Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel Übungsleiter: Dipl.-Ing. Gustavo Lenis

---

Klausur

06. April 2016
Beginn: 14:00 Uhr

Familienname:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

AUFKLEBER

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Die Klausur muss selbständig bearbeitet werden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein! Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare! Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

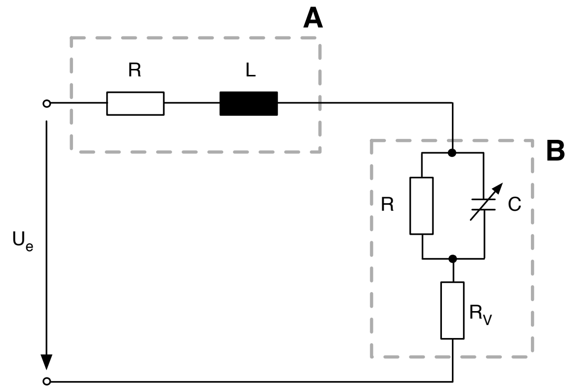
Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	20	
2	8	
3	6	
4	22	
5	25	
6	13	
Gesamt:	94	

Note:________

Aufgabe 1 (20 Punkte)
Ortskurve

Gegeben ist folgende Schaltung:



Ein Verbraucher (Schaltungsteil B) ist über eine lange reale, verlustbehaftete Leitung (Schaltungsteil A) an eine Spannungsquelle U_e angeschlossen. Der Verbraucher besteht aus dem eigentlichen rein reellen Verbraucher R_V und einer vorgeschalteten Kapazität C. Dieser Kondensator C hat die Funktion die Blindleistung, die durch die induktive lange Leitung hervorgerufen wird, zu kompensieren.

(a) Skizzieren Sie zunächst die Ortskurven (4 Punkte)

- **der Impedanz $\mathbf{Z}_B(\omega)$** aus Schaltungsteil B
- **der Admittanz $\mathbf{Y}_A(\omega)$** aus Schaltungsteil A

Markieren Sie dabei die Punkte $\omega = 0$ und $\omega \to \infty$. Skizzieren Sie die Ortskurven der Impedanz in das Diagramm 1.1 und die der Admittanz in Diagramm 1.2.
Hinweis: Beschriften Sie die X-Achse in Abhängigkeit von den Parametern R und R_V.

(b) Leiten Sie die Impedanz $Z_{ges}(\omega)$ der gesamten Schaltung her und geben Sie die Impedanz getrennt nach Real- und Imaginärteil an. (3 Punkte)

Es sollen nun die Bauteile der Schaltung dimensioniert werden. Die Induktivität L ist bereits bekannt L = 1 mH. Des weiteren ist die folgende Impedanz-Ortskurve der Schaltung bekannt:

(c) Beschriften Sie die Ortskurve mit den Frequenzen $\omega = 0$ und $\omega \to \infty$ im (2 Punkte)

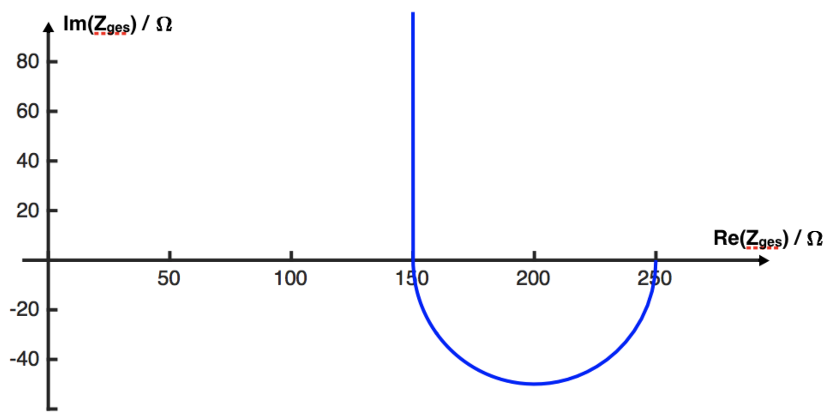


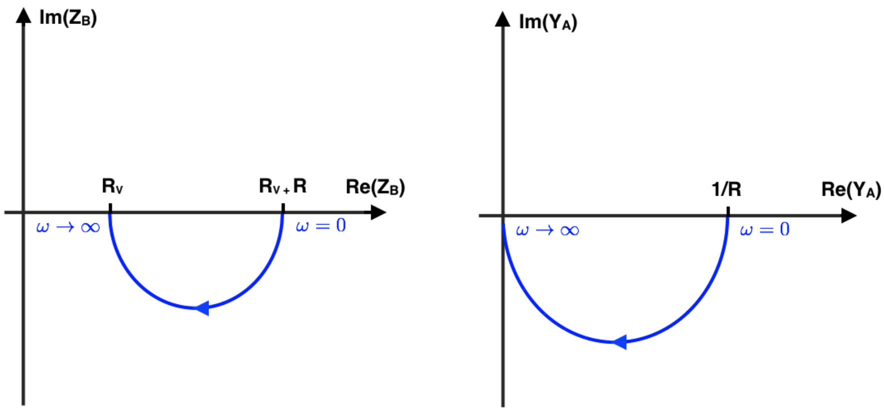
Diagramm 1.3 in den Lösungsblättern. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(d) Bestimmen Sie die Werte für die Widerstände R und R_V. Erklären Sie Ihre Vorgehensweise. (4 Punkte)
Hinweis: Überlegen Sie sich hierfür welche Werte die Ortskurve bei den Frequenzen $\omega = 0$ und $\omega \to \infty$ annimmt.

(e) Bestimmen Sie nun die Kapazität C, sodass die Resonanzfrequenz $f_0 = 100\,\text{Hz}$ eingestellt wird. Achten Sie ebenfalls darauf, dass der bestimmte Wert für die Kapazität C zu der gegebenen Ortskurve passt. Markieren Sie diese Impedanz $Z_{ges}(\omega_0 = 2\pi f_0)$ der Ortskurve im Diagramm 1.3 in den Lösungsblättern. (7 Punkte)
Hinweis: Um Rechenfehler zu vermeiden, bestimmen Sie die Kapazität als Formel in Abhängingkeit von ω_0, L und R und setzen Sie die Werte erst ganz zum Schluss ein.

Lösung:

(a) Die Impedanz-Ortskurve der Teilschaltung B ist in der linken Abbildung dargestellt, die Admittanz-Ortskurve der Teilschaltung A in der rechten Abbildung.



(b) Die Impedanz der gesamten Schaltung setzt sich aus der Serienschaltung der Impedanzen $Z_A(\omega)$ und $Z_B(\omega)$ der beiden Teilschaltungen A und B zusammen. Daher:

$$Z_{ges}(\omega) = Z_A(\omega) + Z_B(\omega) \tag{1}$$

Die Impedanz $Z_A(\omega)$ ist eine Serienschaltung aus dem Widerstand R und der Induktivität L:

$$Z_A(\omega) = R + j\omega L \tag{2}$$

Die Impedanz $Z_B(\omega)$ kann wie folgt bestimmt werden:

$$Z_B(\omega) = R \,||\, \frac{1}{j\omega C} + R_V \tag{3}$$

$$= \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} + R_V \tag{4}$$

Multipliziert man nun den Bruch mit $\frac{j\omega C}{j\omega C}$ erhält man die folgende Gleichung:

$$Z_B(\omega) = \frac{R}{1 + j\omega CR} + R_V \tag{5}$$

Für die Impedanz der gesamten Schaltung ergibt sich aus den Gleichungen (1), (2) und (5) die folgende Gleichung:

$$Z_{ges}(\omega) = R + j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR} + R_V \tag{6}$$

Um nun die Impedanz nach Real- und Imaginärteil zu trennen, muss der Bruch komplex konjugiert erweitert werden mit $\frac{1-j\omega C}{1-j\omega C}$:

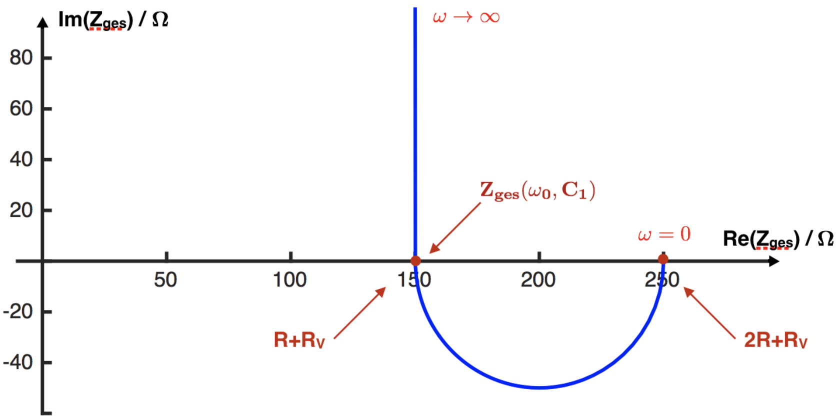
$$Z_{ges}(\omega) = R + j\omega L + \frac{R - j\omega CR^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} + R_V \tag{7}$$

Daraus ergeben sich der Real- und Imaginärteil der Impedanz Z_{ges} zu:

$$Re\{Z_B(\omega)\} = R + R_V + \frac{R}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \tag{8}$$

$$Im\{Z_B(\omega)\} = \omega \left(L - \frac{CR^2}{1 + \omega^2 C^2 R^2} \right) \tag{9}$$

(c) Die beschriftete Ortskurve ist im folgenden Diagramm dargestellt:



Begründung:

<u>Fall $\omega = 0$:</u>

Der Kondensator C verhält sich wie eine Unterbrechung und die Induktivität wie ein Kurzschluss. Das ergibt für die Impedanz:

$$Z_{ges}(\omega) = 2R + R_V \tag{10}$$

Die Impedanz ist daher rein reell. Es folgt: $\text{Z}_{ges}(\omega = 0) = 250\,\Omega$.

<u>Fall $\omega \to \infty$:</u>

Für $\omega \to \infty$ verhält sich der Kondensator C wie ein Kurzschluss und die Induktivität wie eine Unterbrechung. Daraus folgt:

$$\lim_{\omega \to \infty} Re\{Z_{ges}(\omega)\} = R + R_V \tag{11}$$

$$\lim_{\omega \to \infty} Im\{Z_{ges}(\omega)\} \to +\infty \tag{12}$$

(d) Mit den Gleichungen (10) und (11) und der Ortskurve ergeben sich die Gleichungen:

$$2R + R_V = 250 \tag{13}$$

$$R + R_V = 150 \tag{14}$$

Daraus folgt durch einfache Umformung: $\text{R}_V = 50\,\Omega$ und $\text{R} = 100\,\Omega$.

(e) Damit die Kapazität die Spule kompensiert muss $\mathrm{Im}\{Z_{ges}(\omega_0 = 2\pi 100\ 1/\mathrm{s})\} = 0$ gelten. Man erhält also die Gleichung:

$$\omega_0 \big(L - \frac{CR^2}{1 + \omega_0^2 C^2 R^2}\big) = 0 \tag{15}$$

Aus dieser Gleichung erhält man die quadratische Gleichung:

$$(\omega_0^2 R^2 L) \cdot C^2 - R^2 \cdot C + L = 0 \tag{16}$$

Nun kann man diese Gleichung lösen und erhält die folgende Gleichung:

$$C_{1/2} = \frac{R^2}{2\omega_0^2 R^2 L} \pm \sqrt{\frac{R^4 - 4\omega_0^2 R^2 L^2}{4\omega_0^4 R^4 L^2}} \tag{17}$$

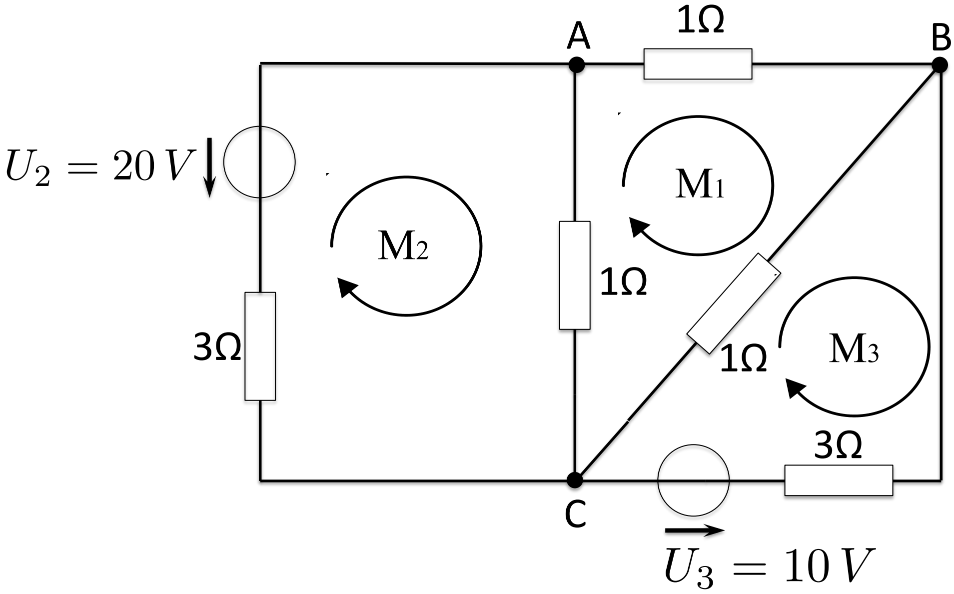
Durch Umformen kommt man schlussendlich auf die folgende Gleichung:

$$C_{1/2} = \frac{1}{2\omega_0^2 L} \pm \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{1}{4\omega_0^2 L^2} - \frac{1}{R^2}} \tag{18}$$

Durch Einsetzen kann man letztendlich zwei Kapaziäten bestimmen: $C_1 = 2,5\,m\mathrm{F}$ und $C_2 = 100\,n\mathrm{F}$.
Um herauszufinden, welche Kapazität zur obigen Ortskurve gehört setzt man den Kapazitätswert in den Realteil von Z_{ges} ein. Es ergibt sich $\mathrm{Re}\{Z_{ges}(\omega_0, C_1)\} = 150.004\,\Omega$ und $\mathrm{Re}\{Z_{ges}(\omega_0, C_2)\} = 249,996\,\Omega$. Daraus folgt, dass C_1 die gesuchte Kapazität ist. Die Impedanz ist in das Diagramm oben eingezeichnet.

Aufgabe 2 **(8 Punkte)**
Netzwerk

Gegeben sei die folgende Schaltung mit 3 Maschen:



(a) Bestimmen Sie mit dem formalisierten Maschenstromverfahren das Gleichungssystem für die Maschenströme I_{M1}, I_{M2} und I_{M3}. Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel. *Hinweis: Geben Sie jeden Zwischenschritt an und achten Sie auf eine verständliche Beschriftung.* (8 Punkte)

Lösung:

(a) Für das formalisierte Maschenstromverfahren gilt:

$$\begin{bmatrix} 1+1+1 & -1 & -1 \\ -1 & 3+1 & 0 \\ -1 & 0 & 3+1 \end{bmatrix} \Omega \cdot \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Omega \cdot \begin{bmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ V.}$$

Zunächst wird die Determinante der Matrix $\underline{R}$ bestimmt.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Omega^3 = [(3)(4)(4)\text{-}(-1)(4)(-1)\text{-}(-1)(-1)(4)]\,\Omega^3 = 40\,\Omega^3$$

Mit der Cramerschen Regel wird das LGS gelöst.

$$I_{M1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 20 & 4 & 0 \\ 10 & 0 & 4 \end{vmatrix} V\Omega^2}{D} = \frac{[-(10)(4)(-1)-(-1)(20)(4)]\,V\Omega^2}{D} = \frac{120}{40}\,\text{A} = 3\,\text{A}$$

$$I_{M2} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 20 & 0 \\ -1 & 10 & 4 \end{vmatrix} V\Omega^2}{D} = \frac{230}{40}\,\mathrm{A} = 5{,}75\,\mathrm{A}$$

$$I_{M3} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 20 \\ -1 & 0 & 10 \end{vmatrix} V\Omega^2}{D} = \frac{130}{40}\,\mathrm{A} = 3{,}25\,\mathrm{A}$$

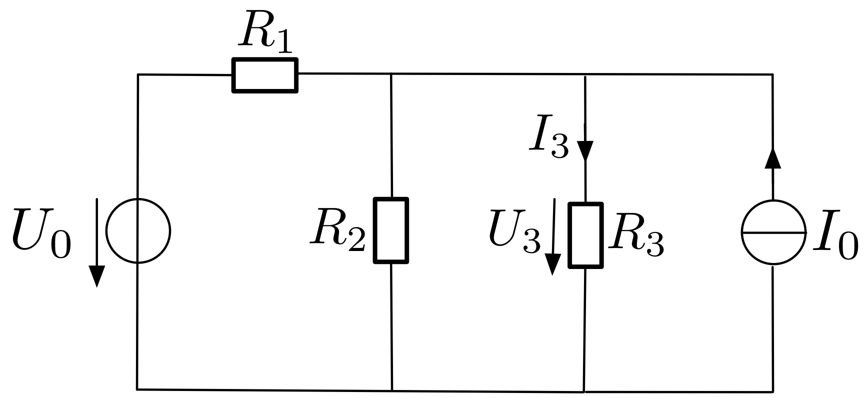
Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Netzwerk

(a) Bestimmen Sie den Strom I_3 und die Spannung U_3. Verwenden Sie das Überlagerungsverfahren und skizzieren Sie die Schaltungen der 2 Teillösungen. Es gelten die folgenden Werte: (6 Punkte)

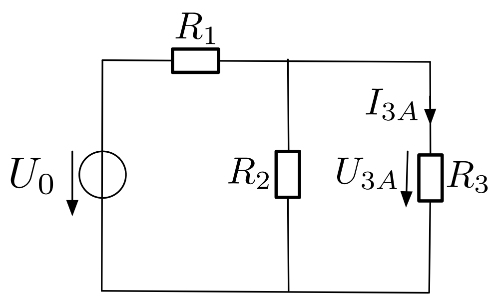
- $R_1 = 2\,\Omega$
- $R_2 = 6\,\Omega$
- $R_3 = 3\,\Omega$
- $I_0 = 3\,A$
- $U_0 = 12\,V$

Hinweis: Rechnen Sie allgemein und setzen Sie die Werte am Ende ein.



Lösung:

(a) Bei der Teillösung A wird die Stromquelle "ausgeschaltet" (durch einen Leerlauf ersetzt):



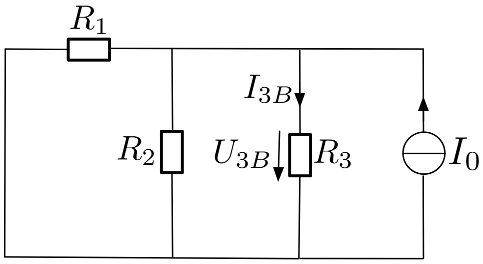
Die Spannung U_{3A} kann über einen Spannungsteiler berechnet werden:

$$\begin{aligned} U_{3A} &= U_0 \cdot \frac{(R_2 \parallel R_3)}{R_1 + (R_2 \parallel R_3)} \\ &= U_0 \cdot \frac{\frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} \\ &= U_0 \cdot \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot (R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3} \\ &= 6\,V \end{aligned}$$

Für den Strom I_{3A} gilt dann:

$$\begin{aligned} I_{3A} &= \frac{U_{3A}}{R_3} = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 \cdot (R_2 + R_3) + R_2 \cdot R_3} \\ &= 2\,A \end{aligned}$$

Bei der Teillösung B wird die Spannungsquelle "ausgeschaltet" (durch einen Kurzschluss ersetzt):



Der Strom I_{3B} kann über einen Stromteiler berechnet werden:

$$\begin{aligned} I_{3B} &= I_0 \cdot \frac{\frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = I_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\ I_{3B} &= 1\,A \end{aligned}$$

Für den Strom I_{3B} gilt dann:

$$\begin{aligned} U_{3B} &= I_{3B} \cdot R_3 = I_0 \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \\ U_{3B} &= 3\,V \end{aligned}$$

Die Spannung U_3 und der Strom I_3 ergeben sich dann als Summe der Teilgrößen:

$$\begin{aligned} I_3 &= I_{3A} + I_{3B} = 3\,A \\ U_3 &= U_{3A} + U_{3B} = 9\,V \end{aligned}$$

Aufgabe 4 **(22 Punkte)**

Wechselstromlehre

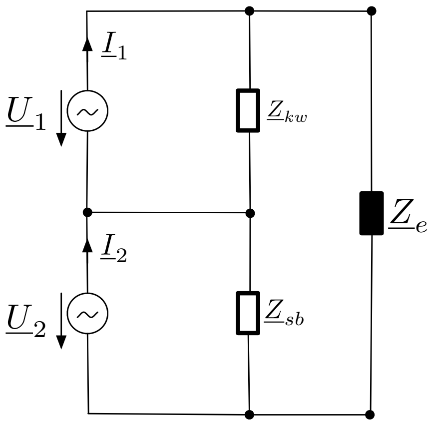
Eine Expedition des KIT soll das Magnetfeld der Erde am Nordpol untersuchen. Dazu muss dort eine kleine Hütte mit Experimentierraum gebaut werden. Als einziger Elektrotechniker im Team bekommen Sie die Aufgabe, die Versorgung der elektrischen Energie der Hütte zu entwerfen. In der Hütte befinden sich die folgenden Räume:

- ein Raum für die Küche und das Wohnzimmer. Dieser Raum verbraucht die folgende komplexe Leistung:
  $\underline{S}_{kw} = (3800 - j1088)\, VA$

- ein Raum für das Schlafzimmer und das Bad. Dieser Raum verbraucht die folgende komplexe Leistung:
  $|\underline{S}_{sb}| = 1500\, VA$ bei einem induktiven Leistungsfaktor von $\cos(\phi) = 0.8$

- ein Experimentierraum, in dem sich eine große Spule befindet. Für die Reaktanz der Spule gilt:
  $Xe = 800\,\Omega$

Auf Grund des einfachen Transports entscheiden Sie sich für Dieselgeneratoren. Wegen des großen elektrischen Verbrauchs benötigen Sie zwei Generatoren. Für die Energieversorgung entwerfen Sie den folgenden Schaltplan:



Für die Spannung der 2 Generatoren gilt:

- $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = 240\, V$ (Effektivwerte)

(a) Bestimmen Sie die Admittanzen der 3 Räume ($\underline{Y}_{kw}$, $\underline{Y}_{sb}$ und $\underline{Y}_e$) und geben Sie diese zahlenmäßig getrennt nach Real- und Imaginärteil an. (5 Punkte)

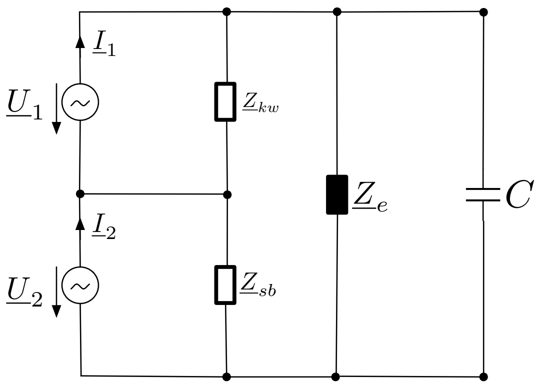
(b) Bestimmen Sie die Ströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ (Effektivwerte), die von jedem Generator erzeugt werden. Zeigen Sie, dass für diese Ströme Folgendes gilt: (4 Punkte)

$$\underline{I}_1 = \left(\frac{95}{6} + j\frac{59}{15}\right) A$$
$$\underline{I}_2 = \left(5 - j\frac{87}{20}\right) A$$

Hinweis: Rechnen Sie zuerst allgemein und setzen Sie am Ende die Werte ein.

(c) Bestimmen Sie die von jedem Generator abgegebenen komplexen Leistungen $\underline{S}_1$ und $\underline{S}_2$. (2 Punkte)

(d) Die in der Hütte umgesetzte gesamte Blindleistung Q_{ges} ist zu groß und führt zu einer instabilen Erzeugung der elektrischen Energie. Deswegen soll die Blindleistung in der Hütte vollständig kompensiert werden. Dafür entwerfen Sie den folgenden modifizierten Schaltplan: (3 Punkte)



Wie groß muss der Blindleitwert ωC des Kondensators sein, wenn die gesamte Blindleistung in der Hütte kompensiert werden muss?

(e) Da Sie am Nordpol leider keine Kondensatoren kaufen können, entscheiden Sie sich lieber, die Kompensation der Blindleistung über einen anderen Weg zu realisieren. Bei der Spannung des zweiten Generators soll eine Phasenverschiebung relativ zur Spannung des ersten Generators eingestellt werden. Es gilt nun: (8 Punkte)

- $\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cdot e^{j\theta}$

Wie groß muss der Winkel θ sein, so dass die gesamte Blindleistung in der Hütte verschwindet?

Lösung:

(a) Für die in einer beliebigen Admittanz $\underline{Y}$ umgesetzte komplexe Leistung gilt im Allgemeinen:

$$\underline{S}_Y = \underline{U}_Y \cdot \underline{I}_Y^* = \underline{U}_Y \cdot (\underline{U}_Y \cdot \underline{Y})^* = |\underline{U}_Y|^2 \cdot \underline{Y}^*$$

Die komplexe Leistung $\underline{S}_Y$ kann auch in der Eulerschen und in der kartesischen Darstellung angegeben werden:

$$\underline{S}_Y = |\underline{S}_Y| \cdot e^{j\phi} = |\underline{S}_Y| \cdot (cos(\phi) + j \cdot sin(\phi)) = P_Y + jQ_Y$$

Somit gilt für die Admittanzen in der Hütte:

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_{kw} &= \left(\frac{\underline{S}_{kw}}{|\underline{U}_1|^2}\right)^* = \left(\frac{19}{288} + j\frac{17}{900}\right) S \\
\underline{Y}_{sb} &= \left(\frac{\underline{S}_{sb}}{|\underline{U}_2|^2}\right)^* = \left(\frac{1}{48} - j\frac{1}{64}\right) S \\
\underline{Y}_e &= \frac{1}{jX_e} = j\frac{-1}{800} S
\end{aligned}$$

(b) Die Ströme lassen sich jeweils über eine Knotengleichung bestimmen. Für den Strom $\underline{I}_1$ gilt:

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{U}_1 \cdot \underline{Y}_{kw} + (\underline{U}_1 + \underline{U}_2) \cdot \underline{Y}_e \\ &= \left(\frac{95}{6} + j\frac{59}{15}\right) A\end{aligned}$$

Auf analoge Art und Weise gilt für den Strom $\underline{I}_2$:

$$\begin{aligned}\underline{I}_2 &= \underline{U}_2 \cdot \underline{Y}_{sb} + (\underline{U}_1 + \underline{U}_2) \cdot \underline{Y}_e \\ &= \left(5 - j\frac{87}{20}\right) A\end{aligned}$$

(c) Für die Generatorleistungen gilt dann:

$$\begin{aligned}\underline{S}_1 &= \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* = (3800 - j944)\, VA \\ \underline{S}_2 &= \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^* = (1200 + j1044)\, VA\end{aligned}$$

(d) Bei der vollständigen Kompensation muss der Kondensator so viel kapazitive Blindleistung aufnehmen, wie in der Hütte induktive Blindleistung erzeugt wird. Somit folgt für den Blindleitwert des Kondensators Folgendes:

$$\begin{aligned}Q_{ges} &= Im\{\underline{S}_1 + \underline{S}_2\} + Q_C \overset{!}{=} 0 \\ & \quad Im\{\underline{S}_1 + \underline{S}_2\} - |\underline{U}_1 + \underline{U}_2|^2 \cdot \omega C = 0 \\ \omega C &= \frac{Im\{\underline{S}_1 + \underline{S}_2\}}{|\underline{U}_1 + \underline{U}_2|^2} \\ \omega C &= 434.03\, \mu S\end{aligned}$$

(e) Für eine verschwindende Blindleistung bei der angepassten Generatorspannung muss Folgendes gelten:

$$\begin{aligned}Q_{ges} &= Q_{kw} + Q_{sb} + Q_e \overset{!}{=} 0 \\ &= |\underline{U}_1|^2 \cdot B_{kw} + |\underline{U}_2|^2 \cdot B_{sb} + |\underline{U}_1 + \underline{U}_2|^2 \cdot B_e = 0\end{aligned}$$

An dieser Stelle ist mit B der Imaginärteil der jeweiligen Admittanzen gemeint: $\underline{Y} = G + jB$. Weiterhin gilt auch:

$$|\underline{U}_2| = |\underline{U}_1 \cdot e^{j\theta}| = |\underline{U}_1|$$

Somit gilt für die gesamte Blindleistung:

$$\begin{aligned}Q_{ges} &= |\underline{U}_1|^2 \cdot B_{kw} + |\underline{U}_2|^2 \cdot B_{sb} + |\underline{U}_1(1 + e^{j\theta})|^2 \cdot B_e = 0 \\ &= |\underline{U}_1|^2 (B_{kw} + B_{sb} + [(1 + \cos(\theta))^2 + \sin^2(\theta)] \cdot B_e) = 0 \\ &= |\underline{U}_1|^2 (B_{kw} + B_{sb} + 2 \cdot (1 + \cos(\theta)) \cdot B_e) = 0\end{aligned}$$

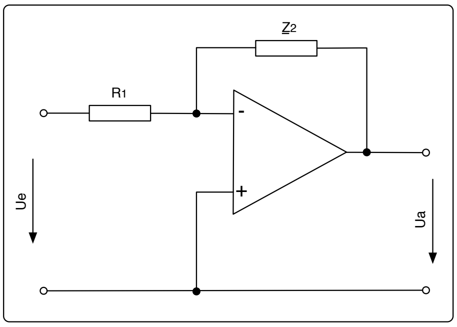
Dadurch gilt für den Winkel θ:

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= -1 - \left(\frac{B_{sw} + B_{sb}}{2B_e}\right) \\
\theta &= \arccos\left(-1 - \frac{B_{sw} + B_{sb}}{2B_e}\right) \\
\theta &= 72.21^o
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 **(25 Punkte)**

Bodediagramm

Gegeben ist diese Schaltung:



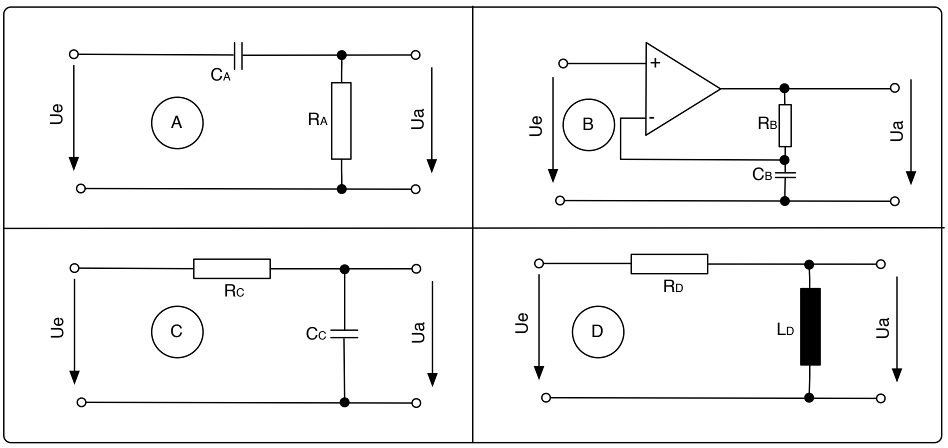
(a) Ersetzen Sie die komplexe Impedanz $\underline{Z}_2$ durch einen Kondensator C_2 und einen reellen Widerstand R_2 so, dass ein aktiver invertierender Tiefpass entsteht. Wie lautet die Übertragungsfunktion G_{TP} des Tiefpasses? (3 Punkte)

(b) Zeichnen Sie das neue Ersatzschaltbild. (1 Punkt)

(c) Normieren Sie die Übertragungsfunktion G_{TP} der Schaltung auf $\omega_n = 100 \times 10^3\, s^{-1}$. Welche Werte müssen Sie bei einer Kapazität $C = 500\, nF$ für die Widerstände wählen, damit die Knickfrequenz bei $\omega_0 = 10 \times 10^3\, s^{-1}$ liegt und eine Verstärkung im Durchlassbereich von $0\, dB$ herrscht? **Achtung: Die Normierungsfrequenz ist hier nicht die Knickfrequenz!** (4 Punkte)

(d) Zeichnen Sie den Amplitudengang des Bodediagramms gestrichelt in Diagramm 5.1 und den Phasengang, ebenfalls gestrichelt in Diagramm 5.2 ein. (4 Punkte)

Nun soll diese Schaltung zu einer Bandsperre ausgebaut werden. Verwenden Sie dazu zwei der folgenden vier Zweitore. Die entstehende Bandsperre soll Kreisfrequenzen zwischen $10 \times 10^3\, s^{-1}$ und $1 \times 10^6\, s^{-1}$ dämpfen. Außerhalb dieses Bereichs soll eine Verstärkung von $0\, dB$ herrschen. **Achtung: Eines der Zweitore muss doppelt verwendet werden!**



(e) Zeichnen Sie zunächst den Amplitudengang des Bodediagramms der Übertragungsfunktion G_{BS} der Bandsperre in Diagramm 5.1 und beschriften Sie es. Achten Sie darauf, dass die Kurven unterscheidbar bleiben. (1 Punkt)

(f) Welche der Zweitore müssen für den Bau einer Bandsperre verwendet werden? Geben Sie die normierten Übertragungsfunktionen der gewählten Zweitore an. Gehen Sie von der gleichen Normierungsfrequenz wie oben aus. (4 Punkte)

(g) Zeichnen Sie die Bodediagramme der gewählten Zweitore ebenfalls in Diagramm 5.1 sowie 5.2 ein. Die Bodediagramme müssen unterscheidbar sein. Beschriften Sie die Kurven ausreichend. (4 Punkte)

(h) Welche Schaltung kann zum Entkoppeln solcher Zweitore verwendet werden? Benennen und skizzieren Sie diese. (1 Punkt)

(i) Zeichnen Sie nun den Phasengang des Bodediagramms der gesamten Bandsperre G_{BS} unter der Annahme, dass die Zweitore entkoppelt wurden in 5.2 ein. Achten Sie darauf, dass auch diese Kurve von den schon gezeichneten unterscheidbar ist und beschriften Sie diese Kurve ebenfalls. (1 Punkt)

(j) Geben Sie die normierte Übertragungsfunktion der entkoppelt verketteten Bandsperre an. (2 Punkte)

Lösung:

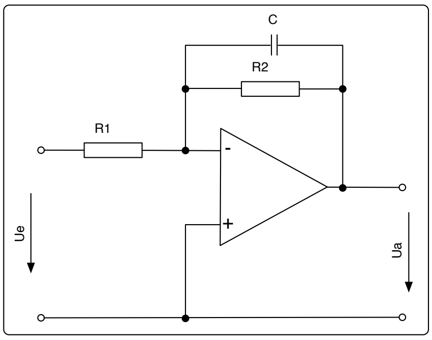
(a) Die komplexe Impedanz muss durch

$$\underline{Z}_2 = R_2 || Z_C = \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}$$

ersetzt werden. Damit lautet die Übertragungsfunktion:

$$\frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C}$$

(b) Das Ersatzschaltbild sieht so aus:



(c) Damit keine Verstärkung herrscht muss $R_2 = R_1$ sein. Würden wir auf eine Kreisfrequenz von $\omega_0 = 10 \times 10^3\, s^{-1}$ normieren, dann wäre:

$$j\omega R_2 C = j\tilde{\Omega} \quad \text{mit} \quad \tilde{\Omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Jetzt ersetzen wir ω auf der linken Seite

$$j\tilde{\Omega} \cdot \omega_0 R_2 C = j\tilde{\Omega}$$

Damit die Gleichung stimmt muss

$$\omega_0 R_2 C = 1$$

sein. Daraus folgt

$$R_2 = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1}{10 \times 10^3 s^{-1} \cdot 500 \times 10^{-9} \frac{As}{V}} = \frac{1}{5000 \times 10^{-6} \frac{A}{V}}$$
$$R_2 = R_1 = 200\,\Omega$$

Die eigentliche normierte Übertragungsfunktion erhalten wir mit

$$\frac{\omega_n}{\omega_0} = \frac{100 \times 10^3\, s^{-1}}{10 \times 10^3\, s^{-1}} = 10$$

daraus folgt

$$\omega_0 \tilde{\Omega} = \omega_n \Omega \rightarrow \tilde{\Omega} = 10\Omega$$

und damit

$$\frac{U_a}{U_e} = -\frac{1}{1 + j10\Omega}.$$

(d) Siehe (i)

(e) Siehe (i)

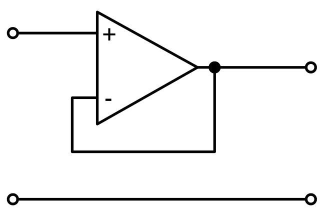
(f) Es muss das B. Zweitor zweimal und das C. Zweitor einmal eingesetzt werden. Diese liefern die nötigen normierten Übertragungsfuntionen:

$$\text{B. Zweitor} \quad \frac{U_a}{U_e} = \frac{R_B + \frac{1}{j\omega C_B}}{\frac{1}{j\omega C_B}} \rightarrow 1 + jA\Omega \text{ mit } A = 1$$

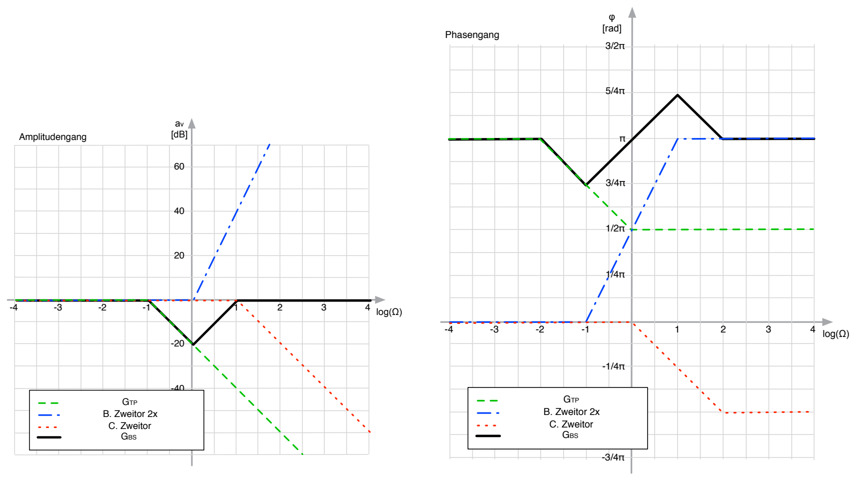
$$\text{C. Zweitor} \quad \frac{U_a}{U_e} = \frac{\frac{1}{j\omega C_C}}{R_C + \frac{1}{j\omega C_C}} \rightarrow \frac{1}{1 + jB\Omega} \text{ mit } B = 0.1$$

(g) Siehe (i)

(h) Gefragt war nach dem Spannungsfolger/Impedanzwandler.



(i) Das gesamte Bodediagramm der Bandsperre sieht dann so aus:



(j) Unter der Annahme entkoppelter Schaltungen gilt:

$$\frac{U_{a2}}{U_{e1}} = \frac{U_{a1}}{U_{e1}} \cdot \frac{U_{a2}}{U_{a1}} \quad \text{mit} \quad U_{e2} = U_{a1}$$

Damit lässt sich die normierte Übertragungsfunktion der Bandsperre mit den angegebenen Zweitoren direkt angeben:

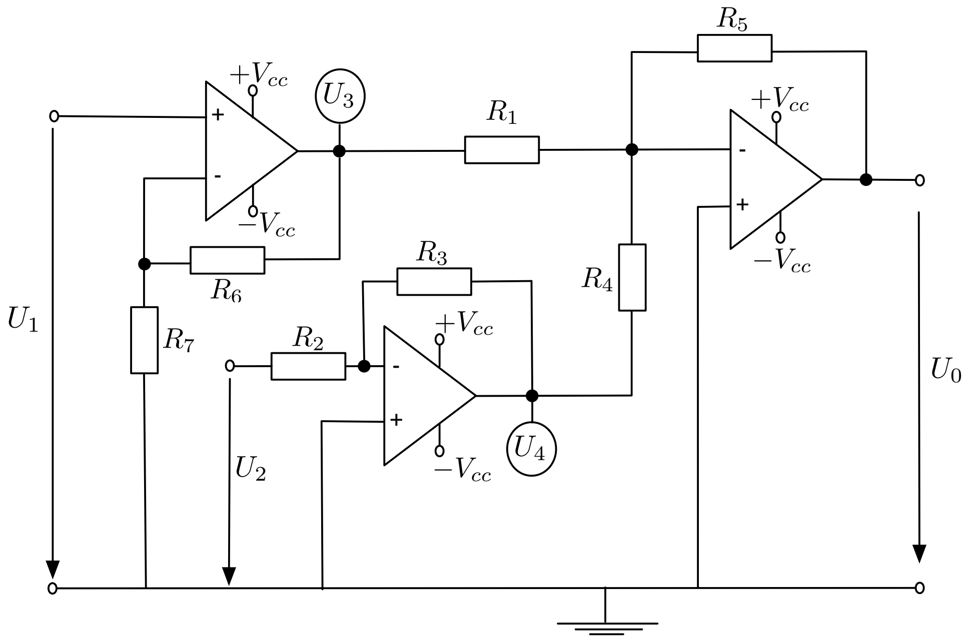
$$\frac{U_{a,bsp}}{U_{e,bsp}} = -\frac{(1 + j\Omega)^2}{(1 + j10\Omega)(1 + j0.1\Omega)}$$

Aufgabe 6 **(13 Punkte)**

Operationsverstärker

(a) Geben Sie zwei goldene Regeln eines Operationsverstärkers an, wenn Gegenkopplung vorliegt. (2 Punkte)

Gegeben sei die folgende Schaltung mit drei Operationsverstärkern:



Die Schaltung soll schrittweise analysiert werden.

(b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der ersten Teilschaltung. (2 Punkte)
$\frac{U_3}{U_1} = f(R_6, R_7)$

(c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der zweiten Teilschaltung. (2 Punkte)
$\frac{U_4}{U_2} = f(R_2, R_3)$

(d) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der dritten Teilschaltung. (2 Punkte)
$U_0 = f(U_3, U_4, R_1, R_4, R_5)$

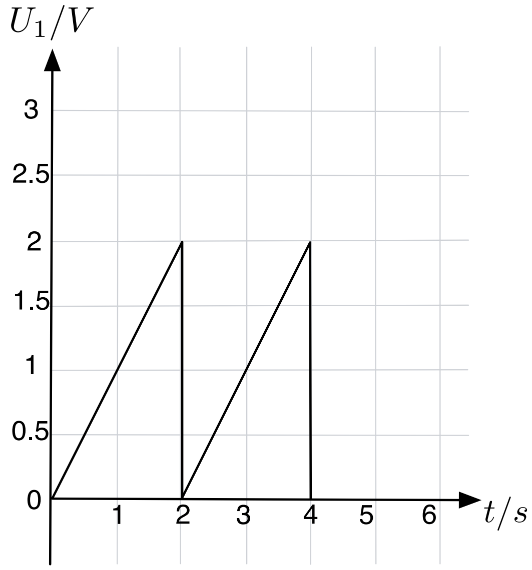
(e) Zeigen Sie, dass für die Übertragungsfunktion der Gesamtschaltung Folgendes gilt: (1 Punkt)

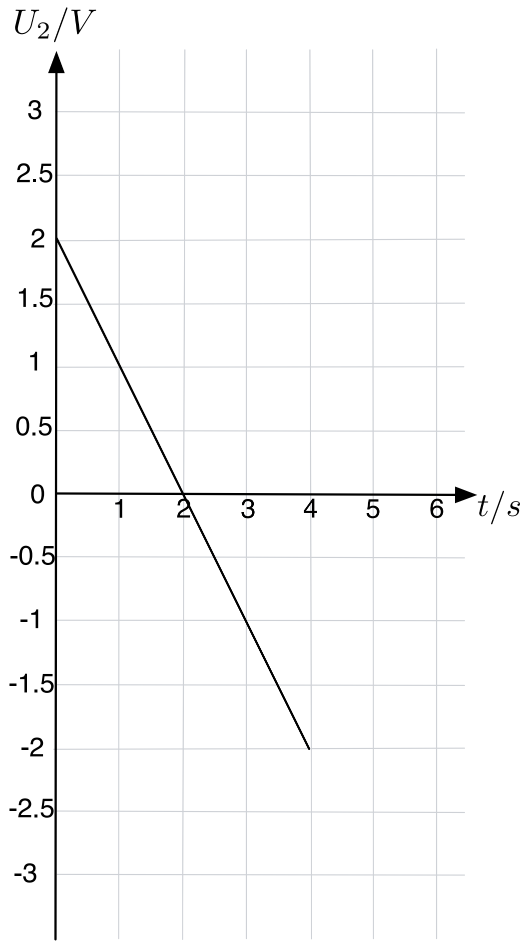
$$U_0 = \frac{R_5}{R_4} \cdot \frac{R_3}{R_2} \cdot U_2 - \frac{R_5}{R_1} \cdot \left(1 + \frac{R_6}{R_7}\right) \cdot U_1$$

(f) Nun sollen die Eingangsspannungen $U_1(t)$ und $U_2(t)$ zeitlich veränderlich sein (siehe Abbildung). Die anderen Größen dieser Schaltung werden auch festgelegt: (4 Punkte)

- $V_{cc} = 10\,V$
- $R_1 = 120\,k\Omega$
- $R_2 = 40\,k\Omega$
- $R_3 = 80\,k\Omega$
- $R_4 = 30\,k\Omega$
- $R_5 = 60\,k\Omega$
- $R_6 = 30\,k\Omega$
- $R_7 = 10\,k\Omega$

Zeichen Sie die zeitlich veränderliche Ausgangsspannung $U_0(t)$ in das Diagramm 6.1. *Hinweis: Setzen Sie zuerst die Bauteilwerte ein und geben Sie die konkrete Übertragungsfunktion* $U_0 = f(U_1, U_2)$ *an.*



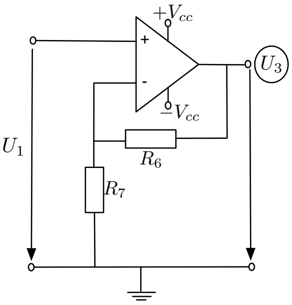


Lösung:

(a)
- Tue einfach so, als ob $U_d = 0$.
- Tue einfach so, als ob die Eingangsströme in der Operationsverstärker verschwinden.

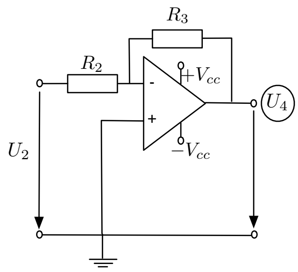
- Wende unter Beachtung von 1. und 2. die Maschen- und Knotengleichungen wie gehabt an.

(b)



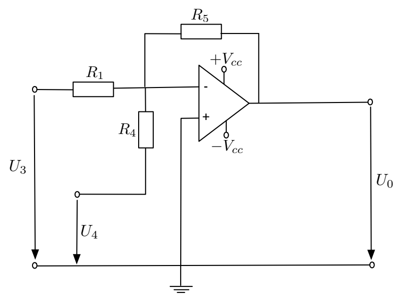
$$\frac{U_1}{R_7} = \frac{U_3}{R_6 + R_7}$$
$$\frac{U_3}{U_1} = \frac{R_6 + R_7}{R_7} = 1 + \frac{R_6}{R_7}$$

(c)



$$\frac{U_2}{R_2} = \frac{-U_4}{R_3}$$
$$\frac{U_4}{U_2} = \frac{-R_3}{R_2}$$

(d)



$$\frac{-U_0}{R_5} = \left(\frac{U_3}{R_1} + \frac{U_4}{R_4}\right)$$
$$U_0 = -R_5\left(\frac{U_3}{R_1} + \frac{U_4}{R_4}\right)$$
$$U_0 = -\frac{R_5}{R_1} \cdot U_3 - \frac{R_5}{R_4} \cdot U_4$$

(e) Das Einsetzen der in (a) und (b) gefundenen Gleichungen in die in (c) gefundene Übertragungsfunktion liefert:

$$U_0 = -\frac{R_5}{R_1} \cdot \left(\left(1 + \frac{R_6}{R_7}\right) \cdot U_1\right) - \frac{R_5}{R_4} \cdot \left(\frac{-R_3}{R_2} \cdot U_2\right)$$
$$U_0 = \frac{R_5}{R_4} \cdot \frac{R_3}{R_2} \cdot U_2 - \frac{R_5}{R_1} \cdot \left(1 + \frac{R_6}{R_7}\right) \cdot U_1$$

(f) Das Einsetzen der konkreten vorgegebenen Bauteilwerte liefert:

$$U_0(t) \quad = \quad 4 \cdot U_2(t) - 2 \cdot U_1(t)$$

Dadurch ergibt sich (unter Beachtung der Versorgungsspannung) der folgende Spannungsverlauf: