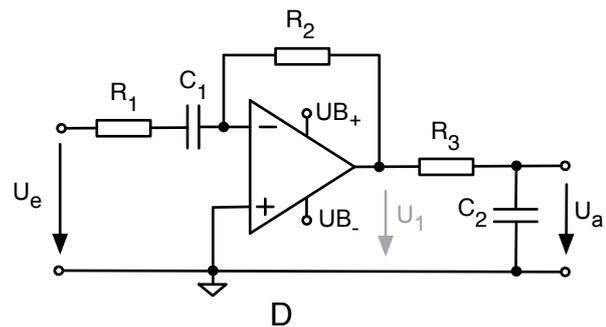
$$U_1 = -R_2 \cdot I_e$$

$$U_e = \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \right) \cdot I_e$$

$$\frac{U_1}{U_e} = -\frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = -\frac{j\omega C_1 \cdot R_2}{1 + j\omega C_1 R_1}$$

$$\frac{U_a}{U_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C_2}}{R_3 + \frac{1}{j\omega C_2}} = \frac{1}{1 + j\omega C_2 R_3}$$

$$\frac{U_a}{U_e} = -\frac{j\omega C_1 \cdot R_2}{1 + j\omega C_1 R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega C_2 R_3}$$



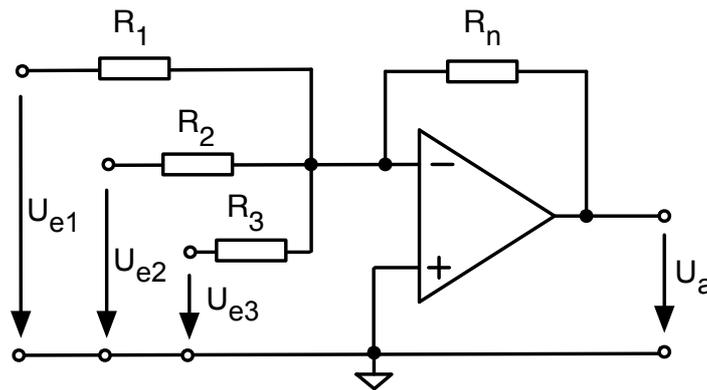
b) Addierverstärker:

$$U_a = -I \cdot R_n$$

$$I = I_{R1} + I_{R2} + I_{R3} = \frac{U_{e1}}{R_1} + \frac{U_{e2}}{R_2} + \frac{U_{e3}}{R_3}$$

→ mit $R_1 = R_2 = R_3 = R$ gilt:

$$U_a = -\frac{R_n}{R} \cdot (U_{e1} + U_{e2} + U_{e3})$$



c) Die Amplitude der Ausgangsspannung wird durch die Betriebsspannung begrenzt. Es gibt Rail to Rail OPVs die bis zur Betriebsspannung aussteuern können. Bei anderen OPVs liegt die Aussteuergrenze modellabhängig unter der Betriebsspannung.