Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel   Übungsleiter: Dipl.-Ing. Gustavo Lenis

---

Klausur

02. April 2014
Beginn: 10:00 Uhr

Familienname:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

AUFKLEBER

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Die Klausur muss selbständig bearbeitet werden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein! Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare! Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	5	
2	17	
3	14	
4	4	
5	16	
6	12	
7	26	
Gesamt:	94	

Note:

Aufgabe 1 **(5 Punkte)**

Ortskurve

(a) Berechnen Sie die Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ der Schaltung in Abbildung 1.1. Trennen Sie das Ergebnis nach Real- und Imaginärteil auf. (5 Punkte)

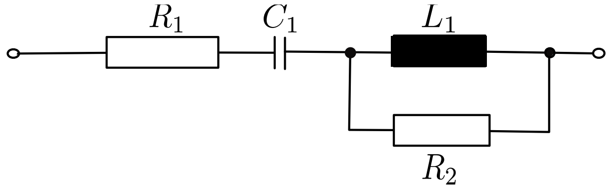
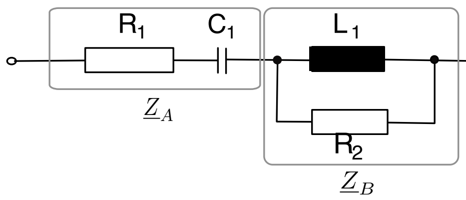


Abbildung 1.1

Lösung:

Für die Gesamtimpedanz der Schaltung gilt:

$$\underline{Z}_{Total} = \underline{Z}_A + \underline{Z}_B$$



$$\underline{Z}_A = R_1 - \frac{j}{\omega C_1}$$

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_B &= j\omega L_1 \parallel R_2 \\
&= \frac{j\omega L_1 R_2}{j\omega L_1 + R_2} \\
&= \frac{j\omega L_1 R_2}{j\omega L_1 + R_2} \cdot \frac{R_2 - j\omega L_1}{R_2 - j\omega L_1} \\
&= \frac{\omega^2 {L_1}^2 R_2}{{R_2}^2 + \omega^2 {L_1}^2} + j\frac{\omega L_1 {R_2}^2}{{R_2}^2 + \omega^2 {L_1}^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{Total} &= \underline{Z}_A + \underline{Z}_B \\
&= R_1 - \frac{j}{\omega C_1} + \frac{\omega^2 {L_1}^2 R_2}{{R_2}^2 + \omega^2 {L_1}^2} + j\frac{\omega L_1 {R_2}^2}{{R_2}^2 + \omega^2 {L_1}^2} \\
&= R_1 + \frac{\omega^2 {L_1}^2 R_2}{{R_2}^2 + \omega^2 {L_1}^2} - \frac{j}{\omega C_1} + j\frac{\omega L_1 {R_2}^2}{{R_2}^2 + \omega^2 {L_1}^2} \\
&= \frac{R_1 {R_2}^2 + R_1 \omega^2 {L_1}^2 + \omega^2 L_1^2 R_2}{{R_2}^2 + \omega^2 {L_1}^2} + j\left(\frac{\omega^2 L_1 C_1 {R_2}^2 - {R_2}^2 - \omega^2 {L_1}^2}{\omega C_1 {R_2}^2 + \omega^3 C_1 {L_1}^2}\right)
\end{aligned}$$

Dadurch gilt für Gesamtimpedanz $\underline{Z}_{Total}$:

$$\begin{aligned}
Re\{\underline{Z}_{Total}\} &= \frac{R_1 {R_2}^2 + R_1 \omega^2 {L_1}^2 + \omega^2 L_1^2 R_2}{{R_2}^2 + \omega^2 {L_1}^2} \\
Im\{\underline{Z}_{Total}\} &= \frac{\omega^2 L_1 C_1 {R_2}^2 - {R_2}^2 - \omega^2 {L_1}^2}{\omega C_1 {R_2}^2 + \omega^3 C_1 {L_1}^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 **(17 Punkte)**

Ortskurve

Gegeben sie ein RLC- Schwingkreis, der an eine Spannungsquelle $\underline{U}_0 = U_0$ angeschlossen wird. U_0 ist ein Effektivwert.

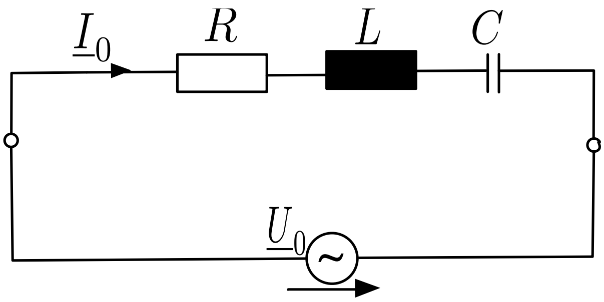


Abbildung 2.1

(a) Zeichen Sie die Ortskurve der Impedanz des Serienschwingkreis in Abbildung 2.1. Markieren Sie $\omega = \omega_0$, $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$. Zeichen Sie die Ortskurve in das Diagramm 2.1. (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die von der Quelle abgegebene komplexe Leistung $\underline{S}$ in Abhängigkeit von $\underline{U}_0$, R, L, C und ω. Geben Sie auch ihren Realteil an: $P = Re\{\underline{S}\} = P(\underline{U}_0, R, L, C, \omega)$ (4 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz $\omega = \omega_0$, bei der die Scheinleistung $\underline{S}$ rein reell ist. Also, $Im\{\underline{S}|_{\omega=\omega_0}\} = 0$. (2 Punkte)

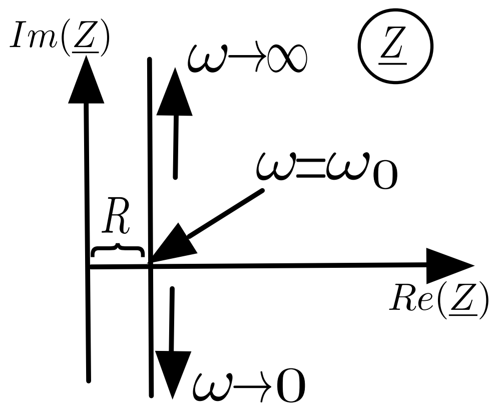
(d) Bestimmen Sie die zwei Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2, für die gilt: $P(\omega_1) = P(\omega_2) = \frac{1}{2}P(\omega_0)$. (6 Punkte)

(e) Beweisen Sie, dass $\omega_0^2 = \omega_1\omega_2$ (2 Punkte)

Lösung:

(a) Für die Gesamtimpedanz der Serienschwingkreises gilt:

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



(b)

$$\begin{aligned}
\underline{S} &= \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_0{}^* \\
&= \underline{U}_0 \cdot \left(\frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}}\right)^* \\
&= \frac{|\underline{U}_0|^2}{\underline{Z}^*} \\
\underline{Z} &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\
\underline{Z}^* &= R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\
\underline{S} &= \frac{|\underline{U}_0|^2}{R - j(\omega L - \frac{1}{\omega C}\ )} \\
&= |\underline{U}_0|^2 \cdot \left(\frac{R}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C}\ )^2}\ + j\frac{(\omega L - \frac{1}{\omega C}\ )}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C}\ )^2}\right) \\
P &= Re\{\underline{S}\} \\
&= |\underline{U}_0|^2 \cdot \frac{R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \\
&= |\underline{U}_0|^2 \cdot \frac{R}{|\underline{Z}|^2}
\end{aligned}$$

(c) $Im\{\underline{S}|_{\omega=\omega_0}\} = 0$

$$\begin{aligned}
|\underline{U}_0|^2 \cdot \left.\frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\right|_{\omega=\omega_0} &= 0 \\
\omega_o L - \frac{1}{\omega_0 C} &= 0
\end{aligned}$$

Dadurch gilt für Kreisfrequenz ω_0:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(d)

$$\begin{aligned}
P &= Re\{\underline{S}\} \\
&= |\underline{U}_0|^2 \cdot \frac{R}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C}\ )^2}
\end{aligned}$$

Bei $\omega = \omega_0$, gilt $\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) = 0$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
P(\omega_0) &= |\underline{U}_0|^2 \cdot \frac{R}{R^2 + (\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C})^2} \\
&= |\underline{U}_0|^2 \cdot \frac{1}{R} \\
&= U_0{}^2 \cdot \frac{1}{R}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(\omega)|_{\omega=\omega_1,\omega_2} &\stackrel{!}{=} \frac{P(\omega_0)}{2} \\
|\underline{U}_0|^2 \cdot \left(\frac{R}{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \right) &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \cdot |\underline{U}_0|^2 \cdot \frac{1}{R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2R^2 &= R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \\
R^2 &= \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2
\end{aligned}
$$

Für diese quadratische Gleichung existieren zwei mögliche Lösungen:

$$
R = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)
$$

oder

$$
R = -\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)
$$

Für die erste Möglichkeit gilt:

$$
\omega^2 LC - \omega CR - 1 = 0
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{CR \pm \sqrt{(CR)^2 + 4LC}}{2LC} \\
\omega_1 &= \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{LC}}
\end{aligned}
$$

Nur die positive Lösung ergibt hier einen Sinn:

$$
\omega^2 LC + \omega CR - 1 = 0
$$

Für die zweite Möglichkeit gilt:

$$
\begin{aligned}
\omega_2 &= -\frac{CR \pm \sqrt{(CR)^2 + 4LC}}{2LC} \\
\omega_2 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{LC}}
\end{aligned}
$$

(e) Das Multiplizieren von ω_1 und ω_2, liefert

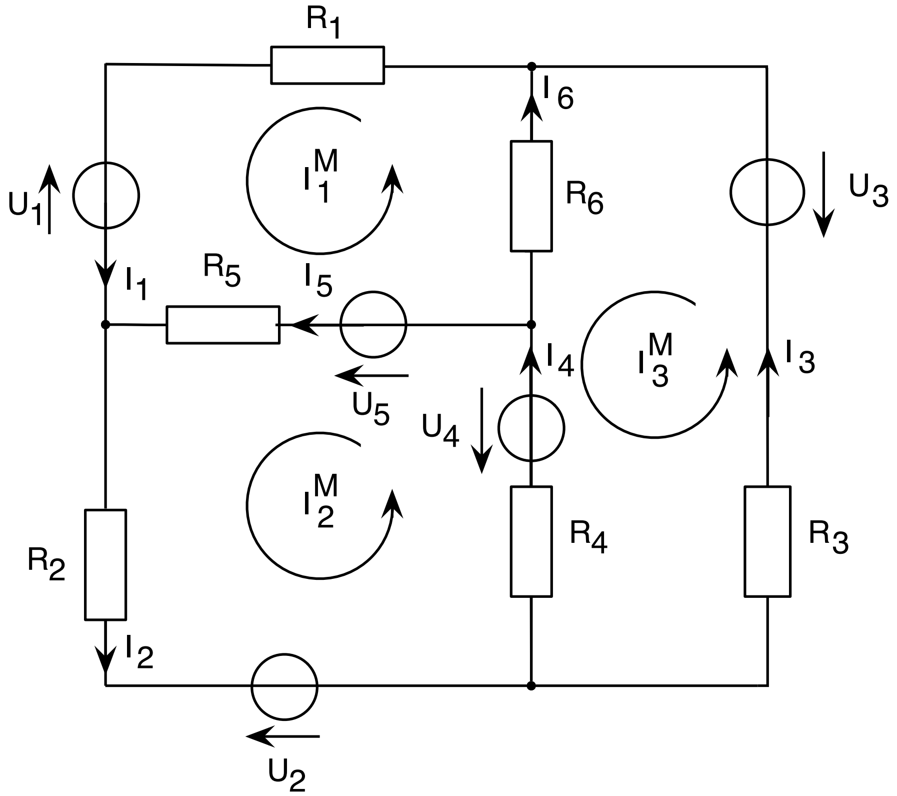
$$\begin{aligned}\omega_1\omega_2 &= -\frac{R^2}{4L^2} + \frac{R^2}{4L} + \frac{1}{LC} \\ &= \frac{1}{LC} \\ &= {\omega_0}^2\end{aligned}$$

und somit

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_2\omega_1}$$

Aufgabe 3 **(14 Punkte)**
Netzwerk

Allgemeiner Hinweis: Runden Sie wenn nötig auf vier Nachkommastellen. Alle Teilaufgaben sind unabhängig lösbar. Dennoch können (Teil-)ergebnisse aus den vorherigen Teilaufgaben hilfreich sein.



(a) **Allgemeine Fragen:** (4 Punkte)

- Nennen Sie die beiden Gesetze von Kirchhoff (Name und Aussage).
- Welche physikalischen Erhaltungssätze liegen den Kirchhoffschen Gesetzen zugrunde? Welcher gehört zu welchem Gesetz?
- Welche Beschränkung gilt beim Helmholtzschen Überlagerungsprinzip für die Bauelementeigenschaften?
- Welche Voraussetzungen hinsichtlich Determinante muss ein lineares Gleichungssystem erfüllen, um eine eindeutige Lösung zu haben.

(b) Die oben dargestellte Schaltung enthält 5 Spannungsquellen, welche die Spannungen U_1=30V, U_2=40V und U_3=U_4=U_5=10V liefern. Die Widerstände haben die Werte R_i=10 Ω, i=1...6. (10 Punkte)

- Stellen Sie mit Hilfe des formalisierten Maschenstromverfahrens das Gleichungssystem für die gegebene Schaltung auf. Die Maschenströme sollen jeweils gegen den Uhrzeigersinn zeigen.
- Lösen Sie das Gleichungssystem und bestimmen Sie alle auftretenden Zweigströme I_1 bis I_6. Verwenden Sie dazu die Cramersche Regel.

Hinweis: Geben Sie jeden Zwischenschritt an und achten Sie auf eine verständliche Beschriftung.

Lösung:

(a)
- Kirchhoffsche Gesetze:
  1. Gesetz: Knotenregel. Die Summe aller Ströme an einem Knoten muss 0 sein.
  $$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$
  2. Gesetz: Maschenregel. Alle Teilspannungen in einer Masche addieren sich zu 0.
  $$\sum_{k=1}^{n} U_k = 0$$
- 1. Gesetz: Erhaltungssatz für Ladungen.
  2. Gesetz: Erhaltungssatz der Energie.
- Der Überlagerungssatz gilt nur für lineare Bauelemente.
- Für ein LGS Ax=b mit N Gleichungen und N Unbekannten muss gelten: Die Determinante von A muss ungleich Null sein.

(b) Die Matrixgleichung sieht wie folgt aus.

$$\begin{bmatrix} R_1+R_5+R_6 & -R_5 & -R_6 \\ -R_5 & R_2+R_4+R_5 & -R_4 \\ -R_6 & -R_4 & R_3+R_4+R_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1+U_5 \\ U_4-U_5+U_2 \\ U_3-U_4 \end{bmatrix}$$

Setzt man die gegebenen Werte ein, so erhält man in Matritzenschreibweise

$$\begin{bmatrix} 30 & -10 & -10 \\ -10 & 30 & -10 \\ -10 & -10 & 30 \end{bmatrix} \Omega \cdot \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{V}.$$

Die Determinanten einer 3x3 Matrix wird bestimmt mit:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 \text{-} c_1b_2a_3 \text{-} c_2b_3a_1 \text{-} c_3b_1a_2.$$

Mit der Cramerschen Regel werden folgende LGS gelöst.

$$IM_1 = \frac{\begin{vmatrix} 40 & -10 & -10 \\ 40 & 30 & -10 \\ 0 & -10 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30 & -10 & -10 \\ -10 & 30 & -10 \\ -10 & -10 & 30 \end{vmatrix}} \mathrm{A} = \frac{48}{16}\mathrm{A} = 3\mathrm{A},$$

$$IM_2 = \frac{\begin{vmatrix} 30 & 40 & -10 \\ -10 & 40 & -10 \\ -10 & 0 & 30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30 & -10 & -10 \\ -10 & 30 & -10 \\ -10 & -10 & 30 \end{vmatrix}} \mathrm{A} = \frac{48}{16}\mathrm{A} = 3\mathrm{A},$$

$$IM_3 = \frac{\begin{vmatrix} 30 & -10 & 40 \\ -10 & 30 & 40 \\ -10 & -10 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30 & -10 & -10 \\ -10 & 30 & -10 \\ -10 & -10 & 30 \end{vmatrix}} \mathrm{A} = \tfrac{32}{16}\mathrm{A}{=}2\mathrm{A}.$$

Die Lösungen lauten IM_1=3A, IM_2=3A, IM_3=2A.

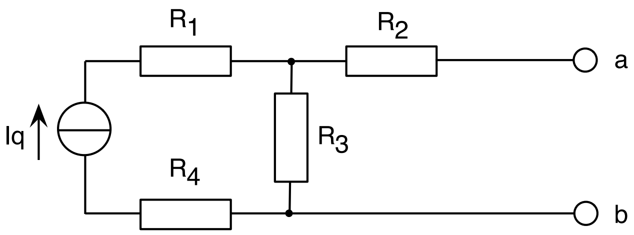
Damit betragen die übrigen Zweigströme
I_1=IM_1=3A,
I_2=IM_2=3A,
I_3=IM_3=2A,
I_4=IM_2-IM_3=1A,
I_5=IM_2-IM_1=0A,
I_6=IM_1-IM_3=1A.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**
Netzwerk

Hinweis: Dieser Aufgabenteil soll mit allgemeinen Werten gelöst werden.

(a) Die folgende Abbildung zeigt eine Schaltung mit offenen Klemmen. (4 Punkte)

- Skizzieren Sie die äquivalente Spannungsquelle und die äquivalente Stromquelle bzgl. den Klemmen a und b. Geben Sie den Innenwiderstand der Quelle, ihren Kurzschlussstrom und ihre Leerlaufspannung an.



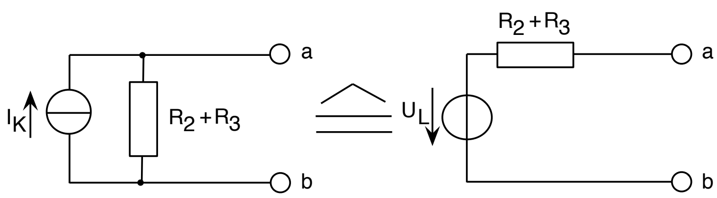
Lösung:

(a) Der Innenwiderstand wird berechnet, indem Spannungsquellen durch Kurzschlüsse und Stromquellen durch Unterbrechungen ersetzt werden. Dadurch fallen die Widerstände R_1 und R_4 weg und es bleibt ein Innenwiderstand $R_i{=}R_2{+}R_3$ übrig.

Zur äquivalenten Spannungsquelle:
Die Leerlaufspannung, welche über R_3 abfällt ist $U_L{=}I_q{\cdot}R_3$.

Zur äquivalenten Stromquelle wird die Spannungsquelle in eine Stromquelle umgewandelt:

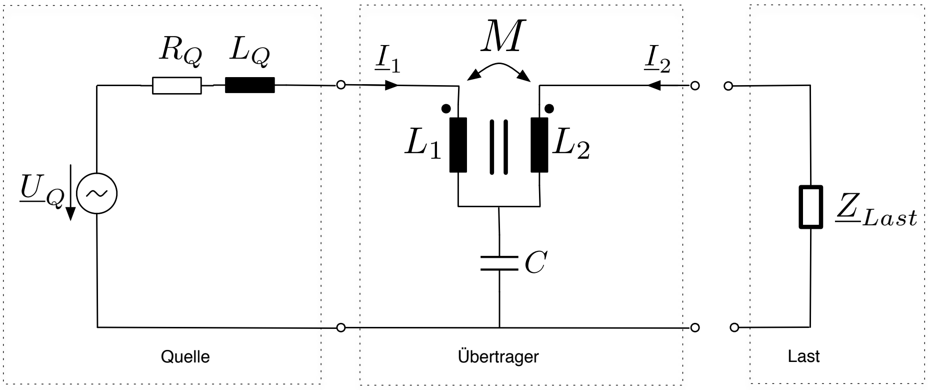
$I_K{=}\frac{U_L}{R_2+R_3} = I_q\cdot\frac{R_3}{R_2+R_3}$



Aufgabe 5 **(16 Punkte)**

Wechselstromlehre

Gegeben seien eine realistische Spannungsquelle, ein magnetisch gekoppelter Übertrager und eine Last. Die genannten Komponenten werden in der folgenden Art und Weise geschaltet:



Für die Bauelemente gilt:

- $\underline{U}_Q = 240\,V$
- $R_Q = 2\,\Omega$
- $\omega L_Q = X_Q = 1\,\Omega$
- $\frac{1}{\omega C} = X_C = 7\,\Omega$
- $\omega L_1 = X_1 = 10\,\Omega$
- $\omega L_2 = X_2 = 5\,\Omega$
- $\omega M = X_M = 5\,\Omega$

Zur einfacheren Beschreibung des Systems bestehend aus Quelle und Übertrager ist ein Thevenin-Ersatzschaltbild eine sehr gute Wahl. Dazu sollen Sie die Leerlaufspannung $\underline{U}_L$ und den Kurzschlussstrom $\underline{I}_K$ des Systems bestimmen.

Hinweis: Die Gleichungen eines verlustfreien Transformators sehen wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{L1} &= j\omega L_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega M \cdot \underline{I}_2 \\ \underline{U}_{L2} &= j\omega M \cdot \underline{I}_1 + j\omega L_2 \cdot \underline{I}_2 \end{aligned}$$

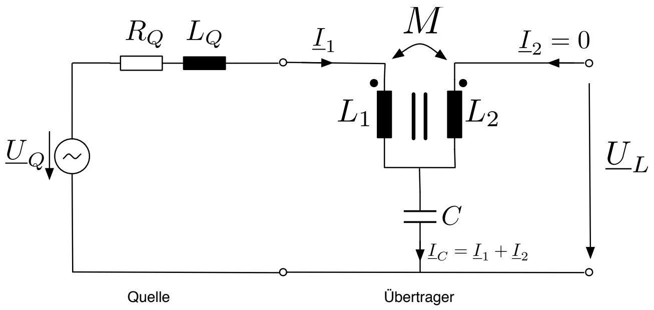
(a) Bestimmen Sie die Leerlaufspannung des Systems bestehend aus Quelle und Übertrager in allgemeiner Form (Nur $\underline{U}_Q$ und die Bauteile dürfen vorkommen). Setzen Sie dann die Bauteilwerte ein und zeigen Sie, dass für diese Spannung Folgendes gilt:
$\underline{U}_L = (-96 - j48)V$. (6 Punkte)

(b) Bestimmen Sie den Kurzschlussstrom des Systems bestehend aus Quelle und Übertrager in allgemeiner Form (Nur $\underline{U}_Q$ und die Bauteile dürfen vorkommen). Setzen Sie dann die Bauteilwerte ein und zeigen Sie, dass für diesen Strom Folgendes gilt:
$\underline{I}_K = (12 - j36)A$. (8 Punkte)

(c) Bei welcher Lastimpedanz maximiert sich die vom System übertragene Wirkleistung? Geben Sie die Lastimpedanz zahlenmäßig an. (2 Punkte)

Lösung:

(a) Die Leerlaufspannung des Systems wird mit der folgenden Schaltung bestimmt:



Zwei Maschengleichungen können aufgestellt werden. Es darf nicht vergessen werden, dass in diesem Fall der Strom der Sekundärseite $\underline{I}_2 = 0$ ist.

$$\begin{aligned} \text{M1:} \quad \underline{U}_Q &= \underline{I}_1 \cdot (R_Q + j(X_Q + X_1 - X_C)) \\ \text{M2:} \quad \underline{U}_L &= \underline{I}_1 \cdot j(X_M - X_C) \end{aligned}$$

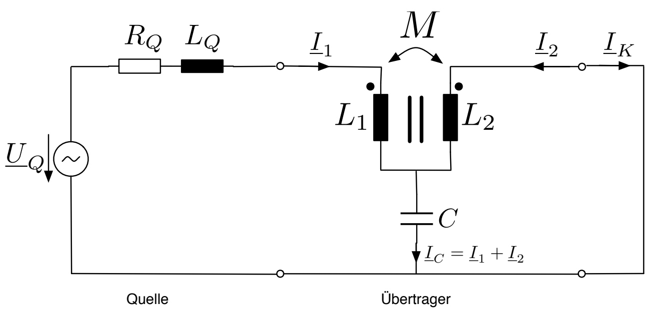
Die erste Maschengleichung wird nach $\underline{I}_1$ aufgelöst:

$$\text{M1: } \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_Q}{(R_Q + j(X_Q + X_1 - X_C))}$$

Das Einsetzen in Gleichung M2 liefert dann:

$$\begin{aligned} \underline{U}_L &= \underline{U}_Q \cdot \frac{j(X_M - X_C)}{(R_Q + j(X_Q + X_1 - X_C))} \\ &= (-96 - j48)V \end{aligned}$$

(b) Der Kurzschlussstrom des Systems wird mit der folgenden Schaltung bestimmt:



Zwei Maschengleichungen können aufgestellt werden. Für den gesuchten Kurzschlussstrom gilt: $\underline{I}_K = -\underline{I}_2$.

$$\begin{aligned} \text{M1:} \quad \underline{U}_Q &= \underline{I}_1 \cdot (R_Q + j(X_Q + X_1 - X_C)) + \underline{I}_2 \cdot j(X_M - X_C) \\ \text{M2:} \quad 0 &= \underline{I}_1 \cdot j(X_M - X_C) + \underline{I}_2 \cdot j(X_2 - X_C) \end{aligned}$$

Die zweite Maschengleichung wird nach $\underline{I}_2$ aufgelöst.

$$\text{M2:} \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_1 \cdot \frac{(X_M - X_C)}{(X_C - X_2)}$$

Einsetzen in die Maschengleichung M1 liefert:

$$\begin{aligned}
\text{M2:} \quad \underline{U}_Q &= \underline{I}_1 \cdot \left(R_Q + j(X_Q + X_1 - X_C) + j\frac{(X_M - X_C)^2}{(X_C - X_2)} \right) \\
\Rightarrow \quad \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_Q}{R_Q + j\left(X_Q + X_1 - X_C + \frac{(X_M - X_C)^2}{(X_C - X_2)} \right)}
\end{aligned}$$

Nun kann man den gefundenen Strom $\underline{I}_1$ in die obige Gleichung für $\underline{I}_2$ einsetzen. Das führt zum folgenden Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_Q \cdot \frac{(X_M - X_C)}{(X_C - X_2)}}{R_Q + j\left(X_Q + X_1 - X_C + \frac{(X_M - X_C)^2}{(X_C - X_2)} \right)} \\
&= \frac{\underline{U}_Q \cdot (X_M - X_C)}{R_Q(X_C - X_2) + j((X_Q + X_1 - X_C)(X_C - X_2) + (X_M - X_C)^2)}
\end{aligned}$$

Dadurch gilt für den gesuchten Strom I_{th}:

$$\underline{I}_K = -\frac{\underline{U}_Q \cdot (X_M - X_C)}{R_Q(X_C - X_2) + j((X_Q + X_1 - X_C)(X_C - X_2) + (X_M - X_C)^2)}$$

Das Einsetzen der angebenden Bauteilwerte liefert dann:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_2 &= (-12 + j36)A \\
\Rightarrow \underline{I}_K &= (12 - j36)A
\end{aligned}$$

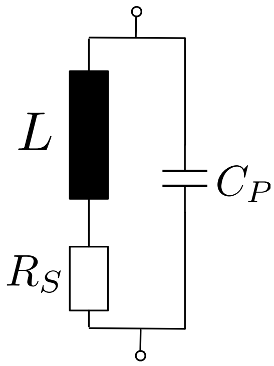
(c) Die übertragene Wirkleistung maximiert sich, wenn die Lastimpedanz konjugiert komplex zu der Innenimpedanz der Quelle ist. Dadurch gilt für die optimale Lastimpedanz Folgendes:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{Last} &= \underline{Z}^*_{Innen} = \left(\frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_K} \right)^* \\
&= (0.4 + j2.8)\Omega
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 **(12 Punkte)**

Wechselstromlehre

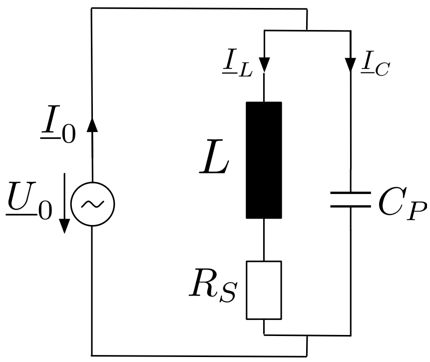
Die parasitären Effekte einer in der Starkstromtechnik eingesetzten Spule sollen untersucht werden. Die realistische Spule mit Induktivität L wird folgendermaßen modelliert:



Für die angegebenen Bauelemente gilt:

- Die Induktivität der Spule beträgt: **L=52 mH**
- Der parasitäre Innenwiderstand der Wicklungen ist R_S
- Die parasitäre Kapazität der Wicklungen ist C_P

Auf Grund begrenzter Messtechnik kann nur eine Messung durchgeführt werden. Die folgende Messeinrichtung wird gewählt:



Für das Experiment und sein Messergebnis gilt:

- Die angelegte Spannung ist $\mathbf{\underline{U}_0 = 725\,V \cdot e^{j0}}$ (Effektivwert und keine Phase)
- Die Kreisfrequenz der Spannung beträgt $\boldsymbol{\omega = 500\,s^{-1}}$
- Der Quellstrom konnte nur betragsmässig gemessen werden: $|\mathbf{\underline{I}_0}| = \mathbf{25\,A}$ (Effektivwert)
- Eine mittlere Leistung von $\mathbf{P} = \mathbf{5075\,W}$ konnte auch gemessen werden.

Hinweis: Die parasitären Effekte sind natürlich kleiner als die Reaktanz der Spule.

(a) Zeigen Sie, dass für den komplexen Strom $\underline{I}_0$ Folgendes gilt: (4 Punkte)
$\underline{I}_0 = (7 - j24)\,A$.

(b) Bestimmen Sie die parasitären Bauteile C_P und R_S. (8 Punkte)

Lösung:

(a) Um den komplexen Strom $\underline{I}_0$ anzugeben, sind sein Betrag und seine Phase notwendig. Die Quellspannung hat keine Phase. Dadurch lässt sich die Phase φ des Quellstromes über die von der Quelle abgegebene Wirkleistung berechnen. Für die Wirkleistung gilt:

$$\begin{aligned} P &= |\underline{U}_0| \cdot |\underline{I}_0| \cdot cos(\varphi) \\ cos(\varphi) &= \frac{P}{|\underline{U}_0||\underline{I}_0|} \end{aligned}$$

Bei der Cosinus-Funktion geht das Vorzeichen des Winkels "verloren". In diesem Fall handelt es sich um eine Schaltung mit induktivem Verhalten. Bekanntlich kommt der Strom "zu spät" bei der Induktivität. Deswegen ist die Phase φ negativ. Somit gilt für die Phase:

$$\varphi = -\cos^{-1}\left(\frac{P}{|\underline{U}_0||\underline{I}_0|}\right) = -73.7398^o$$

Dadurch gilt für den komplexen Quellstrom gilt:

$$\underline{I}_0 = |\underline{I}_0| e^{-j\cdot 73.7398^o} = (7 - j24)A$$

(b) Zunächst wird R_S bestimmt. Da R_S der einzige Widerstand der Schaltung ist, muss dort die komplette Wirkleistung P umgesetzt werden. Somit gilt für den Strom $|\underline{I}_L|$ Folgendes:

$$1)\ P = |\underline{I}_L|^2 \cdot R_S$$

Weiterhin ist der Strom $\underline{I}_L$ durch die Bauteilwerte L und R_S und die Spannung $\underline{U}_0$ gegeben:

$$2)\ |\underline{I}_L|^2 = \frac{|\underline{U}_0|^2}{|R_S + j\omega L|^2}$$

Die Gleichungen 1) und 2) lassen sich kombinieren und liefern das Folgende:

$$\begin{gathered} \tfrac{P}{R_S} = \tfrac{U_0^2}{R_S^2 + (\omega L)^2} \\ P \cdot R_S^2 - U_0^2 \cdot R_S + P(\omega L)^2 = 0 \end{gathered}$$

Diese quadratische Gleichung hat die folgenden Lösungen:

$$\begin{gathered} R_S = \tfrac{U_0^2}{2P} \pm \sqrt{\left(\tfrac{U_0^2}{2P}\right)^2 - (\omega L)^2} \\ R_{S1} = 7\,\Omega \qquad R_{S2} = 96.57\,\Omega \end{gathered}$$

Da die parasitären Effekte kleiner als die Reaktanz der Spule sind, ergibt hier nur $R_S = 7\,\Omega$ Sinn.

Für den komplexen Strom $\underline{I}_L$ gilt dann:

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_0}{R_S + j\omega L} = (7 - j26)A$$

Für den Strom $\underline{I}_C$ gilt dann:

$$\underline{I}_C = \underline{I}_0 - \underline{I}_L = j2A$$

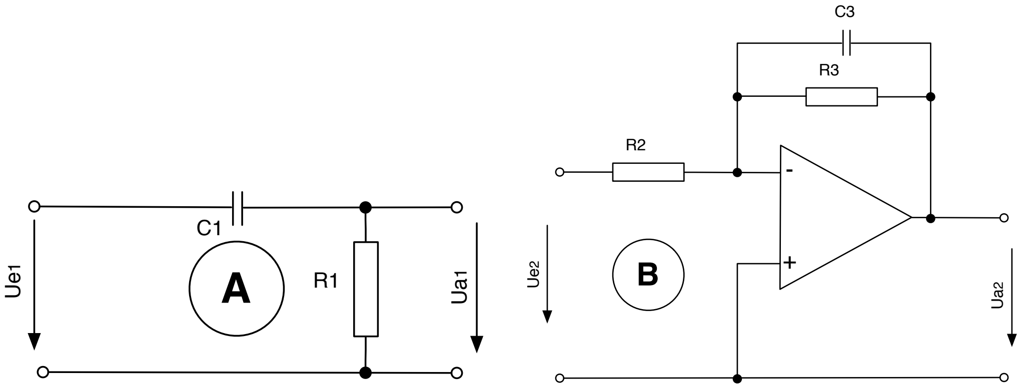
Für den Kondensator gilt dann:

$$\underline{C}_P = \frac{\underline{I}_C}{j\omega \underline{U}_0} = 5.5172\mu F$$

Aufgabe 7 **(26 Punkte)**

Bodediagramm

Gegeben sind diese beiden Schaltungen:



(a) Um welche Schaltungen handelt es sich? Geben Sie jeweils den korrekten Namen an. (2 Punkte)

(b) Leiten Sie die Übertragungsfunktionen der beiden Schaltungen her. (3 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass die normierten Übertragungsfunktionen (3 Punkte)

$$G(\Omega_A) = \frac{j\Omega_A}{1 + j\Omega_A} \quad \text{und} \quad G(\Omega_B) = V \cdot \frac{1}{1 + j\Omega_B}$$

sind. Ihr Vorgehen muss ersichtlich sein (Ggf. passend umstellen und Normierung sowie V angeben).

(d) Nehmen Sie an, R_3 ist 10 mal so groß wie R_2. Wie groß ist dann die Spannungsverstärkung V in dB im Durchlassbereich? (2 Punkte)

Es wird eine stärkere Dämpfung im niederfequenten Bereich benötigt. Dafür wird eine der Schaltungen zweimal verwendet und entkoppelt verkettet.

(e) Welche Schaltung kann zum Entkoppeln solcher Zweitore verwendet werden? Benennen und skizzieren Sie diese. (2 Punkte)

(f) Geben Sie die Übertragungsfunktion der verketteten Schaltung an. (2 Punkte)

(g) Zeichnen Sie das Bodediagramm der verketteten niederfrequent dämpfenden Schaltung in Diagramm 7.1 und 7.2. (4 Punkte)

(h) Zeichnen Sie nun das Bodediagramm der zweiten Schaltung, die Sie nicht zur Verkettung verwendet haben in 7.3 und 7.4. *Hinweis: Verwenden Sie die Angaben aus den vorangegangenen Aufgabenteilen. Sollten Sie Aufgabenteil (d) nicht gelöst haben, verwenden Sie* 10 *dB als Verstärkung V.* (4 Punkte)

Jetzt werden alle drei Schaltungsteile entkoppelt verkettet.

(i) Zeichnen Sie das Bodediagramm aller drei verketteten Schaltungsteile in Diagramm 7.5 und 7.6. Verwenden Sie $\frac{R_1 C_1}{R_3 C_3} = 10^2$. *Hinweis: Sollten Sie Aufgabenteil (b) nicht gelöst haben, verwenden Sie* $10\Omega_B = \Omega_A$ (4 Punkte)

Lösung:

(a) A: Hochpass erster Ordnung

B: Aktiver invertierender Tiefpass erster Ordnung

(b) A: Mit der Spannungsteiler-Regel

$$\frac{U_R}{U_{gesamt}} = \frac{R}{R_{gesamt}}$$

lässt sich die Übertragungsfunktion sofort angeben

$$\frac{U_{a1}}{U_{e1}} = \frac{R_1}{R_1 - j\frac{1}{\omega C_1}}.$$

B: Wir können zum Beispiel die Knotengleichung verwenden und erhalten

$$\text{K:} \qquad \frac{U_{e2} - U_K}{R_2} - \frac{U_K - U_{a2}}{R_3 || \frac{1}{j\omega C_3}} = 0.$$

Mit der bekannten Vereinfachung für Operationsverstärker ($U_d = 0$) erhalten wir

$$U_{e2} \cdot \frac{1}{R_2} + U_{a2} \cdot \frac{R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}}{R_3 \frac{1}{j\omega C_3}} = 0.$$

Dies lässt sich umformen zu:

$$\frac{U_{a2}}{U_{e2}} = -\frac{R_3 \frac{1}{j\omega C_3}}{R_3 R_2 + \frac{R_2}{j\omega C_3}}.$$

Jetzt kann noch mit $j\omega C_3$ erweitert werden

$$\frac{U_{a2}}{U_{e2}} = -\frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_3 C_3}$$

um die Doppelbrüche los zuwerden.

(c) Damit die angegebenen normierten Übertragungsfunktionen erreicht werden, muss A

$$\frac{U_{a1}}{U_{e1}} = \frac{j\omega C_1 R_1}{j\omega C_1 R_1 + 1}$$

mit $\omega_A = 1/(R_1 C_1)$ normiert werden und B

$$\frac{U_{a2}}{U_{e2}} = -\frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_3 C_3}.$$

mit $\omega_B = 1/(R_3 C_3)$. Der Verstärkungsfaktor ist dann

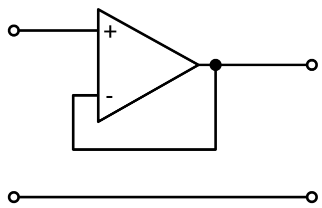
$$V = -\frac{R_3}{R_2}.$$

(d) Mit

$$a_v = 20 \log \left| -\frac{R_3}{R_2} \right|$$

ist die Verstärkung $20\,dB$.

(e) Gefragt war nach dem Spannungsfolger/Impedanzwandler.



(f) Unter der Annahme entkoppelter Schaltungen gilt:

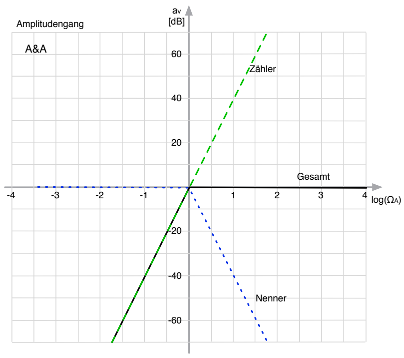
$$\frac{U_{a2}}{U_{e1}} = \frac{U_{a1}}{U_{e1}} \cdot \frac{U_{a2}}{U_{a1}} \quad \text{mit} \quad U_{e2} = U_{a1}.$$

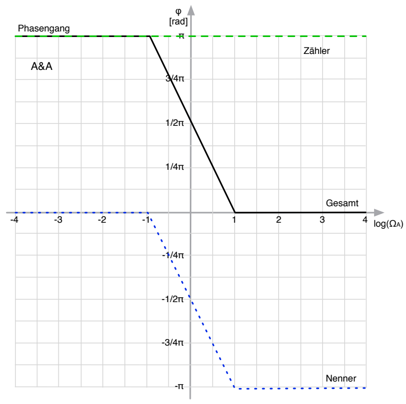
Da es sich bei der Schaltung in A um den Hochpass handelt, werden wir diesen verketten müssen. Die Übertragungsfunktion lautet dann

$$\frac{U_{a1}}{U_{e1}} = \frac{(j\omega C_1 R_1)^2}{(j\omega C_1 R_1 + 1)(j\omega C_1 R_1 + 1)}.$$

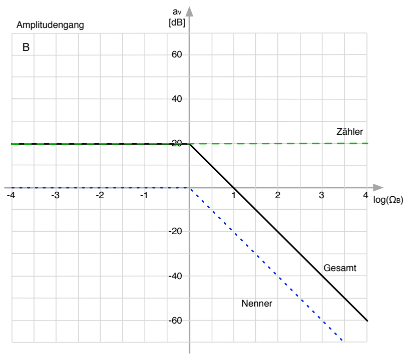
Die Normierung ändert sich nicht.

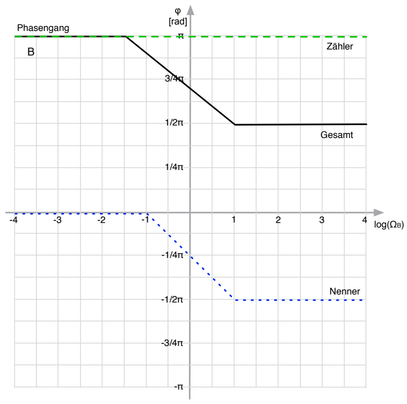
(g) Die Diagramme sollten so aussehen:





(h) Die Diagramme der Schaltung B mit der Verstärkung $20\,dB$:





(i) Die Bodediagramme der gesamten Schaltung sehen dann so aus: