Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel   Übungsleiter: Dipl.-Ing. Gustavo Lenis

Klausur

03. April 2013
Beginn: 08:00 Uhr

Familienname:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

AUFKLEBER

Anzahl der beschriebenen Blätter:	
Diagramm:	kariert:

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein!
Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare!
Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

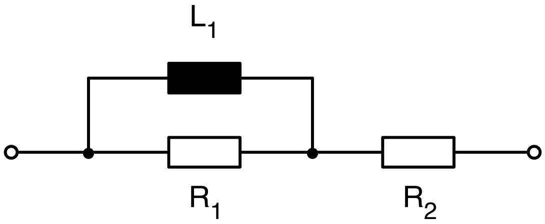
Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	13	
2	12	
3	21	
4	20	
5	21	
6	7	
Gesamt:	94	

Note:

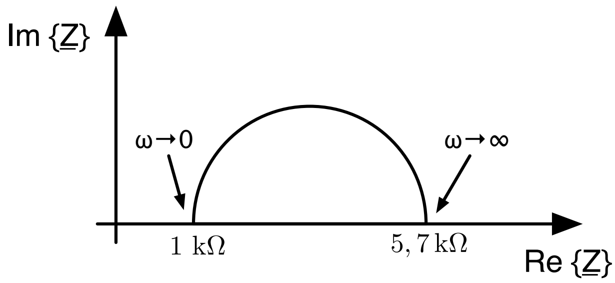
Aufgabe 1 **(13 Punkte)**

Ortskurve

Analysieren Sie folgende Zweipol-Schaltung:



Sie weist folgendes Frequenzverhalten auf:



(a) Bestimmen Sie R_2 und erläutern Sie Ihr Vorgehen. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie die Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ als Funktion von R_1, R_2 und L_1. (1 Punkt)

(c) Bestimmen Sie R_1. (1 Punkt)

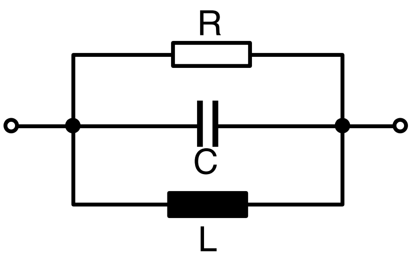
(d) Bestimmen Sie die charakteristische Kreisfrequenz ω_0 der Parallelschaltung aus L_1 und R_1 (ohne R_2), bei der die Phasenverschiebung durch $\underline{Z}_{L_1||R_1}$ genau 45° beträgt. Leiten Sie die Formel allgemein in Abhängigkeit von L_1 und R_1 her. (1 Punkt)

(e) Betrachten Sie nun wieder die Gesamtschaltung. Welchen Zahlenwert hat bei dieser Frequenz ω_0 der Imaginärteil der Gesamtimpendanz $\mathrm{Im}(\underline{Z})$? (ohne Herleitung) (1 Punkt)

(f) Kann die Phase der Admittanz dieser Schaltung den Wert 10° erreichen? Nennen Sie den Grund. (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben können auch ohne die vorherigen gelöst werden!

Nun sei folgender Parallelschwingkreis gegeben:



(g) Leiten Sie die Admittanz $\underline{Y}$ her. (1 Punkt)

(h) Zeichnen Sie für den Parallelschwingkreis die Ortskurve der Admittanz für allgemeine Bauteilwerte. Kennzeichnen Sie die Resonanzfrequenz ω_0 und die Grenzwerte $\omega \to \infty$ und $\omega \to 0$. Nutzen Sie Diagramm 1.1. (2 Punkte)

(i) Bestimmen Sie allgemein die Güte des Schwingkreises nach der Formel $Q_S = \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_2}$. Hierbei sind ω_1 und ω_2 die Kreisfrequenzen, bei denen die Ortskurve der Admittanz jeweils einen Phasenwinkel von 45° und −45° hat. (4 Punkte)

Lösung:

(a) $\lim\limits_{\omega \to 0} \underline{Z} = R_2 = 1\ \text{k}\Omega$ (R_1 ist kurzgeschlossen.)

(b) $\underline{Z} = \frac{j\omega L_1 R_1}{R_1 + j\omega L_1} + R_2$

(c) $\lim\limits_{\omega \to \infty} \underline{Z} = R_1 + R_2 = 5,7\ \text{k}\Omega \Leftrightarrow R_1 = 5,7\ \text{k}\Omega - R_2 = 4,7\ \text{k}\Omega$

(Parallelkreis zu R_1 ist unterbrochen.)

(d) Wenn $arg_{\underline{Z}_{L_1||R_1}} = 45°$, dann gilt $\text{Re}(\underline{Z}) = \text{Im}(\underline{Z})$.

$\underline{Z}_{L_1||R_1} = \frac{j\omega L_1 R_1}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{\omega^2 L_1^2 R_1 + j\omega L_1 R_1^2}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2}$

$\text{Re}(\underline{Z}_{L_1||R_1}) = \text{Im}(\underline{Z}_{L_1||R_1}) \Leftrightarrow \omega_0^2 L_1^2 R_1 = \omega_0 L_1 R_1^2$

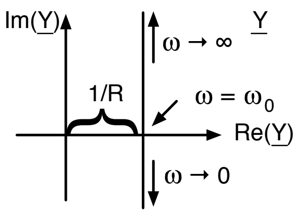
$\Leftrightarrow \omega_0 L_1 = R_1$

$\Leftrightarrow \omega_0 = \frac{R_1}{L_1}$

(e) Bei der charakteristischen Frequenz ω_0 beträgt der Phasenwinkel $arg_{\underline{Z}_{L_1||R_1}} = 45°$. In der kreisförmigen Ortskurve ist dies genau für das Maximum der Fall, welches auf der reellen Achse mittig zwischen 0 und $4,7\ \text{k}\Omega$ bei $2,35\ \text{k}\Omega$ liegt. Da hier auch $\text{Re}(\underline{Z}_{L_1||R_1}) = \text{Im}(\underline{Z}_{L_1||R_1})$ gilt, ist $\text{Im}(\underline{Z}_{L_1||R_1}) = 2,35\ \text{k}\Omega$. Durch Hinzufügen von R_2 ändert sich der Imaginärteil der Impedanz nicht, so dass auch $\text{Im}(\underline{Z}) = 2,35\ \text{k}\Omega$.

(f) Nein. Die Impedanz liegt in der oberen Halbebene ($\text{Im}(\underline{Z}) \geq 0$). Die Admittanz, die durch Spiegelung der Impedanz am Einheitskreis entsteht, kann somit nur in der unteren Halbebene liegen.

(g) $\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$

(h) 

(i) Für die Resonanzfrequenz gilt: $\text{Im}(\underline{Y})(\omega_0) = 0$.

$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$

$\text{Im}(\underline{Y})(\omega_0) = \omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$

$\Leftrightarrow \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}$

$\Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{CL}$

$\Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL}} \vee \omega_0 = -\sqrt{\frac{1}{CL}}$

Da nur positive Frequenzen erlaubt sind, gilt:

$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{CL}}$

Für $arg_{\underline{Y}} = 45°$ gilt: $\text{Im}(\underline{Y})(\omega_1) = \frac{1}{R}$.

$\mathrm{Im}(\underline{Y})(\omega_1) = \omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L} = \frac{1}{R}$

$\Leftrightarrow \omega_1^2 C - \frac{1}{L} - \frac{1}{R}\omega_1 = 0$

$\Leftrightarrow \omega_1^2 - \frac{1}{RC}\omega_1 - \frac{1}{LC} = 0$

$\Leftrightarrow \omega_1 = \frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{(2RC)^2} + \frac{1}{LC}}, \quad \sqrt{\frac{1}{(2RC)^2} + \frac{1}{LC}} > \frac{1}{2RC}$

Mit der Annahme, dass Frequenzen positiv sind, folgt:

$\Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{(2RC)^2} + \frac{1}{LC}}$

Für $arg_{\underline{Y}} = -45°$ gilt: $\mathrm{Im}(\underline{Y})(\omega_2) = -\frac{1}{R}$.

$\mathrm{Im}(\underline{Y})(\omega_2) = \omega_2 C - \frac{1}{\omega_2 L} = -\frac{1}{R} \Leftrightarrow \cdots$

$\Leftrightarrow \omega_2^2 + \frac{1}{RC}\omega_2 - \frac{1}{LC} = 0$

$\Leftrightarrow \omega_2 = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{(2RC)^2} + \frac{1}{LC}}, \quad \sqrt{\frac{1}{(2RC)^2} + \frac{1}{LC}} > \frac{1}{2RC}$

Mit der Annahme, dass Frequenzen positiv sind, folgt:

$\Rightarrow \omega_2 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{(2RC)^2} + \frac{1}{LC}}$

$Q_S = \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{LC}}}{\frac{1}{RC}} = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$

Aufgabe 2 **(12 Punkte)**

Netzwerk

Es gelte die folgende Schaltung:

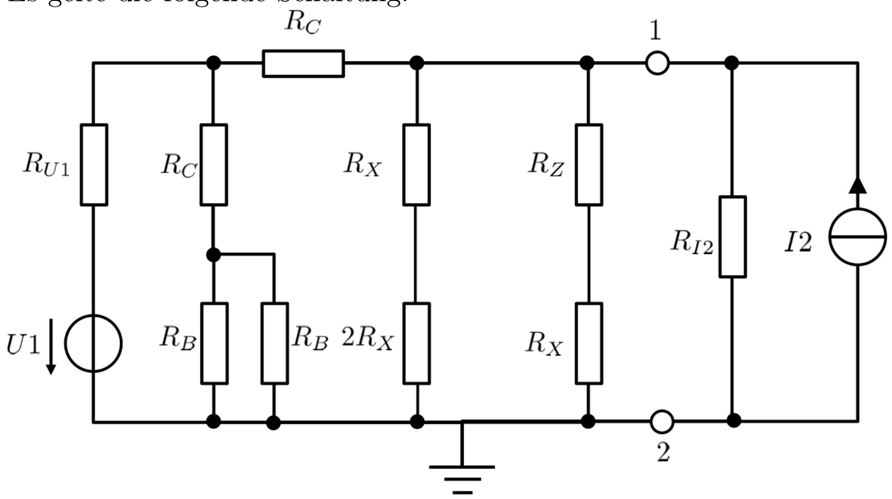


Abbildung 2.1

(a)
- Könnte das in Abbildung 2.1 dargestellte Netzwerk in der angegebenen Konfiguration mit dem formalisierten **Knotenpunktpotentialverfahren** analysiert werden? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)
- Könnte das in Abbildung 2.1 dargestellte Netzwerk in der angegebenen Konfiguration mit dem formalisierten **Maschenstromverfahren** analysiert werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die Schaltung sei im Folgenden nicht belastet, d.h. $I2 = 0$ **und** $R_{I2} \to \infty$**.**

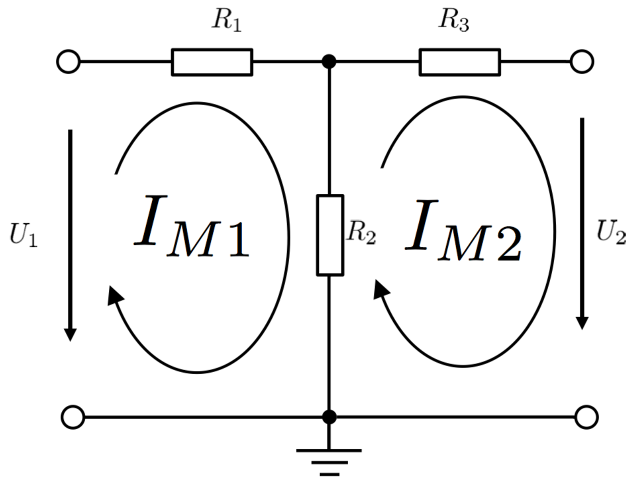
(b) Geben Sie die äquivalente Spannungsquelle bezüglich der Klemmen 1 und 2 an. Vereinfachen Sie dazu die Schaltung so weit wie möglich. Geben Sie die Leerlaufspannung, den Kurzschlussstrom und den Innenwiderstand der äquivalenten Spannungsquelle explizit an. (6 Punkte)
Verwenden Sie die folgenden Angaben:

- $2R_X = R_C$
- $R_Z = \frac{1}{2}R_X$
- $2R_C = R_B$
- $R_C = 50\,\Omega$
- $R_{U1} = 100\,\Omega$
- $U1 = 100\,V$

Die folgende Teilaufgabe kann auch ohne die vorherige gelöst werden!

(c) Das formalisierte Maschenstromverfahren soll hergeleitet werden. Dazu soll die unten stehende Schaltung verwendet werden. Gehen Sie wie folgt vor: (4 Punkte)

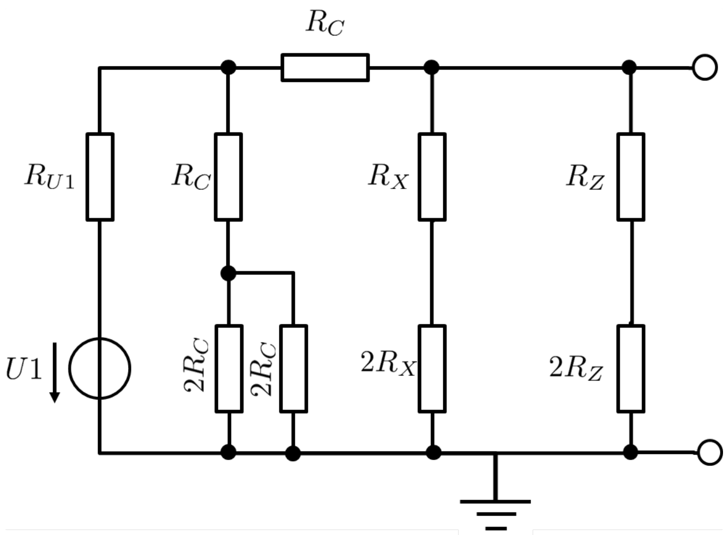
- Stellen Sie die Maschengleichungen in Abhängigkeit der vorkommenden Spannungen auf.
- Setzen Sie die Maschenströme ein.
- Formen Sie die Gleichungen um, so dass die Vektor-Matrix-Notation des Maschenstromverfahrens ensteht.



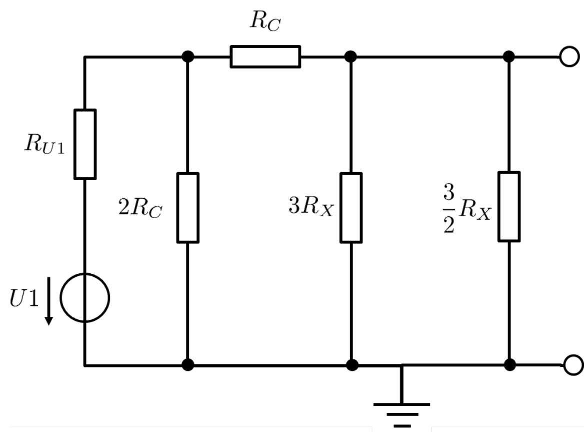
Lösung:

(a)
- Nein, es müssen zuerst alle Spannungsquellen in Stromquellen umgewandelt werden.
- Nein, es müssen zuerst alle Stromquellen in Spannungsquellen umgewandelt werden.

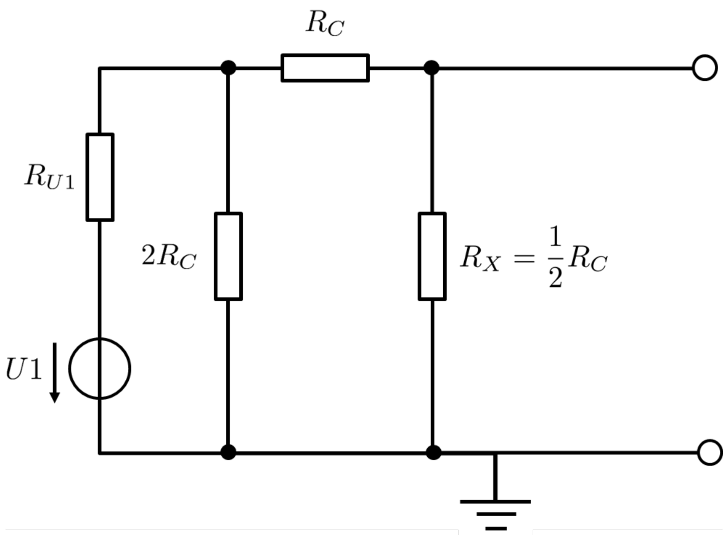
(b) Zunächst wird links R_B durch $2R_C$ ersetzt und rechts R_X durch $2R_Z$.



Im nächsten Schritt können die beiden Serienschaltungen von R_X und R_Z angegeben werden. Auch die kleine Schaltung aus Serien- und Parallelschaltung von R_C lässt sich leicht angeben.

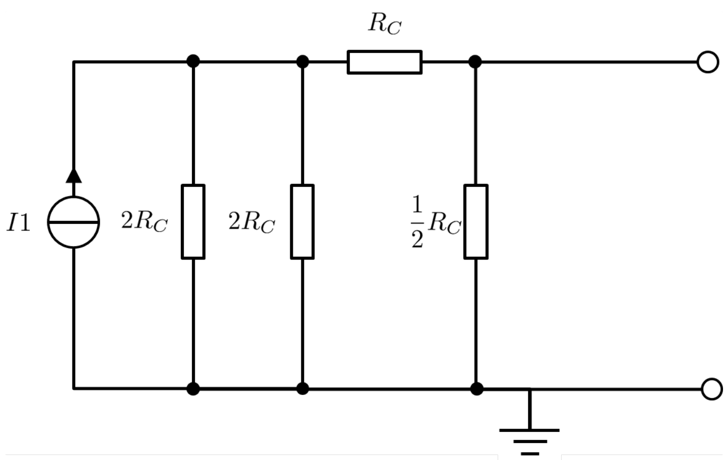


Und schließlich kann noch die Parallelschaltung von den Widerständen mit $3R_X$ und $\frac{3}{2}R_X$ berechnet werden.

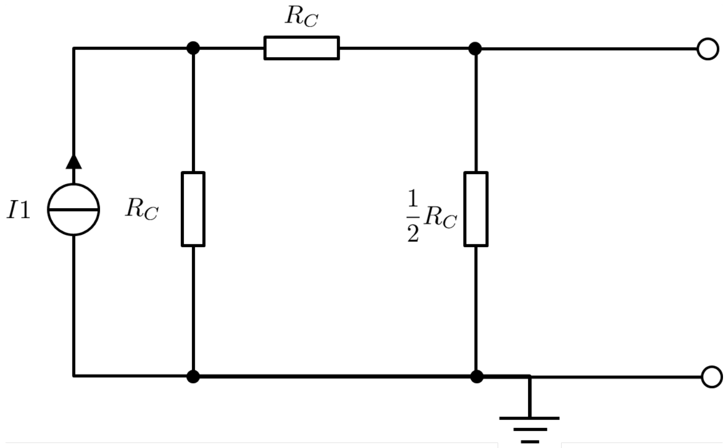


Für die äquivalente Spannungsquelle benötigen wir den Gesamtwiderstand der Schaltung. Wir ersetzen R_{U1} durch $100\,\Omega$ oder eben durch $2R_C$. Damit lässt sich die Spannungsquelle in eine Stromquelle umwandeln.

$$I1 = \frac{U1}{R_U} = \frac{100\,V}{100\,\Omega} = 1\,A$$

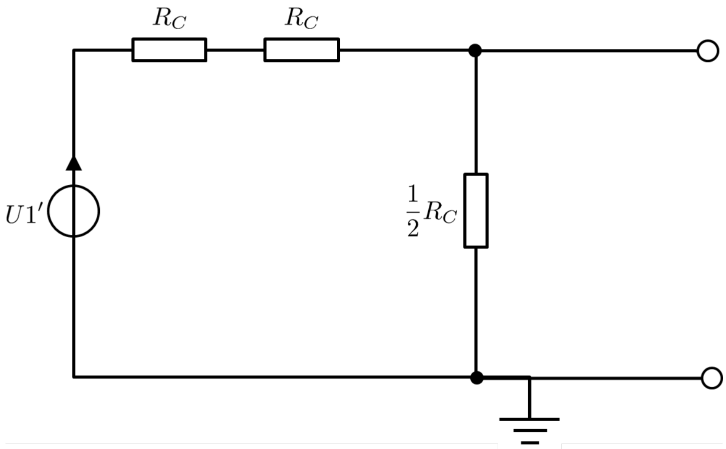


Nun kann die Parallelschaltung berechnet werden.



Anschließend wandeln wir wieder die Stromquelle in eine Spannungsquelle um.

$$U1' = I1 \cdot R_C = 1\,A \cdot 50\,\Omega = 50\,V$$



Die nächsten Schritte ergeben sich ganz äquivalent.

- Serienschaltung berechnen.
- Spannungs- in Stromquelle umrechnen:

$$I1' = \frac{U1'}{2R_C} = \frac{50\,V}{100\,\Omega} = 0.5\,A.$$

- Parallelschaltung berechnen.

$$2R_C \Bigg|\Bigg| \frac{1}{2}R_C = \frac{2}{5}R_C$$

- Und zum Schluss Umwandlung der Strom- in eine Spannungsquelle

$$U1'' = I1' \cdot \frac{2}{5}R_C = 0.5\,A \cdot 20\,\Omega = 10\,V$$

Die äquivalente Spannungsquelle hat die folgenden Eigenschaften:

- Leerlaufspannung: $U_0 = 10\,V$
- Kurzschlussstrom: $I_K = 0.5\,A$
- Innenwiderstand: $R_i = 20\,\Omega$

(c) Aufstellen der Maschengleichungen:

$$M1 : -U_1 + U_{R_1} + U_{R_2} = 0$$
$$M2 : U_2 - U_{R_2} + U_{R_3} = 0$$

Die Spannungsabfälle über den Widerständen ersetzen:

$$R_1 \cdot I_{M1} + R_2(I_{M1} - I_{M2}) = U_1$$
$$-R_2(I_{M1} - I_{M2}) + R_3 \cdot I_{M2} = -U_2$$

Etwas umstellen liefert:

$$(R_1 + R_2)I_{M1} - R_2 I_{M2} = U_1$$
$$-R_2 I_{M1} + (R_2 + R_3)I_{M2} = -U_2$$

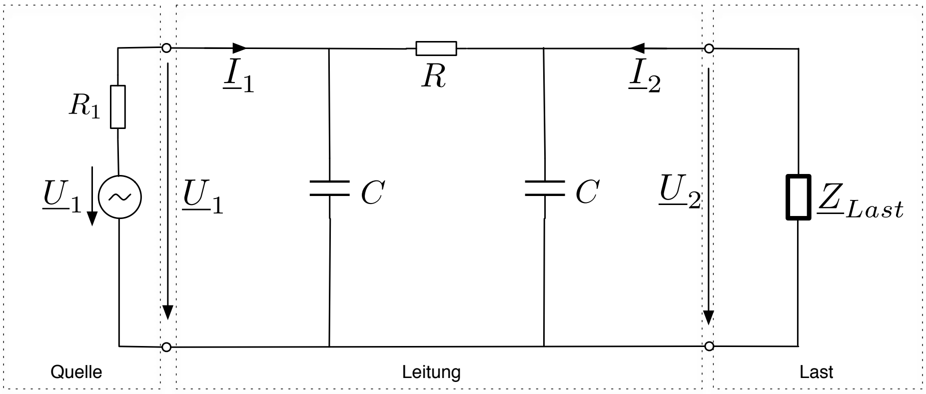
Und diese Gleichungen lassen sich als Matrizen schreiben:

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2) & -R_2 \\ -R_2 & (R_2 + R_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ -U_2 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 **(21 Punkte)**

Wechselstromlehre

Gegeben seien eine Spannungsquelle, eine Leitung und eine Last, die in der folgenden Form beschaltet werden:



Für die Bauelemente gilt:

- $R = 2.5\,\Omega$
- $\omega C = 0.1\,S$
- $\underline{U}_1 = (280 + j10)\,V$ (effektiv)
- $\underline{U}_2 = 220\,V$ (effektiv)

(a) Bestimmen Sie die Vierpol-$\underline{Y}$-Parameter der Leitung. Geben Sie das Ersatzschaltbild an, mit dem Sie die Parameter y_{11} und y_{21} bestimmen. *Hinweis: Allgemein gilt Folgendes für die $\underline{Y}$-Parameter eines Zweitores:* (7 Punkte)

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}$$

(b) R_1 sei vernachlässigbar klein. Zeigen Sie, dass es für die Ströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ Folgendes gilt: (4 Punkte)

- $\underline{I}_1 = (23 + j32)\,A$ (effektiv)
- $\underline{I}_2 = (-24 + j18)\,A$ (effektiv)

(c) Bestimmen Sie die von der Quelle abgegebene komplexe Leistung $\underline{S}_{in}$ und die an die Last übertragene komplexe Leistung $\underline{S}_{out}$. Bestimmen Sie anschließend den Wirkungsgrad $\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}}$ der Leitung. (5 Punkte)

(d) Die Schaltung wird bei einer Frequenz von $f = 50\,Hz$ betrieben. Geben Sie die Impedanz der Last nach Real- und Imaginärteil an. Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild der Impedanz. Verwenden Sie dabei zwei passive Bauelemente. Geben Sie die Bauteilwerte der Bauelemente an. (5 Punkte)

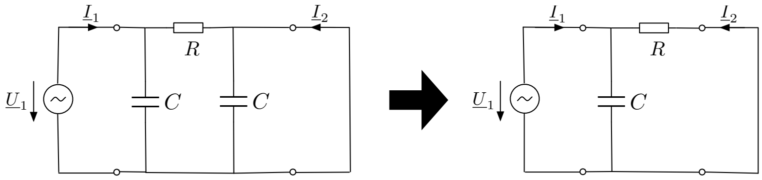
Lösung:

(a) Für die Parameter y_{11} und y_{12} gilt:

$$y_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0}$$

$$y_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0}$$

Die Bestimmung der Parameter y_{11} und y_{21} lässt sich mit dem folgenden Ersatzschaltbild durchführen:



Für den Parameter y_{11} gilt:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{I}_1 \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C} \cdot R}{\frac{1}{j\omega C} + R} \\ \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} &= \frac{R}{1 + j\omega CR} \\ \Rightarrow y_{11} &= \frac{1}{R} + j\omega C\end{aligned}$$

Für den Parameter y_{21} gilt:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= -\underline{I}_2 \cdot R \\ \Rightarrow y_{21} &= -\frac{1}{R}\end{aligned}$$

Die Schaltung ist symmetrisch und reziprok. Deswegen gilt für die anderen zwei Parameter:

$$\begin{aligned}\Rightarrow y_{22} &= y_{11} = \frac{1}{R} + j\omega C \\ \Rightarrow y_{12} &= y_{21} = -\frac{1}{R}\end{aligned}$$

Somit gilt für die $\underline{Y}$-Matrix dieser Leitung:

$$[\underline{Y}] = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} + j\omega C & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} + j\omega C \end{pmatrix}$$

(b) Für die Ströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ gilt:

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= y_{11} \cdot \underline{U}_1 + y_{12} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_1 &= (0.4 + j0.1)S \cdot (280 + j10)V + (-0.4)S \cdot (220)V \\ \underline{I}_1 &= (23 + j32)A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{I}_2 &= y_{21} \cdot \underline{U}_1 + y_{22} \cdot \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= (-0.4)S \cdot (280 + j10)V + (0.4 + j0.1)S \cdot (220)V \\ \underline{I}_2 &= (-24 + j18)A\end{aligned}$$

(c) Für die komplexen Leistungen $\underline{S}_{in}$ und $\underline{S}_{out}$ gilt:

$$\begin{aligned}\underline{S}_{in} &= \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* \\ \underline{S}_{in} &= (280 + j10)V \cdot (23 - j32)A \\ \underline{S}_{in} &= (6760 - j8730)VA\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{S}_{out} &= \underline{U}_2 \cdot (-\underline{I}_2)^* \\ \underline{S}_{out} &= (220)V \cdot (24 + j18)A \\ \underline{S}_{out} &= (5280 + j3960)VA\end{aligned}$$

Für den Wirkungsgrad gilt:

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{5280}{6760} \approx 0.7811$$

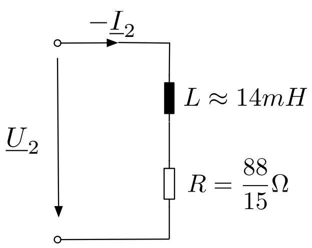
(d) Für die Lastimpedanz gilt:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_L &= \frac{\underline{U}_2}{(-\underline{I}_2)} \\ \underline{Z}_L &= \frac{220V}{(24 - j18)A} \\ \underline{Z}_L &= \left(\frac{88}{15} + j\frac{22}{5}\right)\Omega\end{aligned}$$

Für die Bauteile gilt:

$$\begin{aligned}R &= \frac{88}{15}\,\Omega \approx 5.8667\,\Omega \\ L &= \frac{Im\{\underline{Z}_L\}}{2\pi f} \approx 14\,mH\end{aligned}$$

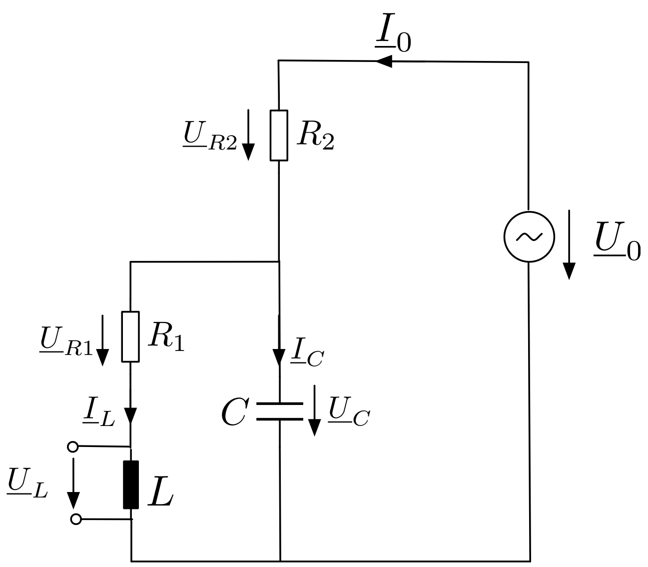
Das dazu gehörige Ersatzschaltbild sieht folgendermaßen aus:



Aufgabe 4 **(20 Punkte)**
Zeigerdiagramm

Gegeben sei die unten stehende Schaltung. Für die Schaltung gilt Folgendes:

- $L = 8\,mH$
- $C = 1.6\,mF$
- $R_1 = 1\,\Omega$
- $R_2 = 2\,\Omega$
- $\underline{U}_L = (3 + j6)\,V$ (effektiv)
- $\omega = 375\,s^{-1}$



(a) Bestimmen $\underline{I}_L$ rechnerisch und tragen Sie $\underline{I}_L$ und $\underline{U}_L$ in das Zeigerdiagramm ein. (3 Punkte)

(b) Bestimmen $\underline{U}_{R1}$ rechnerisch und konstruieren Sie $\underline{U}_C$ im Zeigerdiagramm. Geben Sie $\underline{U}_C$ an. (4 Punkte)

(c) Bestimmen $\underline{I}_C$ rechnerisch und konstruieren Sie $\underline{I}_0$ im Zeigerdiagramm. Geben Sie $\underline{I}_0$ an. (4 Punkte)

(d) Bestimmen $\underline{U}_{R2}$ rechnerisch und konstruieren Sie $\underline{U}_0$ im Zeigerdiagramm. Geben Sie $\underline{U}_0$ an. (4 Punkte)

(e) Bestimmen Sie rechnerisch den Phasenwinkel $\Theta_{U_0 I_0}$ zwischen der Quellspannung $\underline{U}_0$ und dem Strom $\underline{I}_0$. Geben Sie den Winkel in Grad an. (2 Punkte)

(f) Eine Kompensation soll durchgeführt werden. Bei einer Kompensation wird ein passives Bauelement parallel zur Quelle so geschaltet, dass die Quelle nach der Kompensation reine endliche Wirkleistung P_0 abgibt.
Welches passive Bauelement (Widerstand, Kondensator oder Spule) muss in diesem Fall Parallel zur Quelle $\underline{U}_0$ geschaltet werden, so dass die Kompensation errericht wird. Begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie zunächst die von der Quelle abgegebene komplexe Leistung $\underline{S}_0$. *Hinweis: Der quantitative Wert des Bauelementes soll nicht angegeben werden.* (3 Punkte)

Lösung:

(a) Für den Strom $\underline{I}_L$ gilt:

$$\begin{aligned}\underline{I}_L &= \frac{\underline{U}_L}{j\omega L}\\ \underline{I}_L &= \frac{(3+j6)V}{j3\Omega}\\ \underline{I}_L &= (2-j1)A\end{aligned}$$

(b) Für die Spannung $\underline{U}_{R1}$ gilt:

$$\underline{U}_{R1} = \underline{I}_L \cdot R_1 = (2-j1)V$$

Aus der Maschenregel gilt $\underline{U}_C = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_L$. Diese Summe wird als Vektorsumme im Zeigerdiagramm dargestellt. Man erhält für die Spannung $\underline{U}_C$:

$$\underline{U}_C = (5+j5)V$$

(c) Für den Strom $\underline{I}_C$ gilt:

$$\begin{aligned}\underline{I}_C &= \underline{U}_C \cdot j\omega C\\ \underline{I}_C &= (5+j5)V \cdot (j0.6)S\\ \underline{I}_C &= (-3+j3)A\end{aligned}$$

Aus der Knotenregel gilt $\underline{I}_0 = \underline{I}_C + \underline{I}_L$. Diese Summe wird als Vektorsumme im Zeigerdiagramm dargestellt. Man erhält für den Strom $\underline{I}_0$:

$$\underline{I}_0 = (-1+j2)V$$

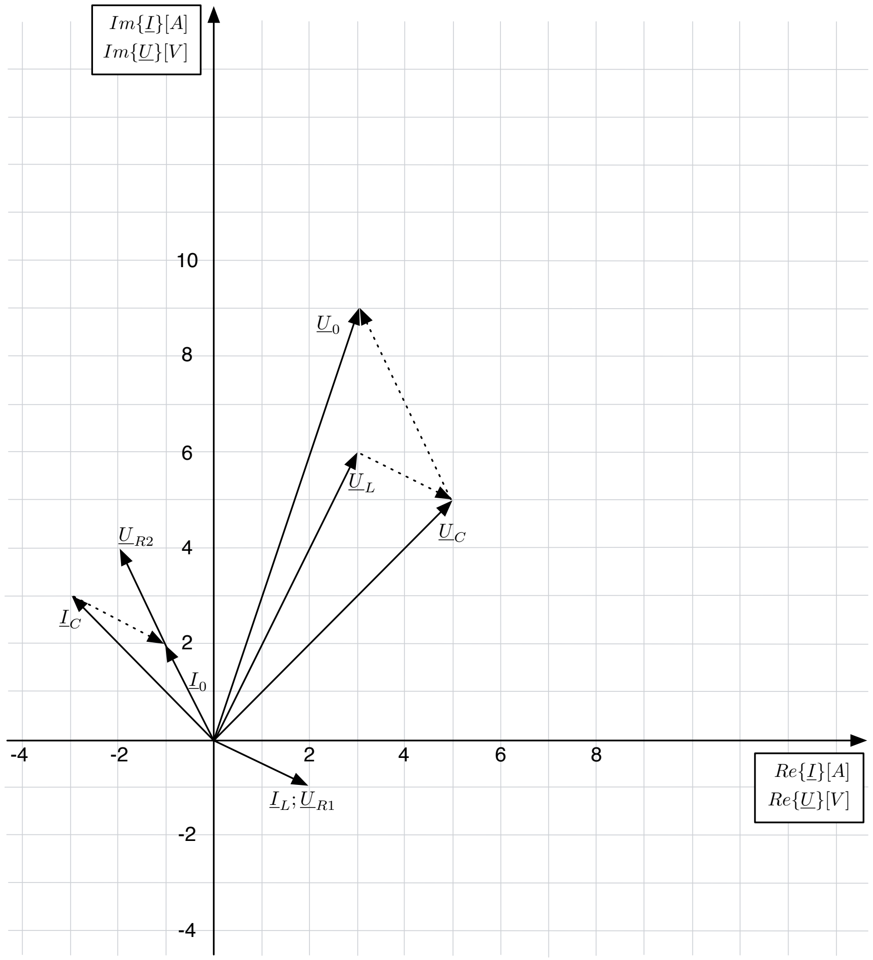
(d) Für die Spannung $\underline{U}_{R2}$ gilt:

$$\underline{U}_{R2} = \underline{I}_0 \cdot R_2 = (-2+j4)V$$

Aus der Maschenregel gilt $\underline{U}_0 = \underline{U}_C + \underline{U}_{R2}$. Diese Summe wird als Vektorsumme im Zeigerdiagramm dargestellt. Man erhält für die Spannung $\underline{U}_0$:

$$\underline{U}_0 = (3+j9)V$$

Für das komplette Zeigerdiagramm gilt:



(e) Für den Phasenwinkel $\Theta_{U_0 I_0}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\Theta_{U_0 I_0} &= arg\left\{\frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0}\right\} \\
\Theta_{U_0 I_0} &= arg\left\{\frac{(3+j9)V}{(-1+j2)A}\right\} \\
\Theta_{U_0 I_0} &= arg\left\{(3-j3)\Omega\right\} \\
\Theta_{U_0 I_0} &= -45^o
\end{aligned}$$

(f) Für die von der Quelle abgegebene komplexe Leistung (ohne Kompensation) gilt:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_0 &= \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_0^* = P_0 + jQ_0 \\
\underline{S}_0 &= (3+j9)V \cdot (-1-j2)A \\
\underline{S}_0 &= (15-j15)\,VA
\end{aligned}$$

Die von der Quelle abgegebene Blindleistung ist negativ. Deswegen gibt die Quelle kapazitive Blindleistung ab. Um die kapazitive Blindleistung zu kompensieren, ist eine induktive (positive) Blindleistung notwendig. Das passive Bauelement für die Kompensation ist also eine Spule.

Aufgabe 5 **(21 Punkte)**

Bodediagramm

(a) (2 Punkte)

- Stellen Sie eine Leistung von 150 mW in Bezug auf eine Leistung von 1 W in Dezibel dar.

- Stellen Sie eine Spannung von 10 mV in Bezug auf eine Spannung von 2 mV in Dezibel dar.

Die folgenden Teilaufgaben können auch ohne die vorherige gelöst werden!

(b) Zeichen Sie das Bode-Diagramm der angegeben Übertragungsfunktion nach Betrag und Phase: (6 Punkte)

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + j\Omega} \cdot \frac{j10^{-1}\Omega}{1 + j10^{-1}\Omega}$$

Verwenden die Diagramme 5.1 und 5.2 für die Zeichnung.

(c) Gegeben sei die Übertragungsfunktion: (8 Punkte)

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{(1 + j100\Omega)(100 + j\Omega)}{10(1 + j\Omega)^2}$$

Zeichnen Sie das Bode-Diagramm der Übertragungsfunktion nach Betrag und Phase. Verwenden die Diagramme 5.3 und 5.4 für die Zeichnung.

(d) Gegeben sei die Übertragungsfunktion: (5 Punkte)

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{j\omega C_2 R_3}{1 + j\omega(C_2R_2 + C_1R_1) - \omega^2 C_2R_2C_1R_1}$$

Geben Sie für diese Übertragungsfunktion die dazugehörige Schaltung an. Stellen Sie zunächst die angegebene Übertragungsfunktion als Produkt von zwei einfacheren Übertragungsfunktionen dar. Finden Sie anschließend für jeden Term eine Teilschaltung. Verwenden Sie möglichst wenige Bauteile.

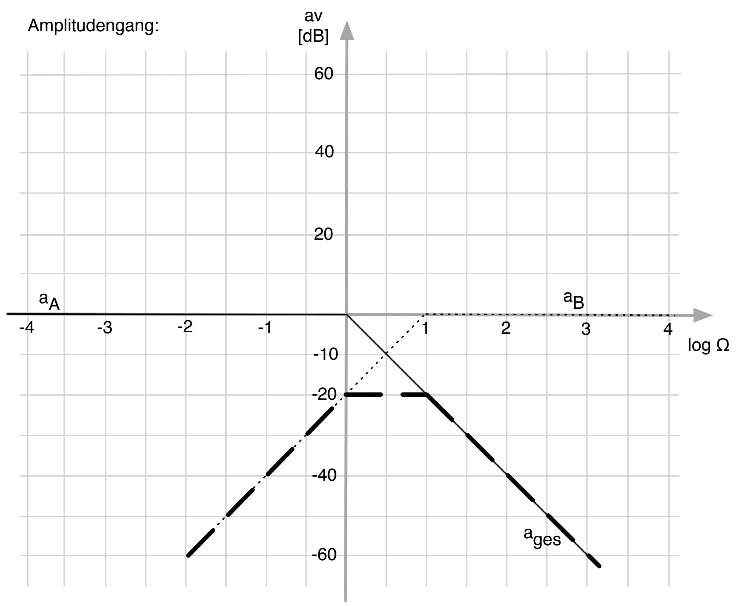
Lösung:

(a)

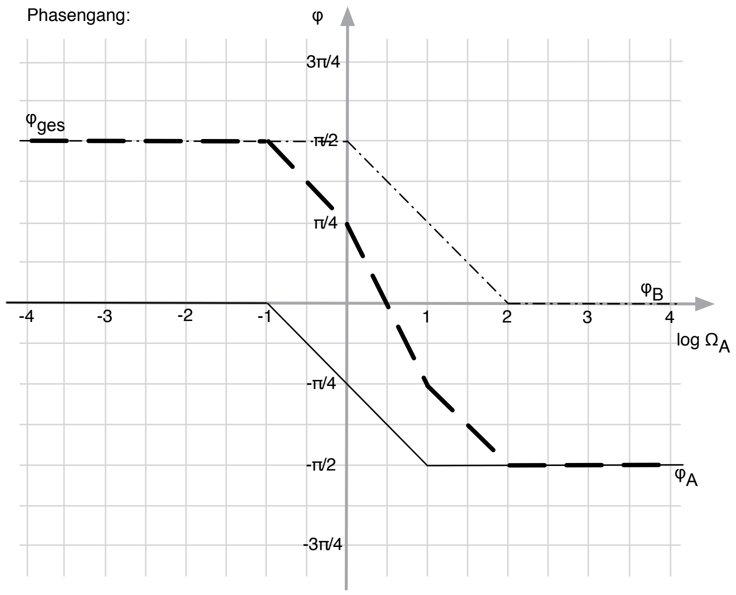
$$10\log(150 \cdot 10^{-3}) = -8.2\,dB$$

$$20\log(5) = 14\,dB.$$

(b) Das Bode-Diagramm für die Amplitude



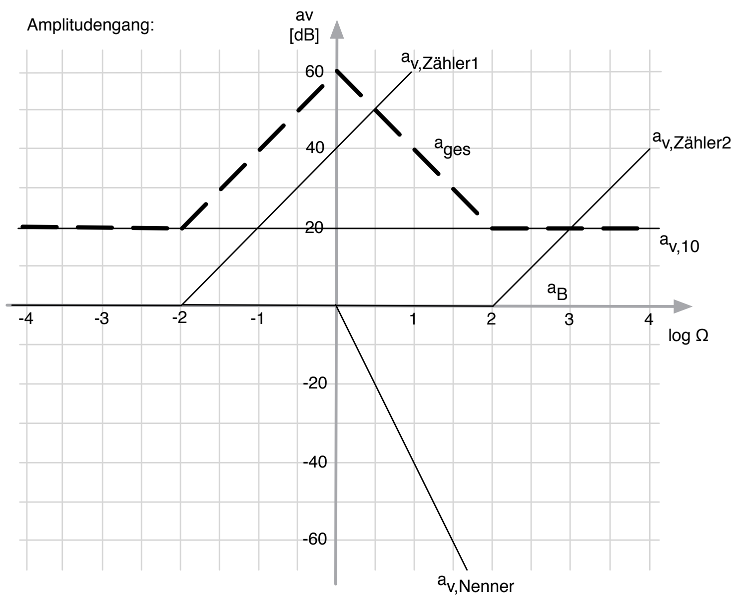
Das Bode-Diagramm für die Phase



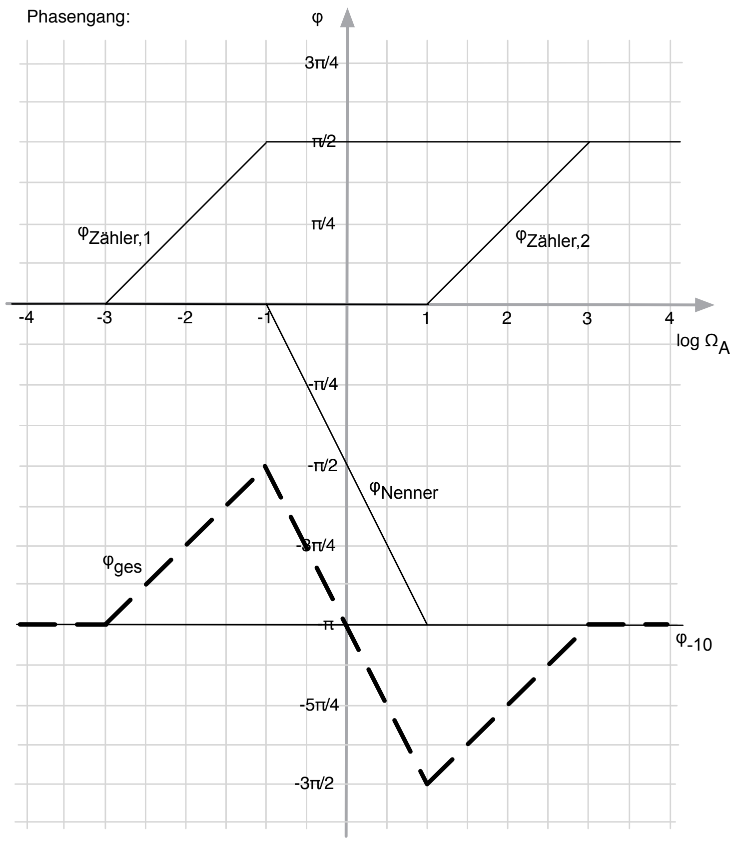
(c)

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{(1+j100\Omega)(100+j\Omega)}{10(1+j\Omega)^2} = -\frac{100(1+j10^2\Omega)(1+j10^{-2}\Omega)}{10(1+j\Omega)^2}$$
$$= -\frac{10(1+j10^2\Omega)(1+j10^{-2}\Omega)}{(1+j\Omega)^2}$$

Das Bode-Diagramm für die Amplitude



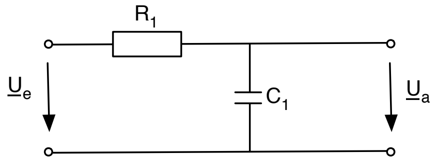
Das Bode-Dagramm für die Phase

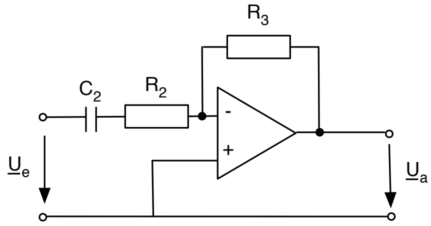


(d)

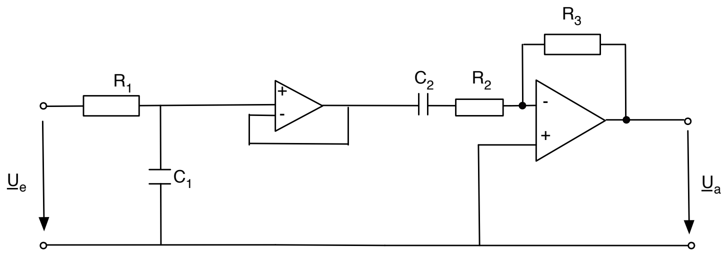
$$\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{j\omega C_2 R_3}{1 + j\omega(C_2R_2 + C_1R_1) - \omega^2 C_2R_2C_1R_1} = \\
&= \left(\frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1}\right) \cdot \left(-\frac{j\omega C_2 R_3}{1 + j\omega C_2 R_2}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1}\right) \cdot \left(-\frac{R_3}{R_2}\frac{j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega C_2 R_2}\right) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega).
\end{aligned}$$

Ein Tiefpass und ein aktiver invertierender Hochpass sind die entsprechenden Schaltungen für H_1 und H_2:





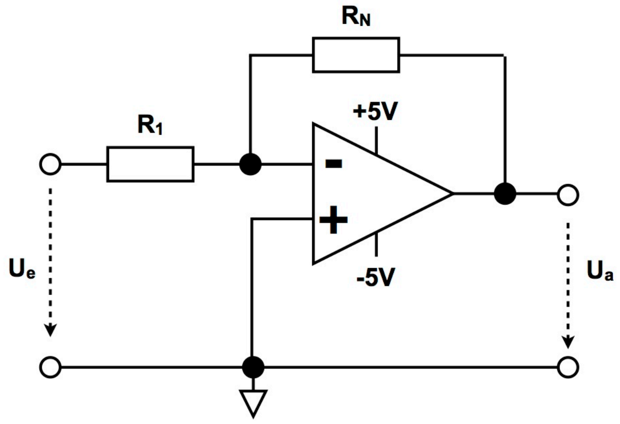
Die resultierende Schaltung ist eine Kette aus Tiefpass, Spannungsfolger und Hochpass:



Aufgabe 6 **(7 Punkte)**

Operationsverstärker

Gegeben sei folgende Schaltung mit einem idealen Operationsverstärker:



(a) Die Gegenkopplung ist eine Eigenschaft dieser Schaltung. (2 Punkte)

- An welcher Verbindung im Schaltplan kann man erkennen, dass es sich um Gegenkopplung handelt?
- Was folgt für die Differenzspannung am Eingang des Operationsverstärkers?

(b) Allgemeine Schaltungsanalyse: (1 Punkt)

- Benennen Sie die Schaltung!
- Geben Sie die allgemeine Übertragungsfunktion der Schaltung an! (Keine Rechnung erforderlich)

(c) Jetzt soll das Verhalten der Schaltung im Zeitverlauf untersucht werden. Es gelten folgende Werte für die Bauteile: $R_1 = 100\,\Omega$, $R_N = 200\,\Omega$ (2 Punkte)
Die Betriebsspannung des Operationsverstärkers betrage $\pm 5\,V$. An den Eingang der Schaltung wird eine sinusförmige Wechselspannung U_e angelegt, mit der Periodendauer T und einer Amplitude $\hat{U}_e$ von 2 Volt.

- Geben Sie mit diesen Werten die Formel für die Ausgangsspannung U_a in Abhängigkeit von der Eingangsspannung U_e an!
- Zeichnen Sie jeweils eine Periode von U_e und U_a für die **korrekte Verschaltung in Diagramm 6.1**

Achten Sie auf eine korrekte Beschriftung der Achsen und eindeutige Kennzeichnung der Kurven von U_e und U_a!

(d) Nun sei versehentlich die negative Versorgungsspannung mit Masse verbunden. (2 Punkte)

- Auf welche Größe wirkt sich eine unzureichende Versorgungsspannung bei einem unbelasteten, idealen OP direkt aus? Wie wird sie beeinflusst?
- Zeichnen Sie jeweils eine Periode von U_e und U_a für die **fehlerhafte Verschaltung in Diagramm 6.2**

Lösung:

(a)
- Der Ausgang ist über R_N auf den invertierenden Eingang zurückgekoppelt.

- Die Gegenkopplung sorgt dafür, dass die Differenzspannung am Eingang des Operationsverstärkers auf einen extrem kleinen Wert heruntergezogen wird.

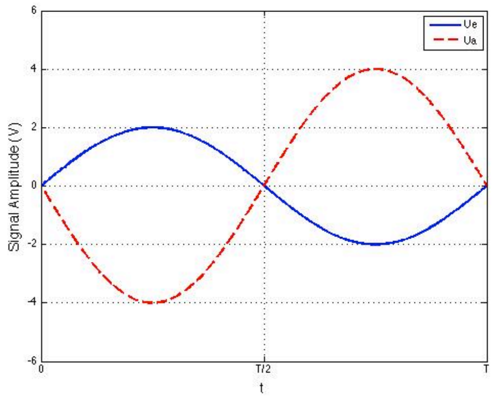
(b) Bei der Schaltung handelt es sich um einen invertierenden Spannungsverstärker. Für die Übertragungsfunktion folgt:

$$\frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_N}{R_1}$$

(c) Aus den Widerstandswerten ergibt sich die Verstärkung zu

$$\frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_N}{R_1} = -2$$

Für eine Eingangswechselspannung mit der Amplitude 2 V ergibt sich der Ausgangsspannungsverlauf als ebenfalls sinusförmige Wechselspannung mit gleicher Frequenz, 180° Phasenverschiebung und doppelter Amplitude zu:



(d) Die Versorgungsspannung des OP hat einen direkten Einfluss auf die Ausgangsspannung: Die Ausgangsspannung kann den Bereich der Versorgungspannung nicht überschreiten.
Für eine negative Versorgungsspannung von 0V ergibt sich der Ausgangsspannungsverlauf somit zu: