

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel

Übungsleiter: Dipl.-Ing. Gustavo Lenis

Klausur

01. April 2015
Beginn: 14:00 Uhr

Familienname:	AUFKLEBER
Vorname:	
Matrikel-Nr.:	

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Die Klausur muss selbständig bearbeitet werden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein!
Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare!
Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

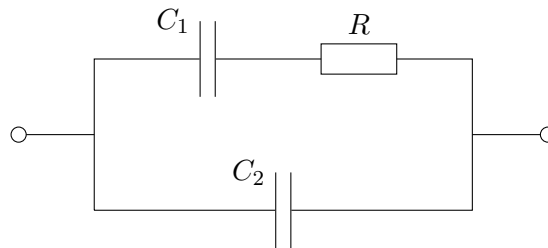
Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	18	
2	16	
3	22	
4	12	
5	12	
6	14	
Gesamt:	94	

Note:_____

Aufgabe 1**(18 Punkte)****Ortskurve**

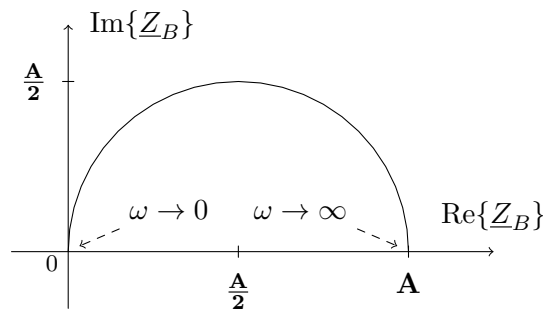
Gegeben sei folgende Schaltung:



- (a) Wie lautet die Gleichung der Gesamtadmittanz $\underline{Y}_{\text{ges}}(\omega)$? Geben Sie das allgemeine Ergebnis nach Real- und Imaginärteil getrennt an. (3 Punkte)
- (b) Wie verhält sich die Gesamtadmittanz für $\omega \rightarrow \infty$, wie für $\omega \rightarrow 0$? Begründen Sie ihre Antwort. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben können auch ohne die vorherigen gelöst werden!

Von einer Black-Box-Schaltung sei die Impedanzkurve gegeben:



- (c) Zeichnen Sie in Diagramm 1.1 die zugehörige Admittanzkurve ein. Kennzeichnen Sie dabei die charakteristische Frequenz ω_0 , die Grenzwerte $\omega \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \infty$ sowie die korrekten Werte auf den Achsen. (4 Punkte)
Hinweis: Fehlende Achsenbeschriftungen führen zu Punktabzug!
- (d) Skizzieren Sie eine mögliche Schaltung mit dieser Admittanzkurve, bestehend aus R , L , und C Elementen. Dabei müssen nicht alle Elemente enthalten sein. (1 Punkt)
- (e) Berechnen Sie die Admittanz einer RC-Serienschaltung nach Real- und Imaginärteil getrennt. Beweisen Sie, dass die Admittanz die folgende Kreisgleichung für beliebige $\omega \in [0, \infty)$ erfüllt: (5 Punkte)

$$\left(\operatorname{Re}\{\underline{Y}\} - \frac{1}{2R} \right)^2 + (\operatorname{Im}\{\underline{Y}\})^2 = \frac{1}{4R^2}$$

- (f) Der sich in einem Radioempfänger befindende RLC-Serienschwingkreis soll so eingestellt werden, dass er auf Radiowellen der Frequenz 1422 kHz anspricht ("Resonanzfrequenz").
 Auf welche Kapazität muss der Drehkondensator eingestellt werden um die gewünschte Resonanzfrequenz zu erreichen? Die Induktivität der verbauten Spule ist fest bei 0.5 mH.
 Leiten Sie dazu zunächst die allgemeine Formel der Resonanzfrequenz eines RLC-Serienschwingkreises her.

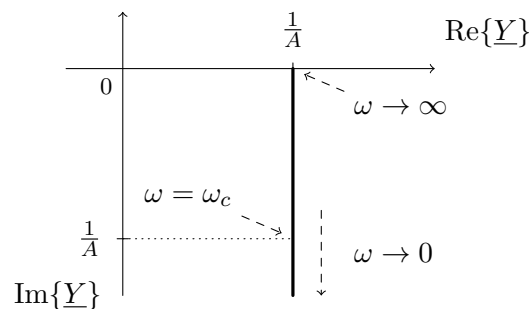
Lösung:

- (a) Für den oberen Teil der Schaltung gilt:

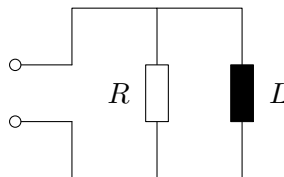
$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_{oben} &= \frac{1}{j\omega C_1} + R \\
 \underline{Y}_{oben} &= \frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C_1} + R} \\
 &= \frac{j\omega C_1}{1 + j\omega C_1 R} = \frac{(\omega C_1)^2 R + j\omega C_1}{1 + (\omega C_1 R)^2} \\
 \Rightarrow \underline{Y}_{ges} &= \underline{Y}_{oben} + j\omega C_2 \\
 &= \underbrace{\frac{(\omega C_1)^2 R}{1 + (\omega C_1 R)^2}}_{=\text{Re}(\underline{Y}_{ges})} + j \underbrace{\left(\frac{\omega C_1}{1 + (\omega C_1 R)^2} + \omega C_2 \right)}_{=\text{Im}(\underline{Y}_{ges})}
 \end{aligned}$$

- (b) $\omega \rightarrow \infty$: Da der Kondensator perfekt leitend wird und der parallel geschaltete Teil A somit keine Rolle mehr spielt, geht $\underline{Z}_{ges} \rightarrow 0$ und somit $\underline{Y}_{ges} \rightarrow \infty$.
 $\omega \rightarrow 0$: Da beide Kondensatoren komplett sperren, geht $\underline{Z}_{ges} \rightarrow \infty$ und somit $\underline{Y}_{ges} \rightarrow 0$.

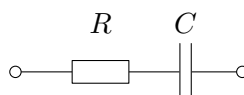
- (c) **Admittanz:**



- (d) **Schaltbild:**



- (e) **Schaltbild:**



Die Impedanz der RC-Serienschaltung berechnet sich zu $\underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_C = R + \frac{1}{j\omega C}$.

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R + j\frac{1}{\omega C}}{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = \frac{R\omega^2 C^2 + j\omega C}{R^2\omega^2 C^2 + 1}$$

Setze

$$N := R^2\omega^2 C^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re}\{\underline{Y}\} = \frac{1}{N}R\omega^2 C^2, \quad \operatorname{Im}\{\underline{Y}\} = \frac{1}{N}\omega C$$

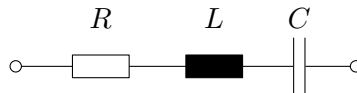
Zu zeigen:

$$\left(\operatorname{Re}\{\underline{Y}\} - \frac{1}{2R}\right)^2 + (\operatorname{Im}\{\underline{Y}\})^2 = \frac{1}{4R^2}$$

Einsetzen von $\operatorname{Re}\{\underline{Y}\}$ und $\operatorname{Im}\{\underline{Y}\}$ in diese Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4R^2} &\stackrel{!}{=} \left(\frac{1}{N}R\omega^2 C^2 - \frac{1}{2R}\right)^2 + \left(\frac{1}{N}\omega C\right)^2 \\ &= \frac{1}{N^2}R^2\omega^4 C^4 - 2\frac{1}{N}R\omega^2 C^2 \frac{1}{2R} + \frac{1}{4R^2} + \frac{1}{N^2}\omega^2 C^2 \\ &= \frac{1}{N^2}(R^2\omega^4 C^4 - N\omega^2 C^2 + \omega^2 C^2) + \frac{1}{4R^2} \\ &= \frac{1}{N^2}\omega^2 C^2(R^2\omega^2 C^2 - N + 1) + \frac{1}{4R^2} \quad | \quad N = R^2\omega^2 C^2 + 1 \text{ einsetzen} \\ &= \frac{1}{N^2}\omega^2 C^2 \underbrace{(R^2\omega^2 C^2 - R^2\omega^2 C^2 - 1 + 1)}_{=0} + \frac{1}{4R^2} = \frac{1}{4R^2} \quad \square \end{aligned}$$

(f) **RLC-Serienschaltung:**



Die Gesamtadmittanz ist $\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ und damit gilt für den Blindwiderstand X : $X = \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = \omega L - \frac{1}{\omega C}$. Bei der Resonanzfrequenz ω_0 verschwindet der Blindwiderstand X , also

$$\begin{aligned} 0 = X &= \omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} \\ \Rightarrow \quad \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \end{aligned}$$

Werte einsetzen:

$$\begin{aligned} C &= \left(\frac{1}{2\pi f_0 \sqrt{L}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{(2\pi \cdot 1.422 \cdot 10^6 \frac{1}{s})^2 \cdot 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ H}} \\ &= \frac{1}{4\pi^2 \cdot 1.422^2 \cdot 0.5 \cdot 10^9} \text{ F} = 0.0251 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 25.1 \text{ pF} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Netzwerk

(16 Punkte)

- (a) **Es gilt folgende Schaltung:** Die in Abbildung 2.1 dargestellte Schaltung enthält bekannte und unbekannte Widerstände R_x und R_y , einen Quellstrom I_q und eine Quellspannung. (6 Punkte)

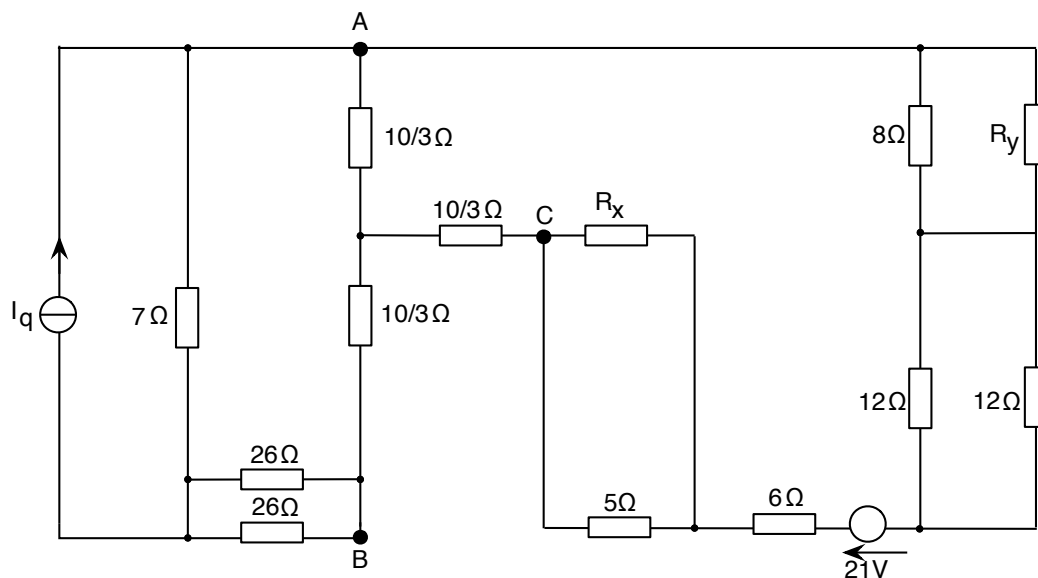


Abbildung 2.1

Wandeln Sie die obige Schaltung in folgende Form (Abbildung 2.2) um und bestimmen Sie dabei die Werte für I_q , R_x und R_y . Die Knoten A, B und C sind in beiden Schaltungen gleich.

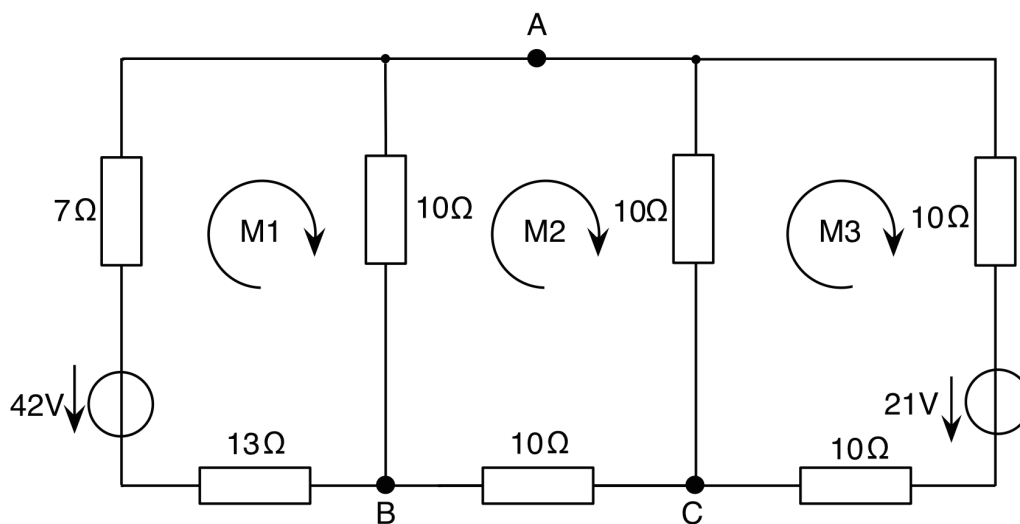
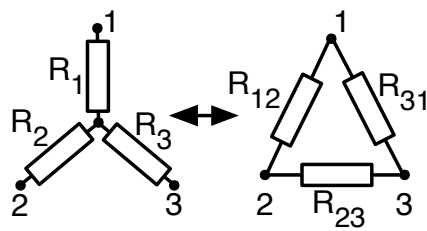


Abbildung 2.2

Hinweis: Stern-Dreiecks-Transformation



$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad R_{12} = R_1 + R_2 + R_1 \frac{R_2}{R_3}$$

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad R_{23} = R_2 + R_3 + R_2 \frac{R_3}{R_1}$$

$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad R_{31} = R_3 + R_1 + R_3 \frac{R_1}{R_2}$$

- (b) Bestimmen Sie mit dem formalisierten Maschenstromverfahren das Gleichungssystem für die Maschenströme I_{M1} , I_{M2} und I_{M3} (Abbildung 2.2). Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel.

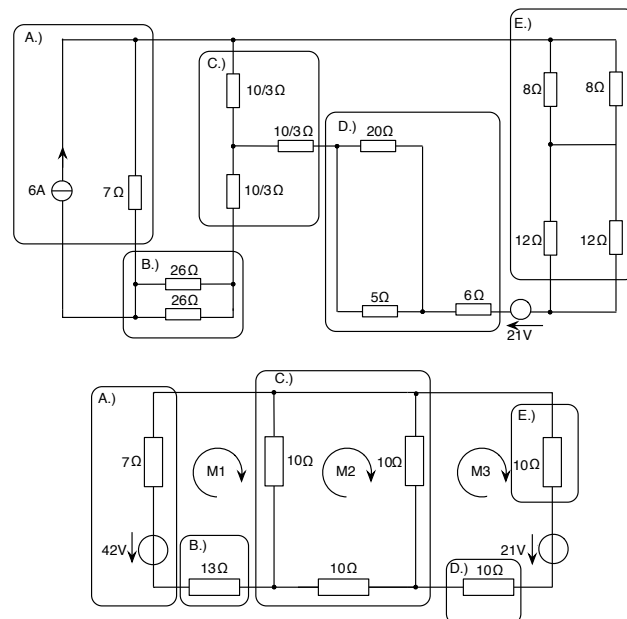
Hinweis: Geben Sie jeden Zwischenschritt an und achten Sie auf eine verständliche Beschriftung.

- (c) Wie viel Leistung geben die 2 Quellen (21V und 42V) aus Abbildung 2.2 ab? (2 Punkte)

Lösung:

(a) Umwandlungen:

R_x besitzt den Wert 50Ω und R_y den Wert $0,1\Omega$.



A.) Stromquelle in Spannungsquelle

$$7\Omega \cdot I_q = 42V$$

$$I_q = \frac{42}{7} A = 6A$$

B.) Parallelschaltung

$$(26\Omega \parallel 26\Omega) = 13\Omega$$

C.) Stern-Dreieck- Umwandlung

$$\text{Jeweils } \frac{10}{3}\Omega + \frac{10}{3}\Omega + \frac{\frac{10}{3}\Omega \cdot \frac{10}{3}\Omega}{\frac{10}{3}\Omega} = 10\Omega$$

D.) Parallelschaltung + Reihenschaltung

$$(R_x \parallel 5\Omega) + (6\Omega) = 10\Omega$$

$$R_x = 20\Omega$$

E.) Parallelschaltung + Reihenschaltung

$$(8\Omega \parallel R_y) + (12\Omega \parallel 12\Omega) = 10\Omega$$

$$R_y = 8\Omega$$

(b) **Formalisiertes Maschenstromverfahren:**

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_3 + R_4 + R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_5 + R_6 + R_7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 30 & -10 & 0 \\ -10 & 30 & -10 \\ 0 & -10 & 30 \end{bmatrix} \Omega \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 0 \\ -21 \end{bmatrix} \text{ V.}$$

Zunächst wird die Determinante der Matrix $\underline{R}$ bestimmt.

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 30 & -10 & 0 \\ -10 & 30 & -10 \\ 0 & -10 & 30 \end{vmatrix} \Omega^3 \\ &= ((30)(30)(30) - (30)(-10)(-10) - (-10)(-10)(30)) \Omega^3 \\ &= 21000 \Omega^3 \end{aligned}$$

Mit der Cramerschen Regel werden folgende LGS gelöst.

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 42 & -10 & 0 \\ 0 & 30 & -10 \\ -21 & -10 & 30 \end{vmatrix}}{D} \text{ A} = \frac{(42)(30)(30) + (-10)(-10)(-21) - (42)(-10)(-10)}{D} \text{ A} \\ &= \frac{31500}{21000} \text{ A} = 1,5 \text{ A,} \end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 30 & -42 & 0 \\ -10 & 0 & -10 \\ 0 & -21 & 30 \end{vmatrix}}{D} \text{ A} = \frac{6300}{21000} \text{ A} = 0,3 \text{ A,}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 30 & -10 & 42 \\ -10 & 30 & 0 \\ 0 & -10 & -21 \end{vmatrix}}{D} \text{ A} = \frac{-12600}{21000} \text{ A} = -0,6 \text{ A}$$

Die Lösungen lauten $I_1 = 1,5 \text{ A}$, $I_2 = 0,3 \text{ A}$ und $I_3 = -0,6 \text{ A}$.

(c) **Leistung**

Allgemein gilt: $P = U \cdot I$.

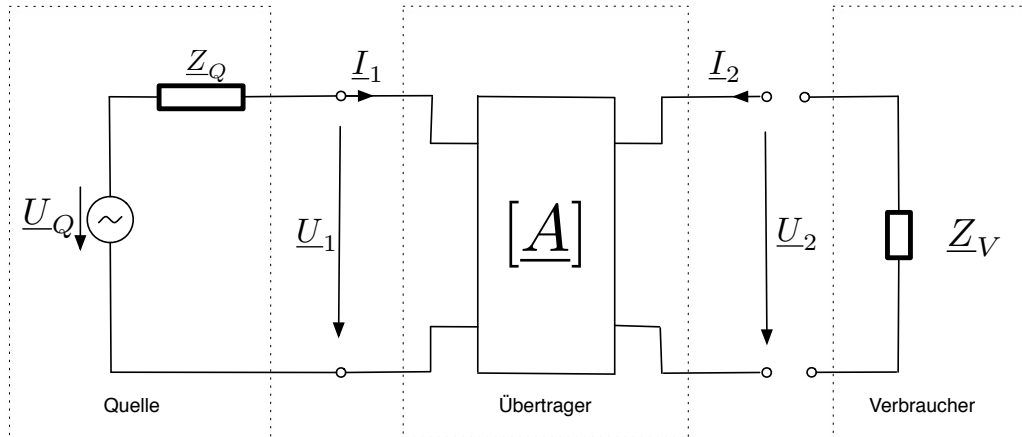
Im Falle einer Quelle ist die abgegebene Leistung positiv, wenn Strom und Spannung in entgegengesetzte Richtung zeigen. Dadurch ergibt sich:

$$P_1 = 21 \text{ V} \cdot 0,6 \text{ A} = 12,6 \text{ W}$$

$$P_2 = 42\text{V} \cdot 1,5\text{A} = 63\text{W}$$

Aufgabe 3**(22 Punkte)****Wechselstromlehre**

Gegeben seien eine Spannungsquelle $\underline{U}_Q$ mit Innenimpedanz $\underline{Z}_Q$, ein Übertrager mit Kettenmatrix $[\underline{A}]$ und eine Verbraucherimpedanz $\underline{Z}_V$. Die genannten Komponenten werden in der folgenden Art und Weise geschaltet:



- (a) Was gilt für die Einträge der Impedanzmatrix $[\underline{Z}]$ eines beliebigen Zweitors, wenn es reziprok sein soll? Gehen Sie von der folgenden allgemeinen Impedanzmatrix aus: (1 Punkt)

$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$$

- (b) Im Falle, dass die Kettenmatrix $[\underline{A}]$ des Zweitors bekannt ist, so lässt sich die Reziprozität über die Determinante der Matrix $[\underline{A}]$ zeigen. Für die Reziprozität gilt dann: (3 Punkte)

$$\det([\underline{A}]) = 1$$

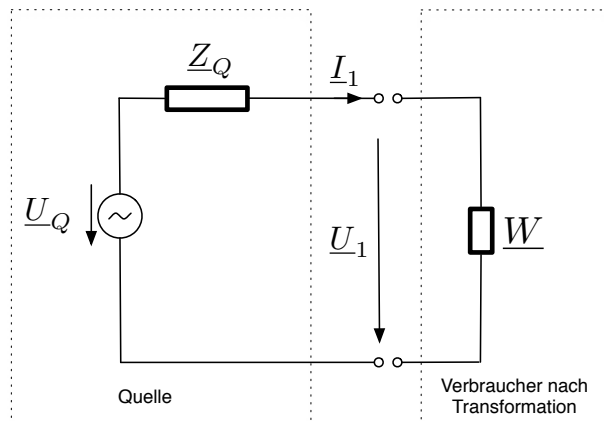
Beweisen Sie diese Aussage.

Hinweise:

- Die Kettenmatrix $[\underline{A}]$ und die Einträge der Impedanzmatrix $[\underline{Z}]$ hängen folgendermaßen zusammen:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\det([\underline{Z}])}{z_{21}} \\ \frac{1}{z_{21}} & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{bmatrix}$$

- (c) Nun wird die Verbraucherimpedanz $\underline{Z}_V$ ins Spiel gebracht. Um die resultierende Schaltung zu vereinfachen soll das System durch ein Ersatzschaltbild beschrieben werden: (3 Punkte)



Zeigen Sie, dass für die Ersatzimpedanz $\underline{W}$ das Folgende gilt:

$$\underline{W} = \frac{\underline{Z}_V \cdot \underline{a}_{11} + \underline{a}_{12}}{\underline{Z}_V \cdot \underline{a}_{21} + \underline{a}_{22}}$$

Hinweise :

Für die Kettenmatrix $[\underline{A}]$ gilt:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix}$$

- (d) Wie groß muss $\underline{Z}_V$ gewählt werden, damit $\underline{W}$ die maximale Wirkleistung bekommt? Geben Sie $\underline{Z}_V$ allgemein an. Dabei dürfen nur die Parameter der $\underline{A}$ -Matrix und die Impedanz der Quelle auftauchen. (5 Punkte)

Nun gelten die folgenden konkreten Bauteilwerte:

- $\underline{U}_Q = 10 \text{ V}$
- $\underline{Z}_Q = (1 + j) \Omega$
- $[\underline{A}] = \begin{bmatrix} -0.6 & 20j \Omega \\ -0.4j \text{ S} & -15 \end{bmatrix}$

- (e) Besteht der gegebene Übertrager aus linearen passiven Bauelementen? Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)
- (f) Wie groß muss die Verbraucherimpedanz $\underline{Z}_V$ gewählt werden, so dass beim gegebenen Zweitor die Leistungsanpassung vorliegt? (1 Punkt)
- (g) Wie gross ist die komplexe Leistung $\underline{S}_V$, die im Falle der Leistungsanpassung an $\underline{Z}_V$ übertragen wird? (6 Punkte)
- (h) Arbeitet der gegebene Übertrager verlustfrei? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

Lösung:

- (a) Ein Zweipol ist reziprok, wenn die Einträge der Impedanzmatrix Folgendes erfüllen: $\underline{z}_{12} = \underline{z}_{21}$

(b)

$$\begin{aligned}
 \det([\underline{A}]) &= \underline{a}_{11} \cdot \underline{a}_{22} - \underline{a}_{21} \cdot \underline{a}_{12} \\
 &= \frac{\underline{z}_{11}}{\underline{z}_{21}} \cdot \frac{\underline{z}_{22}}{\underline{z}_{21}} - \frac{1}{\underline{z}_{21}} \cdot \frac{\det([\underline{Z}])}{\underline{z}_{21}} \\
 &= \frac{\underline{z}_{11} \cdot \underline{z}_{22} - (\underline{z}_{11} \cdot \underline{z}_{22} - \underline{z}_{21} \cdot \underline{z}_{12})}{\underline{z}_{21}^2}
 \end{aligned}$$

Im Falle der Reziprozität gilt $\underline{z}_{12} = \underline{z}_{21}$ und somit

$$\det([\underline{A}]) = \frac{\underline{z}_{21}^2}{\underline{z}_{21}^2} = 1$$

(c) Zwei Gleichungen müssen zur Lösung dieser Aufgabe aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}
 1. \quad \underline{W} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2 \cdot \underline{a}_{11} - \underline{I}_2 \cdot \underline{a}_{12}}{\underline{U}_2 \cdot \underline{a}_{21} - \underline{I}_2 \cdot \underline{a}_{22}} \\
 2. \quad \underline{Z}_V &= \frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_2}
 \end{aligned}$$

Das Einsetzen von Gleichung 2. in Gleichung 1. liefert:

$$\begin{aligned}
 \underline{W} &= \frac{-\underline{Z}_V \cdot \underline{I}_2 \cdot \underline{a}_{11} - \underline{I}_2 \cdot \underline{a}_{12}}{-\underline{Z}_V \cdot \underline{I}_2 \cdot \underline{a}_{21} - \underline{I}_2 \cdot \underline{a}_{22}} \\
 &= \frac{\underline{Z}_V \cdot \underline{a}_{11} + \underline{a}_{12}}{\underline{Z}_V \cdot \underline{a}_{21} + \underline{a}_{22}}
 \end{aligned}$$

(d) Zwei Gleichungen müssen zur Lösung dieser Aufgabe aufgestellt werden:

$$\begin{aligned}
 1. \quad \underline{W} &= \underline{Z}_Q^* \text{ (Leistungsanpassung)} \\
 2. \quad \underline{W} &= \frac{\underline{Z}_V \cdot \underline{a}_{11} + \underline{a}_{12}}{\underline{Z}_V \cdot \underline{a}_{21} + \underline{a}_{22}}
 \end{aligned}$$

Das Einsetzen von Gleichung 2. in Gleichung 1. liefert:

$$\begin{aligned}
 \underline{Z}_Q^* &= \frac{\underline{Z}_V \cdot \underline{a}_{11} + \underline{a}_{12}}{\underline{Z}_V \cdot \underline{a}_{21} + \underline{a}_{22}} \\
 \underline{Z}_Q^* \cdot \underline{Z}_V \cdot \underline{a}_{21} + \underline{Z}_Q^* \cdot \underline{a}_{22} &= \underline{Z}_V \cdot \underline{a}_{11} + \underline{a}_{12} \\
 \underline{Z}_V (\underline{a}_{11} - \underline{a}_{21} \cdot \underline{Z}_Q^*) &= \underline{a}_{22} \cdot \underline{Z}_Q^* - \underline{a}_{12} \\
 \underline{Z}_V &= \frac{\underline{a}_{22} \cdot \underline{Z}_Q^* - \underline{a}_{12}}{\underline{a}_{11} - \underline{a}_{21} \cdot \underline{Z}_Q^*}
 \end{aligned}$$

(e) Die Reziprozität des Zweitorts ist hier gefragt. Für die Determinante der Kettenmatrix $[\underline{A}]$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \det([\underline{A}]) &= \begin{vmatrix} -0.6 & 20j \Omega \\ -0.4j S & -15 \end{vmatrix} \\
 &= ((-0.6) \cdot (-15)) - ((-0.4j S) \cdot (20j \Omega)) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Der Übertrager ist reziprok und besteht also aus linearen passiven Bauelementen.

- (f) Die Verbraucherimpedanz $\underline{Z}_V$, die zur Leistungsanpassung führt, wurde bereits in der Teilaufgabe d) bestimmt. Hier muss nur eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_V &= \frac{a_{22} \cdot \underline{Z}_Q^* - a_{12}}{a_{11} - a_{21} \cdot \underline{Z}_Q^*} \\ &= \frac{(-15) \cdot (1-j) \Omega - (20j \Omega)}{(-0.6) - (-0.4j S) \cdot (1-j) \Omega} \\ &= (5 + j35) \Omega\end{aligned}$$

- (g) Die komplexe Leistung am Verbraucher wird folgendermaßen ermittelt:

$$\underline{S}_V = \underline{U}_2 \cdot (-\underline{I}_2^*)$$

Weiterhin können $\underline{U}_2$ und $-\underline{I}_2^*$ über die inverse der Matrix $\underline{A}$ bestimmt werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} = \underline{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\underline{A})} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Die Spannung $\underline{U}_1$ und der Strom $\underline{I}_1$ können anhand des vereinfachten Ersatzschaltbildes bestimmt werden:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_Q}{\underline{Z}_Q + \underline{W}} = 5 A \quad (2)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \cdot \underline{W} = (5 - j5) V \quad (3)$$

Dadurch gilt für $\underline{U}_2$ und $-\underline{I}_2$:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} -15 & -j20 \Omega \\ j0.4 S & -0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (5 - j5) V \\ 5 A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-75 - j25) V \\ (-1 + j2) A \end{bmatrix} \quad (4)$$

Für die komplexe Leistung am Verbraucherimpedanz gilt dann:

$$\underline{S}_V = (-75 - j25) V \cdot (-1 + j2)^* A = (25 + j175) VA$$

- (h) Die komplexe Leistung an der Impedanz $\underline{W}$ beträgt:

$$\underline{S}_W = \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* = (25 - j25) VA$$

Die komplexe Leistung an der Verbraucherimpedanz beträgt:

$$\underline{S}_V = (25 + j175) VA$$

Die Wirkleistung an beiden Impedanzen ist gleich ($P_W = P_V$). Im Zweitor geht also keine Wirkleistung "verloren". Sie wird komplet an den Verbraucher übertragen. Deswegen arbeitet das Zweitor verlustfrei.

Aufgabe 4**(12 Punkte)****Bodediagramm****Im Folgenden sind alle Teilaufgaben separat lösbar.**

- (a) Geben Sie die allgemeinen Definitionen der Einheit Dezibel für ein Spannungsverhältnis $\frac{U_2}{U_1}$, ein Stromverhältnis $\frac{I_2}{I_1}$ und ein Leistungsverhältnis $\frac{P_2}{P_1}$ an. (3 Punkte)
- (b) Vervollständigen Sie die Tabelle in Diagramm 4.1. (8 Punkte)
- (c) Bei welcher Frequenz knickt die a_v -Kurve in der vierten Zeile der Tabelle im Diagramm 4.1 ab, wenn das dargestellte Bodediagramm auf 125 MHz normiert wurde? (1 Punkt)

Lösung:

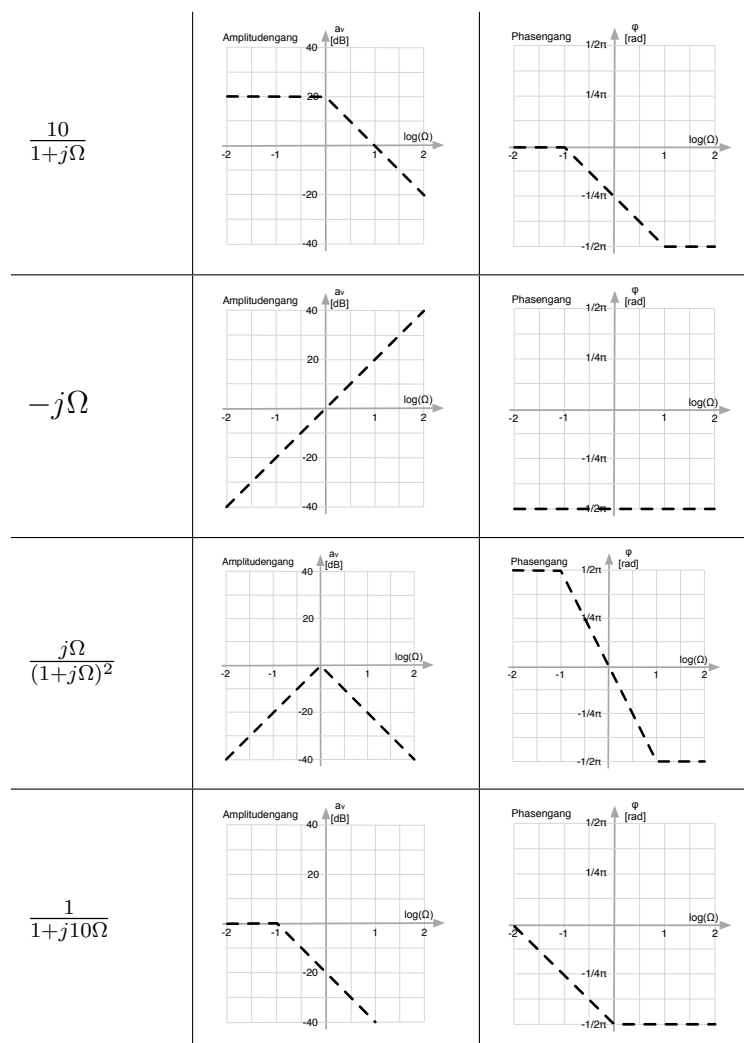
- (a) Die Einheit Dezibel gibt die folgenden Definitionen vor:

$$a_v = 20 \cdot \log \left| \frac{U_2}{U_1} \right|$$

$$a_i = 20 \cdot \log \left| \frac{I_2}{I_1} \right|$$

$$a_p = 10 \cdot \log \left| \frac{P_2}{P_1} \right|$$

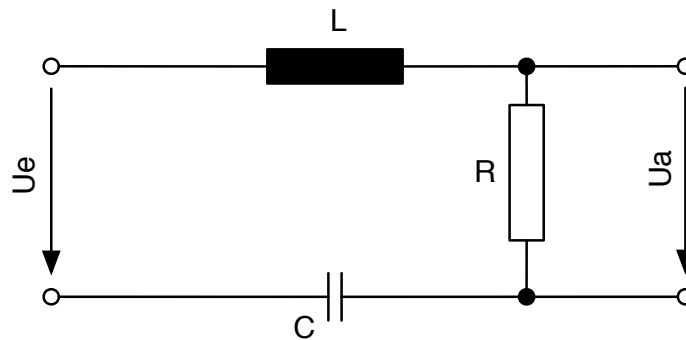
- (b) Vollständige Tabelle:



- (c) Die Kurve knickt bei einer Frequenz von 12.5 MHz .

Aufgabe 5**(12 Punkte)****Bodediagramm**

In dieser Aufgabe soll das Bodediagramm der folgenden Schaltung qualitativ gezeichnet werden.



- (a) Stellen Sie die Übertragungsfunktion der Schaltung auf. (2 Punkte)
 (b) Um welche Filterart handelt es sich hier? Begründen Sie ihre Antwort. (2 Punkte)
 (c) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion in normierter Form dies (2 Punkte)

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{j10\Omega}{1 + j10\Omega - \Omega^2}$$

ergibt. Verwenden Sie dazu die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} L &= 10 \mu H \\ C &= 100 nF \\ R &= 100 \Omega \end{aligned}$$

Normiert wird hier auf die Resonanzfrequenz.

- (d) Zeichnen Sie das **ganze** Bodediagramm ($\log(\Omega) = [-4; 4]$) in Diagramm 5.1 und 5.2. Da sich der Nenner nicht einfach zerlegen lässt, sollen hier Hilfwerte für die folgenden Punkte berechnet werden: (6 Punkte)

$$\Omega = 0.01, 0.1, 1, 10, 100$$

Runden Sie auf das nächste ganze Vielfache von 20 dB und 45°.

Lösung:

- (a) Die Übertragungsfunktion kann direkt aus der Spannungsteiler-Regel abgeleitet werden.

$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

- (b) Das Verhalten des Filters kann folgendermaßen beschrieben werden:

- Bei niedrigen Frequenzen sperrt der Kondensator. Der Spannungsabfall am Widerstand ist daher sehr klein.
- Bei hohen Frequenzen sperrt die Spule. Der Spannungsabfall am Widerstand ist ebenfalls sehr klein
- Bei mittleren Frequenzen sind die zwei Reaktanzen durchlässig. Die Spannung am Widerstand maximiert sich bei der Resonanzfrequenz.

Es handelt sich also um einen passiven Bandpass.

(c) Für die Normierung stellen wir die Gleichung nochmal um zu:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{j\omega CR}{j\omega CR - \omega^2 LC + 1}$$

Mit der Normierung $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ erhalten wir:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{j \frac{RC}{\sqrt{LC}} \Omega}{1 + j \frac{RC}{\sqrt{LC}} \Omega - \Omega^2}$$

Einsetzen der Werte liefert dann für den Ausdruck

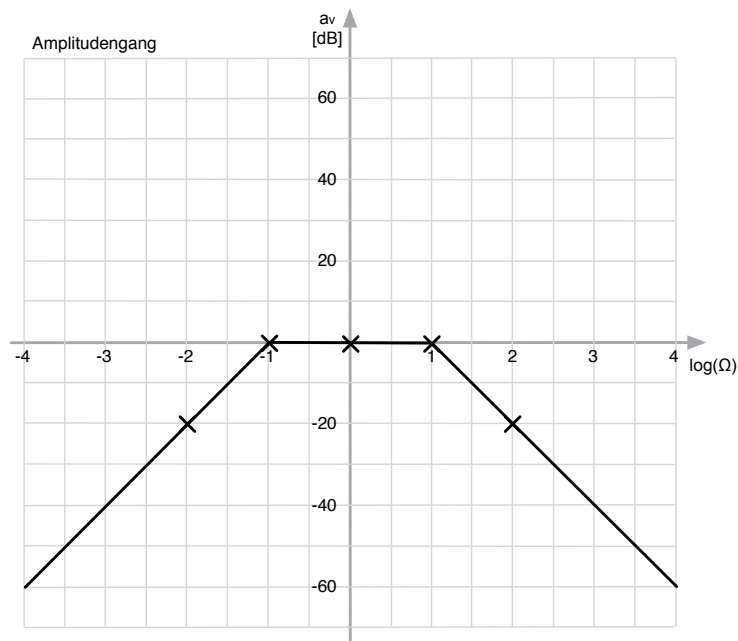
$$\frac{RC}{\sqrt{LC}} = \frac{100 \frac{V}{A} \cdot 100 \times 10^{-9} \frac{A \cdot s}{V}}{\sqrt{10 \times 10^{-6} \frac{V \cdot s}{A} \cdot 100 \times 10^{-9} \frac{A \cdot s}{V}}} = \frac{1 \times 10^{-5}}{(1 \times 10^{-12})^{1/2}} = 10.$$

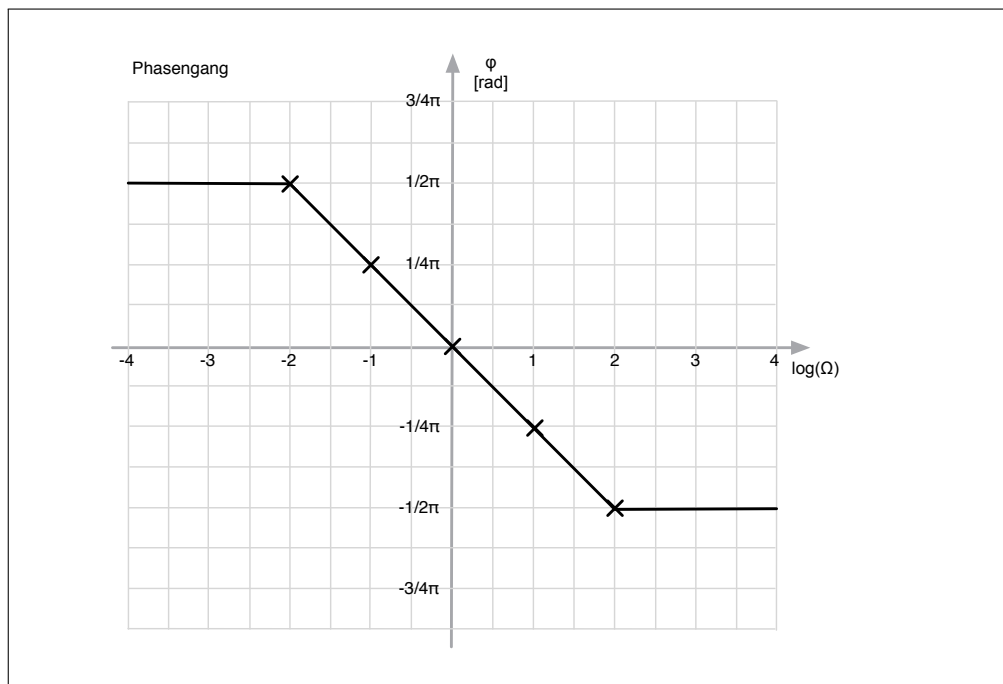
Und damit ist die normierte Übertragungsfunktion:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{j10\Omega}{1 + j10\Omega - \Omega^2}$$

(d) Die Punkte sind:

	Amplitude	Phase
$\Omega = 0.01$	$\approx -20 \text{ dB}$	$\approx 90^\circ$
$\Omega = 0.1$	$\approx 0 \text{ dB}$	$\approx 45^\circ$
$\Omega = 1$	$= 0 \text{ dB}$	$= 0^\circ$
$\Omega = 10$	$\approx 0 \text{ dB}$	$\approx -45^\circ$
$\Omega = 100$	$\approx -20 \text{ dB}$	$\approx -90^\circ$

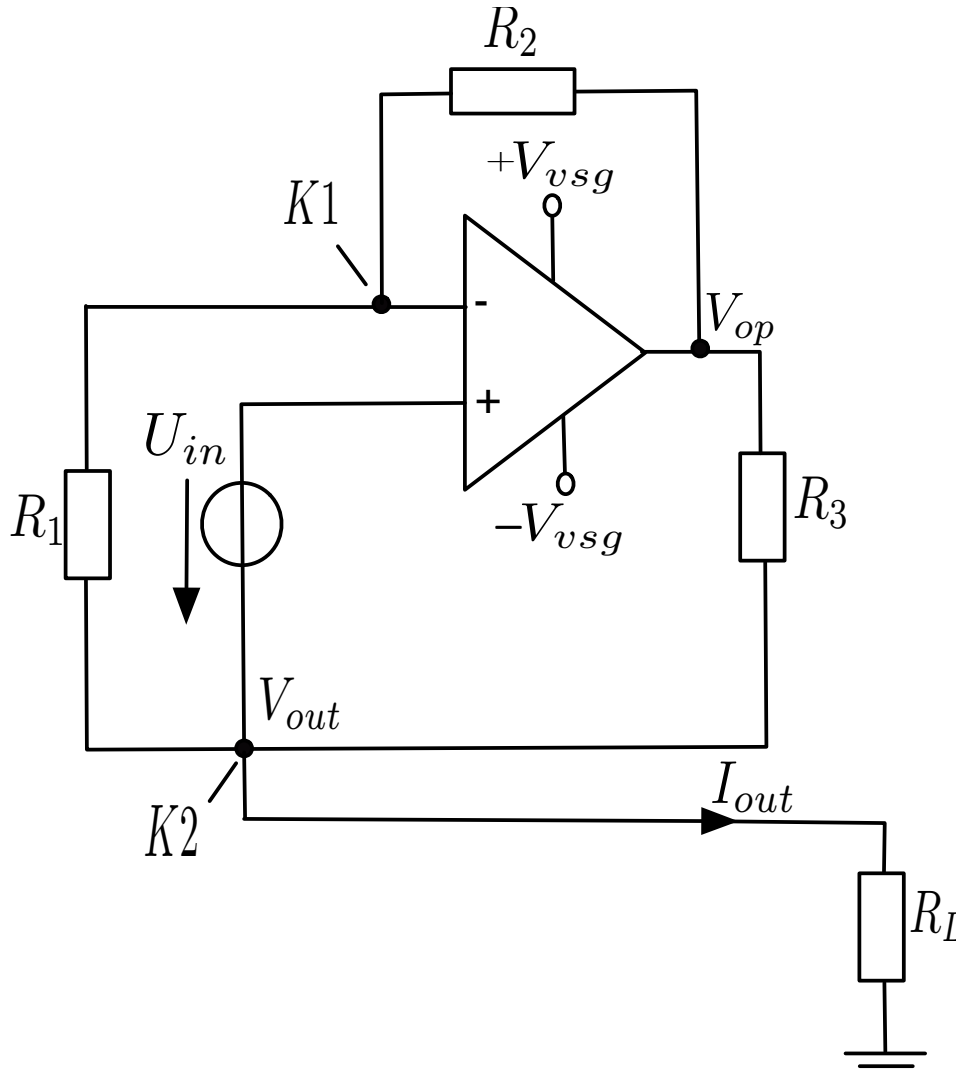




Aufgabe 6**(14 Punkte)****Operationsverstärker**

- (a) Geben Sie zwei der goldenen Regeln eines Operationsverstärkers an, wenn Gegenkopplung vorliegt. (2 Punkte)

Gegeben sei die folgende Schaltung. Diese Schaltung ist eine spannungsgesteuerte Konstantstromquelle.



- (b) Um den Weg zur Übertragungsfunktion der Schaltung zu erleichtern, sollen Sie zunächst die folgenden Gleichungen aufstellen. *Hinweis: Die Schaltung wird bei dominanter Gegenkopplung betrieben.* (5 Punkte)
- Eine Knotengleichung für den Knoten $K1$. Geben Sie die Gleichung in Abhängigkeit der vorhandenen Knotenpotentiale und Widerstände an.
 - Eine Knotengleichung für den Knoten $K2$. Geben Sie die Gleichung in Abhängigkeit der vorhandenen Knotenpotentiale und Widerstände an.
 - Eine Gleichung für das Potential V_n , welche nur von U_{in} , R_L und I_{out} abhängig ist.
- (c) Nun soll die Übertragungsfunktion der Schaltung hergeleitet werden. Gehen Sie wie folgt vor: (5 Punkte)
- Finden Sie zunächst eine Gleichung für V_{op} in Abhängigkeit von U_{in} und I_{out} . Die Knotenpotentiale dürfen in dieser Gleichung nicht mehr vorkommen.

- Verwenden Sie die aufgestellte Gleichung, um zu zeigen, dass für die Übertragungsfunktion der Schaltung der folgende Zusammenhang gilt:

$$\frac{I_{out}}{U_{in}} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 R_3}$$

- (d) Für die Eingangsspannung $U_{in} = 3V$ soll die Konstantstromquelle nun einen Strom von $I_{out} = 10mA$ liefern. Zur Dimensionierung der Schaltung verfügen Sie über die folgenden Widerstände: $R_i = \{1, 2, 3, \dots, 10\} k\Omega$. Die Versorgungsspannung der Schaltung beträgt $V_{vsg} = 12V$. (2 Punkte)
- Geben Sie eine mögliche Kombination für die Widerstände R_1 , R_2 und R_3 an, sodass die Schaltung den gewünschten Strom liefert ohne in die Sättigung zu gehen.

Hinweis: Geben Sie eine Kombination an, welche unter Verwendung von genau drei Widerständen erreicht werden kann!

Lösung:

- (a)
1. Tue einfach so, als ob $U_d = 0$
 2. Tue einfach so, als ob die Eingangsströme in den Operationsverstärker verschwinden.
 3. Wende unter Beachtung von 1. und 2. die Maschen- und Knotengleichungen wie gehabt an.

- (b)
- Die Knotengleichung für den Knoten $K1$ lautet:

$$\frac{V_{out} - V_n}{R_1} = \frac{V_n - V_{op}}{R_2} \quad (5)$$

- Die Knotengleichung für den Knoten $K2$ lautet:

$$\frac{V_{op} - V_{out}}{R_3} = \frac{V_{out}}{R_L} + \frac{V_{out} - V_n}{R_1} \quad (6)$$

- Mit $V_{out} = I_{out} R_L$ gilt für das Knotenpotential V_n Folgendes:

$$V_n = U_{in} + I_{out} \cdot R_L \quad (7)$$

- (c)
- Setzt man die Gleichung (3) in die Gleichung (1) ein, so gilt für V_{op}

$$\frac{I_{out} R_L - U_{in} - I_{out} R_L}{R_1} = \frac{U_{in} + I_{out} R_L - V_{op}}{R_2} \quad (8)$$

$$V_{op} = U_{in} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + I_{out} R_L \quad (9)$$

- Nun setzt man die Gleichungen (3) und (5) in die Gleichung (2) ein. Dabei sollte man $V_{out} = I_{out} R_L$ nicht vergessen.

$$\frac{1}{R_3} \left(U_{in} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + I_{out} R_L \right) - \frac{I_{out} R_L}{R_3} = I_{out} - \frac{U_{in}}{R_1} \quad (10)$$

$$\frac{I_{out}}{U_{in}} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 R_3} \quad (11)$$

- (d) • Um den geforderten Strom zu erzielen, muss für die Übertragungsfunktion Folgendes gelten:

$$\frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 R_3} = \frac{10mA}{3V} = \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{k\Omega}$$

Mögliche Kombinationen für die Widerstände sind dann:

$$R_1 = 3 k\Omega$$

$$R_2 = 6 k\Omega$$

$$R_3 = 1 k\Omega$$

oder

$$R_1 = 1 k\Omega$$

$$R_2 = 6 k\Omega$$

$$R_3 = 3 k\Omega$$