Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel   Übungsleiter: M.Sc. Nicolas Pilia

Klausur

04. April 2018
Beginn: 08:00 Uhr

Familienname:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

AUFKLEBER

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem nicht programmierbaren Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein!
Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare!
Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

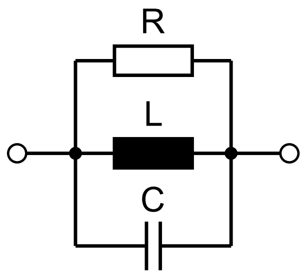
Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	16	
2	6	
3	4	
4	12	
5	20	
6	23	
7	13	
Gesamt:	94	

Note:______

Aufgabe 1 **(16 Punkte)**
Ortskurve

Gegeben sei die folgende Schaltung:



(a) Berechnen Sie die Admittanz $\underline{Y}(R, L, C)$ der Gesamtschaltung und trennen Sie die Gleichung nach Real- und Imaginärteil. (2 Punkte)

(b) Zeichnen Sie die Ortskurve der Admittanz und der Impedanz in die Diagramme 1.1 und 1.2 ein. Beschriften Sie die Schnittpunkte mit der x-Achse in Abhängigkeit von R. (4 Punkte)

Im Folgenden soll nun die Güte der Schaltung bestimmt werden. Die Güte Q dieser Schaltung ist definiert durch die Formel:

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_1 - \omega_2}$$

Dabei ist ω_0 die Resonanzkreisfrequenz. ω_1 ist die Kreisfrequenz, bei der die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung gerade $\mathbf{+45}°$ beträgt. ω_2 ist wiederum die Kreisfrequenz, bei der die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung gerade $\mathbf{-45}°$ beträgt.

(c) Bestimmen Sie zunächst die Resonanzkreisfrequenz ω_0 in Abhängigkeit der Bauteile. Begründen Sie! (2 Punkte)

(d) Zeigen Sie, dass für ω_1 und ω_2 folgende Gleichungen gelten: (5 Punkte)

$$\omega_1 = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC}}$$
$$\omega_2 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC}}$$

(e) Bestimmen Sie nun Q(R,L,C) in Abhängigkeit von R, L und C. (2 Punkte)
Hinweis: Verwenden Sie die Gleichungen aus Aufgabenteil d) für die Frequenzen ω_1 und ω_2.

(f) Berechnen Sie R so, dass die Güte $Q = 10$ beträgt. Die anderen Bauteile haben hierfür folgende Werte: $L = 50\,\text{mH}$, $C = 200\,\text{nF}$. (1 Punkt)

Lösung:

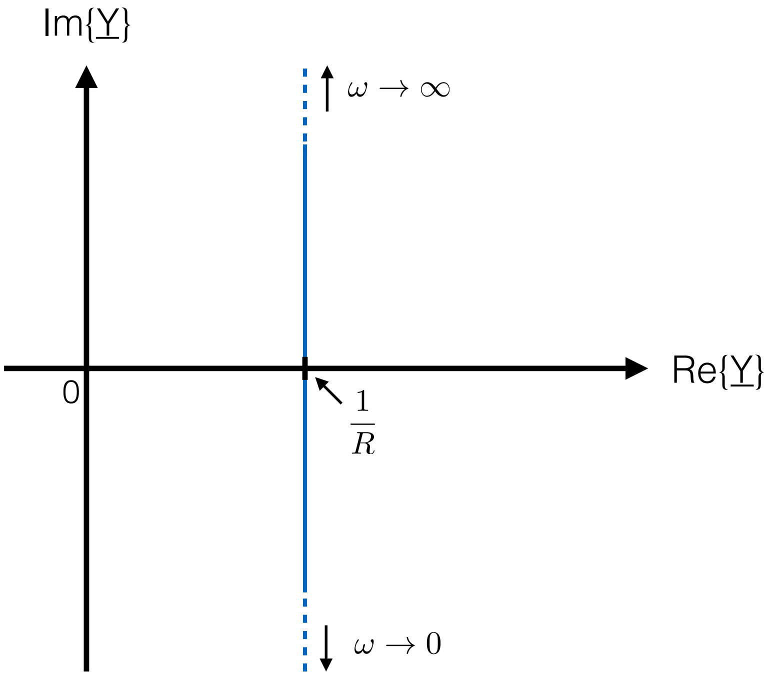
(a) Die Gesamtadmittanz kann durch Addition der Teiladmittanzen berechnet werden, da es sich um eine Parallelschaltung handelt:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C$$

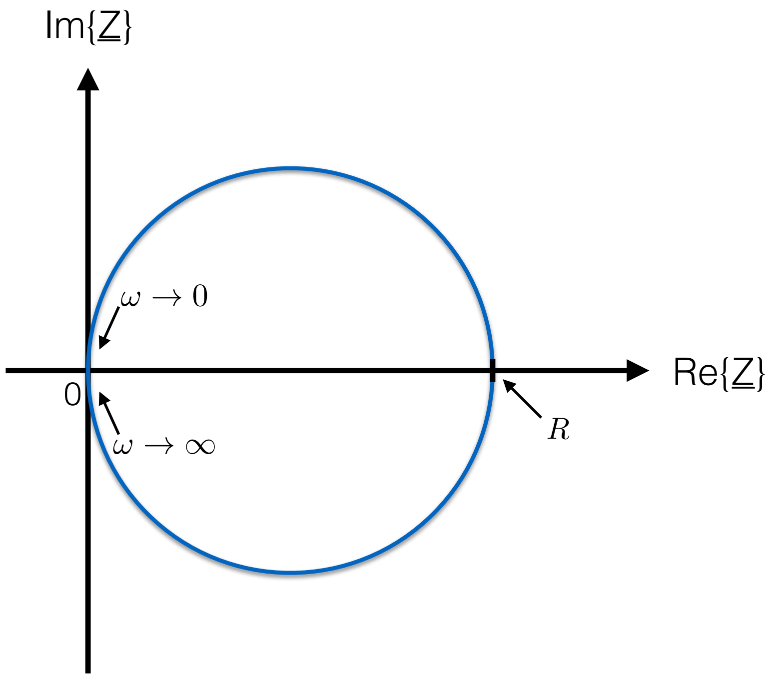
Getrennt nach Imaginär- und Realteil erhält man:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

(b) Die Admittanzortskurve ergibt sich wie folgt:



Die Impedanzortskurve kann durch Spiegelung am Einheitskreis bestimmt werden:



(c) Für die Resonanzkreisfrequenz ω_0 gilt:

$$Im(\underline{Y}) = 0$$

Daraus folgt:

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$$

Stellt man diese Gleichung nach ω_0 um, erhält man die Gleichung für die Resonanzkreisfrequenz:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(d) Für eine Phasenverschiebung von $+45°$ zwischen Strom und Spannung gilt:

$$Im\{\underline{Y}\} = Re\{\underline{Y}\}$$

Setzt man die Ergebnisse aus Aufgabenteil a) ein, erhält man:

$$\omega_1 C - \frac{1}{\omega_1 L} = \frac{1}{R}$$

Zieht man $\frac{1}{R}$ auf die linke Seite und multipliziert die Gleichung mit ω_1, erhält man:

$$\omega_1^2 C - \omega_1 \frac{1}{R} - \frac{1}{L} = 0$$

Diese quadratische Gleichung kann mit der Mitternachtsformel, mit der pq-Formel oder durch quadratische Ergänzung gelöst werden. Man erhält:

$$\omega_1 = \frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC}}$$

Der Term unter Wurzel ist für alle R, L und C größer als der Term vor der Wurzel. Da eine Frequenz nicht negativ sein kann gilt:

$$\omega_1 = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC}}$$

Für eine Phasenverschiebung von $-45°$ zwischen Strom und Spannung gilt:

$$-Im\{\underline{Y}\} = Re\{\underline{Y}\}$$

$$-\left(\omega_2 C - \frac{1}{\omega_2 L}\right) = \frac{1}{R}$$

$$\omega_2^2 C + \omega_2 \frac{1}{R} - \frac{1}{L} = 0$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC}}$$

Auch hier ist nur ein positives Vorzeichen vor der Wurzel sinnvoll:

$$\omega_2 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\frac{1}{4R^2C^2} + \frac{1}{LC}}$$

(e) Mit den Gleichungen aus Aufgabenteil c) und d) ergibt sich:

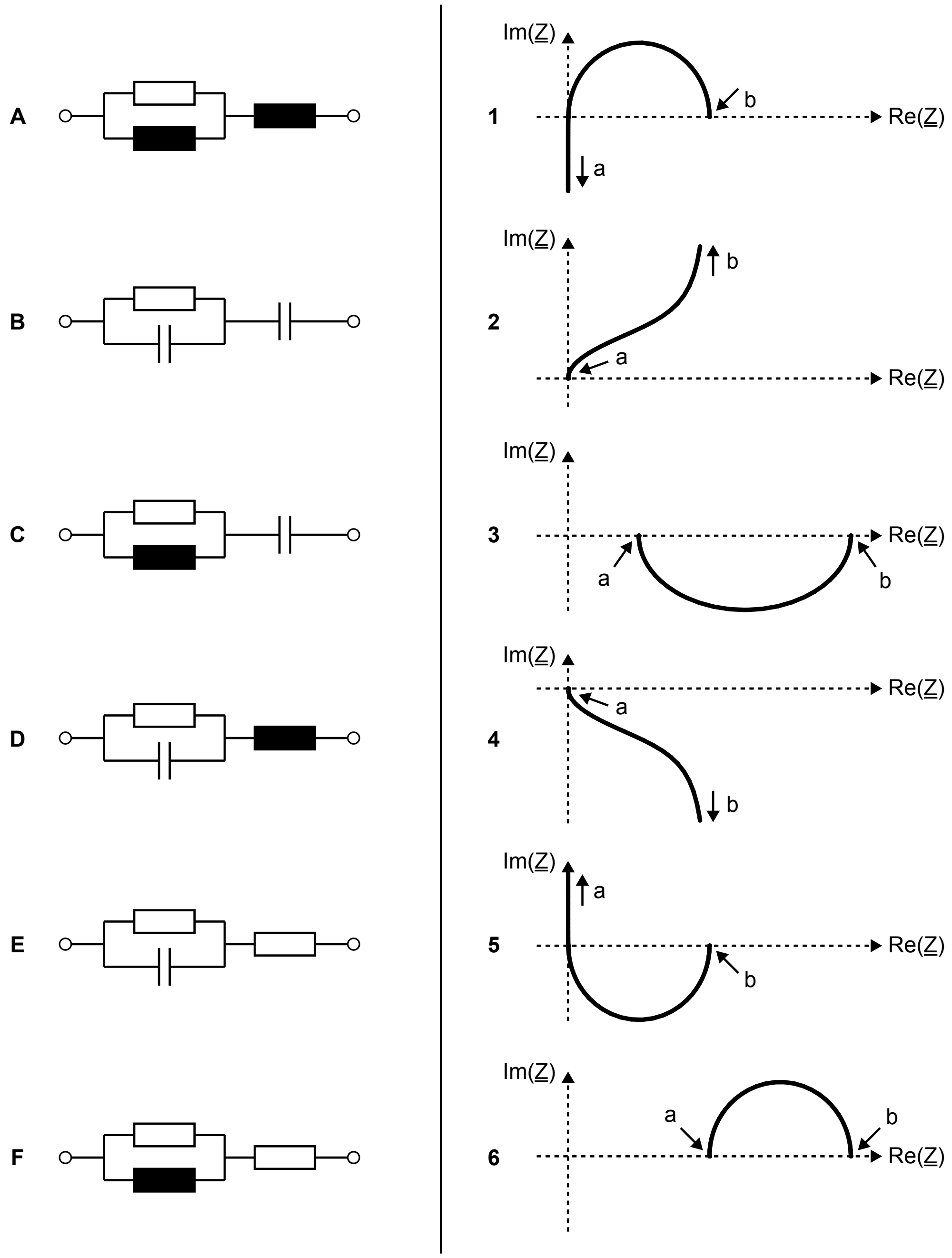
$$Q(R, L, C) = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$$

(f) Durch Einsetzen der gegebenen Werte und durch Umstellen der Gleichung nach R erhält man:

$$R = Q\sqrt{\frac{L}{C}} = 5\,\mathrm{k}\Omega$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Ortskurve

Gegeben seien folgende Schaltungen und Ortskurven:



(a) Finden Sie zu jeder Schaltung A-F die zugehörige Impedanzortskurve 1-6 auf der rechten Seite. Tragen Sie die Zuordnung in Tabelle 2.1 ein. (3 Punkte)

(b) Die Startpunkte ($\omega = 0$) und Endpunkte ($\omega \to \infty$) sind in den Ortskurven 1-6 entweder mit a oder b gekennzeichnet. Geben Sie in Tabelle 2.2 an, bei welchem der beiden Punkte es sich um den Startpunkt ($\omega = 0$) handelt. (3 Punkte)

Lösung:

(a)

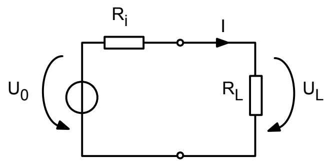
Schaltung	Ortskurve: 1-6
A	2
B	4
C	1
D	5
E	3
F	6

(b)

Ortskurve	Startpunkt ($\omega = 0$): a oder b
$1 \leftrightarrow$ C	a
$2 \leftrightarrow$ A	a
$3 \leftrightarrow$ E	b
$4 \leftrightarrow$ B	b
$5 \leftrightarrow$ D	b
$6 \leftrightarrow$ F	a

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**
Netzwerk

(a) Beantworten Sie folgende Fragen in Bezug auf diese einfache Quelle-Verbraucher-Schaltung: (4 Punkte)



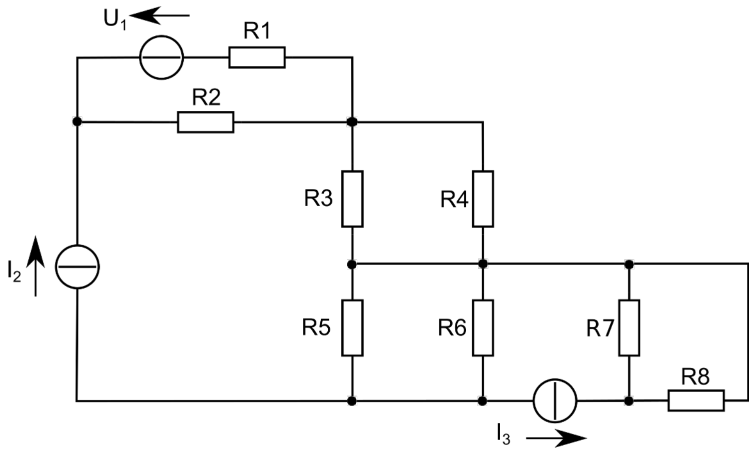
- Nennen Sie die Definition (Formel) der Wirkleistung im Verbraucher einmal in Abhängigkeit von U_L, also $P(U_L, R_L)$ und einmal in Abhängigkeit von I, also $P(I, R_L)$.
- In welchem Verhältnis müssen die Widerstände R_L und R_i zueinander stehen um Leistungsanpassung zu erreichen?
- Wie lautet die Definition des Wirkungsgrades (Formel) und in welchem Verhältnis stehen hier die Widerstände R_L und R_i zueinander?
- Nennen Sie drei formalisierte Verfahren mit denen Sie Netzwerke in Gleichungssysteme überführen können.

Lösung:

(a)
- $P = \frac{U_L^2}{R_L} = I^2 \cdot R_L$
- Bei Leistungsanpassung wird die maximale Leistung der Quelle entzogen und an den Verbraucher weitergereicht. Es gilt: $R_L = R_i$
- $\eta = \frac{P_L}{P_{ges}}$. Möglichst großer Prozentsatz der entzogenen Leistung soll im Verbraucher ankommen. Es gilt: $R_L > R_i$
- Zweigstromverfahren, Maschenstromverfahren, Knotenpunkpotentialverfahren

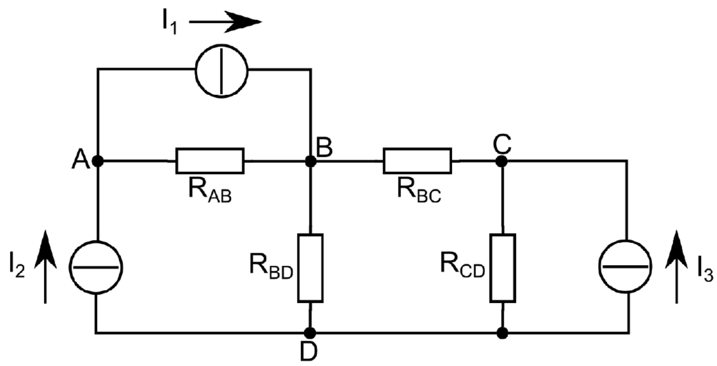
Aufgabe 4 **(12 Punkte)**
Netzwerk

Gegeben sind die folgenden beiden Schaltungen:
Schaltung 1



mit folgenden Angaben: $R2 = 2\Omega$, $R4 = R5 = 6\Omega$, $R6 = 3\Omega$
$R7 = 8\Omega$, $R8 = 8\Omega$, $I_2 = 3\,A$, $I_3 = 2\,A$, $U_1 = 2\,V$
R1 und R3 sind offenbar noch nicht bekannt.

Schaltung 2



mit folgenden Angaben: $I_2 = 3\,A$, $I_1 = 1\,A$, $I_3 = 2\,A$, $R_{AB} = 1\Omega$
$R_{BC} = R_{CD} = 10\Omega$, $R_{BD} = 5\Omega$

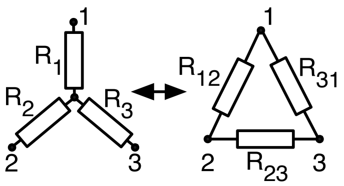
(a) Die obige Schaltung 1 soll in Schaltung 2 umgeformt werden. Führen Sie hierzu folgende Schritte zur Vereinfachung des Netzwerkes durch: (5 Punkte)

i) Betrachten Sie alle Quellen im System, formen Sie diese falls nötig in Stromquellen um und zeichnen Sie das vereinfachte Schaltbild.

ii) Fassen Sie nun ohne Berechnung alle parallelen Widerstände zusammen und zeichnen Sie das vereinfachte Schaltbild. Berechnen Sie anschließend R1.

iii) Führen Sie eine Stern-Dreieckstransformation durch und zeichnen Sie das vereinfachte Schaltbild.

iv) Berechnen Sie nun mit Hilfe der Stern-Dreieckstransformation R3. *Hinweis: Die Transformationsformeln sind auf der nächsten Seite gegeben.*



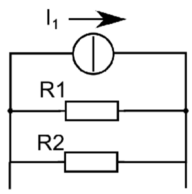
$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{12} = R_1 + R_2 + R_1\frac{R_2}{R_3}$$
$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{23} = R_2 + R_3 + R_2\frac{R_3}{R_1}$$
$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{31} = R_3 + R_1 + R_3\frac{R_1}{R_2}$$

Die folgende Teilaufgabe ist unabhängig von der vorherigen lösbar.

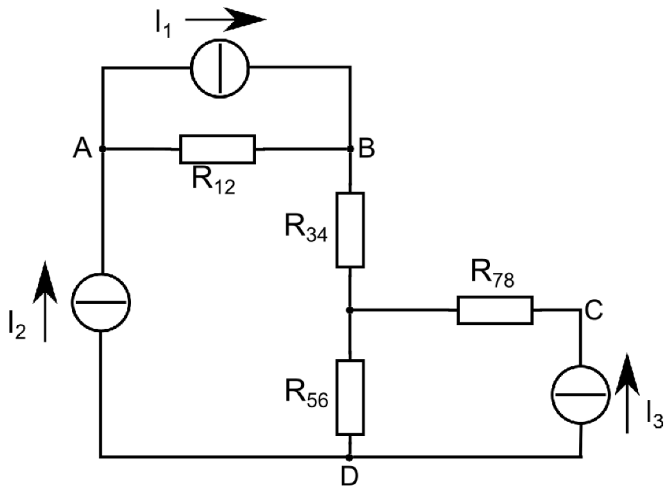
(b) Bestimmen Sie mit dem Knotenpunktpotentialverfahren die Spannungen (in Schaltung 2) an den Punkten A, B und C mit D=0 als Referenz. Stellen Sie dazu das Gleichungssystem auf. Lösen Sie es mit der Cramerschen Regel. Zeigen Sie dabei für mindestens eine Spannung die komplette Matrizenberechnung. (7 Punkte)

Lösung:

(a) Schritt 1:
Spannungsquelle $U1$ mit $R1$ zu Stromquelle $I1$ umwandeln.
$R1 = \frac{2V}{1A} = 2\Omega$,



Schritt 2:
$R3$ und $R4$, $R5$ und $R6$, sowie $R7$ und $R8$ zusammenfassen.



Schritt 3:
Der aus Schritt 1 entstehende parallel geschaltete Widerstand $R1$ wird mit $R2$ zusammengefasst und ergibt R_{AB}.
$R_{AB} = \frac{R1 \cdot R2}{R1+R2} = \frac{2\cdot 2}{2+2} = 1\Omega$

Schritt 4:
Die Widerstände $R56$ und $R78$ sind folgendermaßen gegeben:

$$R_{78} = \frac{R7 \cdot R8}{R7 + R8} = \frac{8\Omega \cdot 8\Omega}{8\Omega + 8\Omega} = 4\Omega$$

$$R_{56} = \frac{R5 \cdot R6}{R5 + R6} = \frac{6\Omega \cdot 3\Omega}{6\Omega + 3\Omega} = 2\Omega$$

Nach einer Stern-Dreiecks-Transformation von $R34$, $R56$ und $R78$ erhält man die in der Aufgabe gesuchte Schaltung. Die Transformation von Dreieck zu Stern ergibt die Formel um R_{34} zu errechen:

$$R_{BD} = 5\Omega = R_{34} + R_{56} + R_{34}\frac{R_{56}}{R_{78}} = R_{34} + 2\Omega + R_{34}\frac{2\Omega}{4\Omega}$$

$$R_{34} = 2\Omega$$

Dadurch ergibt sich

$$R_3 = 3\Omega$$

(b) $$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_{AB}} & -\frac{1}{R_{AB}} & 0 \\ -\frac{1}{R_{AB}} & \frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{BC}} + \frac{1}{R_{BD}} & -\frac{1}{R_{BC}} \\ 0 & -\frac{1}{R_{BC}} & \frac{1}{R_{BC}} + \frac{1}{R_{CD}} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{AD} \\ U_{BD} \\ U_{CD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 - I_1 \\ I_1 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

Die Determinante der Matrix wurde hier mit der Regel von Sarrus berechnet:
$D = det(A) = \frac{26}{100} + 0 + 0 - 0 - \frac{1}{100} - \frac{2}{10} = \frac{5}{100} S^3$
Der erste Zähler der Cramer-Determinanten:

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 2A & -\frac{1}{R_{AB}} & 0 \\ 1A & \frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{BC}} + \frac{1}{R_{BD}} & -\frac{1}{R_{BC}} \\ 2A & -\frac{1}{R_{BC}} & \frac{1}{R_{BC}} + \frac{1}{R_{CD}} \end{pmatrix} = \frac{52}{100} + \frac{2}{10} - 0 - \frac{2}{100} + \frac{2}{10} = \frac{90}{100} A \cdot S^2 \rightarrow \frac{D_1}{D} = \frac{\frac{90}{100} A \cdot S^2}{\frac{5}{100} S^3} \rightarrow U_{AD} = 18V$$

Der zweite Zähler der Cramer-Determinanten:

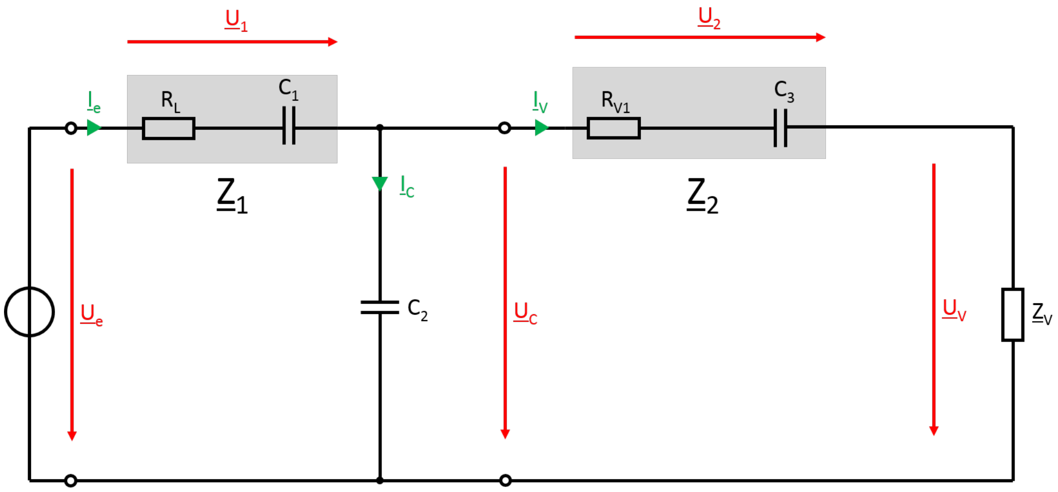
$$D_2 = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{R_{AB}} & 2A & 0 \\ -\frac{1}{R_{AB}} & 1A & -\frac{1}{R_{BC}} \\ 0 & 2A & \frac{1}{R_{BC}} + \frac{1}{R_{CD}} \end{pmatrix} = \frac{2}{10} + 0 + 0 - 0 + \frac{2}{10} + \frac{4}{10} = \frac{80}{100} A \cdot S^2 \rightarrow \frac{D_2}{D} = U_{BD} = 16V$$

Der dritte Zähler der Cramer-Determinanten:

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{R_{AB}} & -\frac{1}{R_{AB}} & 2A \\ -\frac{1}{R_{AB}} & \frac{1}{R_{AB}} + \frac{1}{R_{BC}} + \frac{1}{R_{BD}} & 1A \\ 0 & -\frac{1}{R_{BC}} & 2A \end{pmatrix} = \frac{26}{10} + 0 + \frac{2}{10} - 0 + \frac{1}{10} - 2 = \frac{90}{100} A \cdot S^2 \rightarrow \frac{D_3}{D} = U_{CD} = 18V$$

Aufgabe 5 **(20 Punkte)**
Wechselstromlehre

Eine Wechselspannunsquelle ist mit einem Kondensatornetzwerk mit einer unbekannten Last $\underline{Z}_V$ verbunden. Die aufgenommene Leistung und die Impedanz des Verbrauchers sollen bestimmt werden. Die Schaltung sieht wie folgt aus:



Die Eingangsspannung $\underline{U}_e$ und der Eingangsstrom $\underline{I}_e$ sind bekannt. Der Verbraucherstrom $\underline{I}_V$ konnte ebenfalls gemessen werden.

(a) Zeigen Sie, dass die Scheinleistung des unbekannten Verbrauchers $\underline{S}_V$ wie folgt aus den gemessenen Größen $\underline{U}_e$, $\underline{I}_e$ und $\underline{I}_V$ berechnet werden kann: (3 Punkte)

$$\underline{S}_V = \underline{U}_e\, \underline{I}_V^* - \underline{Z}_1\, \underline{I}_e\, \underline{I}_V^* - \underline{Z}_2\, |\underline{I}_V|^2 \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass $\underline{Z}_V$ aus den bekannten Größen mit der folgenden Gleichung berechent werden kann: (2 Punkte)

$$\underline{Z}_V = \frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_V} - \underline{Z}_1 \frac{\underline{I}_e}{\underline{I}_V} - \underline{Z}_2 \tag{2}$$

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen lösbar.

Für die folgenden Berechnungen sind die Bauteilwerte und die gemessenen Größen zahlenmäßig bekannt. Bei den gegebenen Spannungs- und Stromwerten handelt es sich jeweils um Effektivwerte:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_e &= 12\,V \\
\underline{I}_e &= (3 + j4)\,A \\
\underline{I}_V &= (2 - j1)\,A \\
\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 &= (1 - j1)\,\Omega \\
\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 &= (1 - j1)\,\Omega
\end{aligned}$$

(c) Berechnen Sie die Impedanz $\underline{Z}_V$ und die vom Verbraucher aufgenommene Blind- und Wirkleistung Q_V und P_V mit Hilfe der in a) und b) bestimmten Gleichungen. (3 Punkte)

(d) Ist der Verbraucher Z_V ein induktiver oder kapazitiver Verbraucher? Begründen Sie! Geben Sie zusätzlich eine mögliche Schaltung für den Verbraucher aus zwei Bauteilen an. (2 Punkte)

Sie sollen die Schaltung nun mit Hilfe eines Zeigerdiagramms analysieren. Verwenden Sie dabei die oben genannten Zahlenwerte.

(e) Tragen Sie die Ströme $\underline{I}_e$ und $\underline{I}_V$ in das Zeigerdiagramm 5.1 ein und bestimmen Sie den Strom $\underline{I}_C$ graphisch. Geben Sie ihn ebenfalls nach Real- und Imaginärteil an. Die Konstruktionsmethode muss erkennbar sein. (4 Punkte)

(f) Bestimmen Sie die Spannung $\underline{U}_V$ rechnerisch und zeichnen Sie die Spannung in das Zeigerdiagramm 5.1 ein. (2 Punkte)

(g) Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_C$ und $\underline{U}_1$. Tragen Sie beide Spannungen in das Zeigerdiagramm 5.1 ein und geben Sie beide Spannungen getrennt nach Real- und Imaginärteil an. (2 Punkte)

(h) Bestimmen Sie $\underline{U}_2$ graphisch im Zeigerdiagramm. Die Konstruktionsmethode muss erkennbar sein. Geben Sie die Spannung getrennt nach Phase und Betrag an. (2 Punkte)

Lösung:

(a) Die Scheinleistung des Verbrauchers kann mit Hilfe der Verbraucherspannung $\underline{U}_V$ und dem konjugiert komplexen Verbraucherstrom I_V bestimmt werden:

$$\underline{S}_V = \underline{U}_V \cdot \underline{I}_V^*$$

Die Spannung $\underline{U}_V$ kann durch die Spannungen $\underline{U}_C$ und $\underline{U}_2$ ausgedrückt werden, wobei $\underline{U}_2$ wiederum über den Verbraucherstrom und $\underline{Z}_2$ bestimmt werden kann:

$$\underline{S}_V = (\underline{U}_C - \underline{I}_V \underline{Z}_2) \cdot \underline{I}_V^*$$

Die Spannung $\underline{U}_C$ kann man durch die Eingangsspannung, den Eingangsstrom und die Impedanz $\underline{Z}_1$ ausdrücken:

$$\underline{S}_V = (\underline{U}_e - \underline{Z}_1 \underline{I}_e - \underline{Z}_2 \underline{I}_V) \cdot \underline{I}_V^*$$

Mit $\underline{I}_V \cdot \underline{I}_V^* = |\underline{I}_V|^2$ ergibt sich die gesuchte Gleichung:

$$\underline{S}_V = \underline{U}_e \, \underline{I}_V^* - \underline{Z}_1 \, \underline{I}_e \, \underline{I}_V^* - \underline{Z}_2 \, |\underline{I}_V|^2 \tag{3}$$

(b) Die gegebene Gleichung für die Impedanz kann ebenfalls über die Scheinleistung hergeleitet werden. Es gilt $\underline{S}_V = \underline{U}_V \cdot \underline{I}_V^* = \underline{Z}_V \cdot \underline{I}_V \cdot \underline{I}_V^*$. Daraus folgt mit der Gleichung aus a):

$$\begin{aligned} \underline{Z}_V &= \frac{\underline{S}_V}{|\underline{I}_V|^2} \\ &= \frac{\underline{U}_e \, \underline{I}_V^* - \underline{Z}_1 \, \underline{I}_e \, \underline{I}_V^* - \underline{Z}_2 \, |\underline{I}_V|^2}{|\underline{I}_V|^2} \\ &= \frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_V} - \underline{Z}_1 \frac{\underline{I}_e}{\underline{I}_V} - \underline{Z}_2 \end{aligned}$$

(c) Die Wirk- und Blindleistung der Schaltung kann mit den gegebenen Werten und der in a) definierten Gleichung bestimmt werden:

$$\begin{aligned}\underline{S}_V &= 12\,V \cdot (2+1j)\,A \\ &\quad -(1-j1)\,\Omega \cdot (3+j4)\,A \cdot (2+j1)\,A \\ &\quad -(1-j1)\,\Omega \cdot 5\,A^2 = (6+j8)\,VA\end{aligned}$$

Die Wirkleistung und Blidleistung ergeben sich daher zu:

$$\begin{aligned}P_V &= 6\,W \\ Q_V &= 8\,Var\end{aligned}$$

Die Impedanz ergibt sich mit der Gleichung $\underline{Z}_V = \frac{\underline{S}_V}{|\underline{I}_V|^2}$ zu:

$$\underline{Z}_V = \frac{6+j8}{5}\,\Omega = (1,2+j1,6)\,\Omega$$

(d) Da die Blindleistung des Verbrauchers positiv ist, handelt es sich um eine induktive Last. Das kann man auch an dem positiven Imaginärteil von $\underline{Z}_V$ erkennen.
Eine mögliche Schaltung könnte die Folgende sein:

Das vollständige Zeigerdiagramm können Sie am Ende dieser Musterlösung finden.

(e) $\underline{I}_C$ ergibt sich nach der graphischen Bestimmung im Diagramm zu: $\underline{I}_C = (1+j5)\,A$.

(f) Mit Hilfe von den bereits bestimmten Größen $\underline{Z}_V$ und $\underline{I}_V$ ergibt sich: $\underline{U}_V = \frac{6+j8}{5}\,\Omega \cdot (2-j)\,A = (4+j2)\,V$.

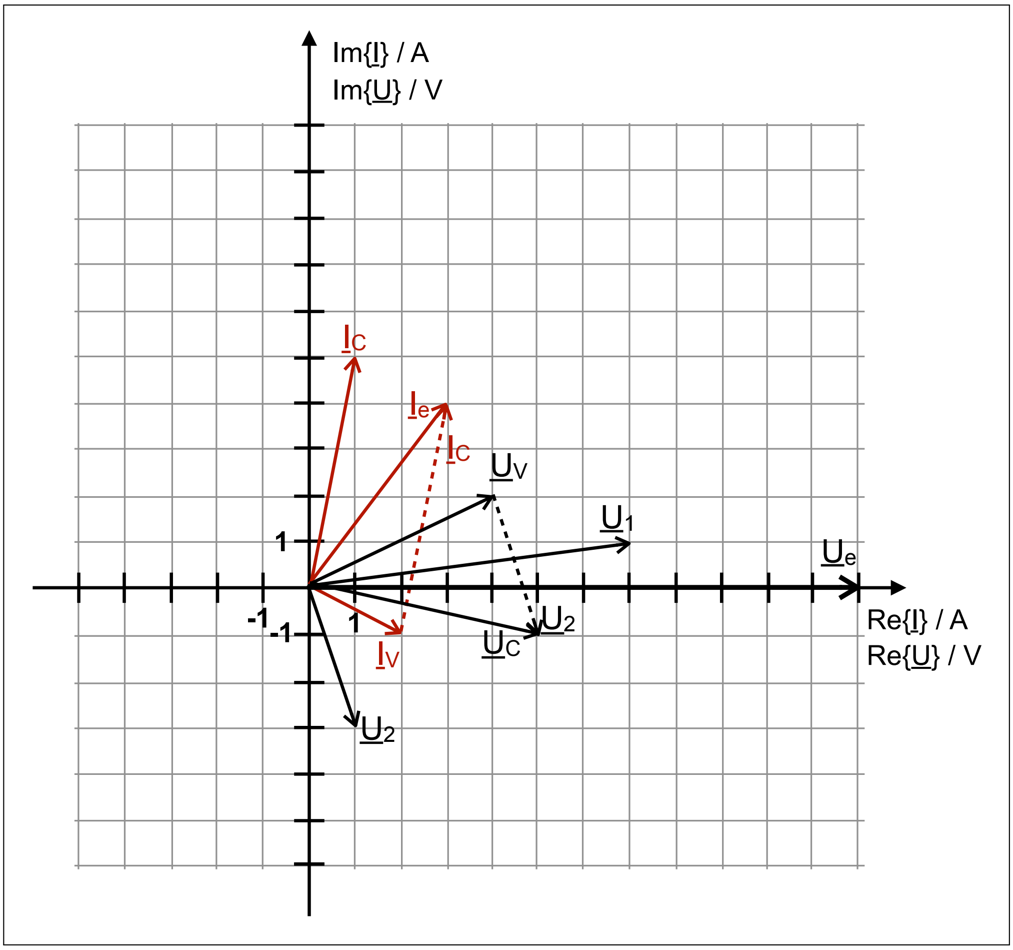
(g) $\underline{U}_1$ lässt sich mit den gegebenen Werten berechnen:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{I}_e \cdot \underline{Z}_1 \\ &= (3+j4)\,A \cdot (1-j1)\,\Omega \\ &= (7+j1)\,V\end{aligned}$$

$\underline{U}_C$ kann man daraufhin mit $\underline{U}_e$ und $\underline{U}_1$ herleiten:

$$\underline{U}_C = \underline{U}_e - \underline{U}_1 = (5-j1)\,V$$

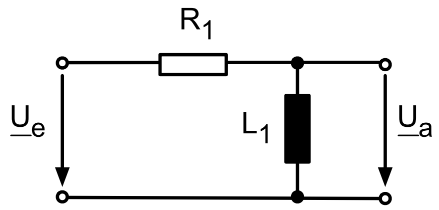
(h) Die Spannung $\underline{U}_2$ kann man graphisch zu: $\underline{U}_2 = (1-j3)\,V$. Es gilt: $\arg\{\underline{U}_2\} = \arctan\left(\frac{-3}{1}\right) = 1,249\,rad$ und $|\underline{U}_2| = \sqrt{10}\,V \approx 3,16\,V$


Im{I} / A
Im{U} / V
Re{I} / A
Re{U} / V
1
-1
1
-1
$\underline{I}_C$
$\underline{I}_e$
$\underline{I}_C$
$\underline{I}_V$
$\underline{U}_V$
$\underline{U}_1$
$\underline{U}_e$
$\underline{U}_2$
$\underline{U}_C$
$\underline{U}_2$

Aufgabe 6 **(23 Punkte)**

Bodediagramm

Der LEN-Übungsleiter sagt Ihnen in der Übung, dass es sich bei der folgenden Schaltung um einen passiven Tiefpass handelt:



Da auch mal Übungsleiter Fehler machen, sind Sie sich nicht sicher, ob das stimmt und wollen seine Aussage mit Hilfe des Bodediagramms überprüfen.

(a) Geben Sie die Übertragungsfunktion $\underline{G}_1(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}$ der Schaltung an. Zeigen Sie auch, dass die normierte Übertragungsfunktion folgende Form hat: (2 Punkte)

$$\underline{G}_{1,n} = \frac{j\Omega_1}{j\Omega_1 + 1} \tag{4}$$

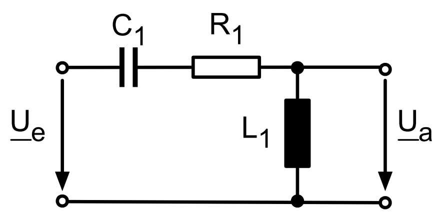
(b) Zeichen Sie das Bodediagramm nach Betrag und Phase in Diagramm 6.1 (Amplitudengang 1) und Diagramm 6.2 (Phasengang 1) für die Schaltung aus a) ein. Geben Sie auch a_{v,ges_1} und ϕ_{ges_1} an und formen Sie die Ausdrücke so um, dass Sie das Bodediagramm direkt zeichnen können. Nutzen Sie hierzu die Rechenregeln für den Logarithmus und das Argument. (4 Punkte)

(c) Bestimmen Sie rechnerisch L_1 so, dass die $-3\,\text{dB}$-Grenzfrequenz bei $1\,\text{Hz}$ liegt. Nehmen Sie an, dass $R_1 = 1\,\Omega$ ist. (3 Punkte)

(d) Beurteilen Sie, ob der Übungsleiter mit seiner Behauptung richtig lag (mit Begründung). Zeichnen Sie auch einen alternativen Aufbau, der den gleichen Frequenzgang wie die Schaltung aus a) besitzt, bestehend aus 2 passiven Bauteilen. (2 Punkte)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen lösbar.

Ihr Interesse ist geweckt und Sie möchten die Schaltung aus a) „tunen“. Hierfür schalten Sie vor den Widerstand noch einen Kondensator und erhalten die folgende Schaltung:



Betrachten Sie im Folgenden nur noch diese Schaltung.

(e) Geben Sie Übertragungsfunktion $\underline{G}_2(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}$ der Schaltung an. Normieren Sie anschließend die Übertragungsfunktion so, dass sie die folgende Form hat: (3 Punkte)

$$\underline{G}_{2,n} = \frac{\Omega_2^2}{\Omega_2^2 - jb\Omega_2 - 1} \tag{5}$$

Geben Sie b explizit an.

(f) Bestimmen Sie formelmäßig die Verstärkung $a_{v,ges2}$ in dB der Schaltung aus Aufgabenteil e). Zeichen Sie den zugehörigen Amplitudengang in Diagramm 6.3 (Amplitudengang 2) ein. Zeichnen Sie auch die Kurven der Summanden ein, die durch grafische Addition die Kurve der Schaltung ergeben. (3 Punkte)
Hinweis: Nehmen Sie für die Berechnung von $a_{v,ges2}$ bzw. für das Zeichnen des Amplitudengangs an, dass b vernachlässigbar klein ist.

(g) Bestimmen Sie nun formelmäßig die Gesamtphase ϕ_{ges2} der Schaltung aus Aufgabenteil e). Zeichen Sie den zugehörigen Phasengang in Diagramm 6.4 (Phasengang 2) ein. Zeichnen Sie auch die Kurven der Summanden ein, die durch grafische Addition die Kurve der Schaltung ergeben. (3 Punkte)
Hinweis: Nehmen Sie für die Berechnung von ϕ_{ges2} bzw. für das Zeichnen des Phasenganges ***nicht*** *an, dass b vernachlässigbar klein ist. Es kann einfacher sein, sich nur den Ausdruck für das Argument anzuschauen und zu überlegen, wie die Phase für sehr kleine Ω_2, für sehr große Ω_2 und für den Fall $\Omega_2 = 1$ aussieht.*

(h) Um welche Art von Filterschaltung handelt es sich hierbei? Geben Sie hierzu mindestens 2 beschreibende charakterisierende Merkmale/Begriffe an und erläutern Sie, wieso Sie sich für diese entschieden haben. (2 Punkte)

(i) Nehmen Sie nun nicht mehr an, dass b vernachlässigbar klein ist. Beschreiben Sie, wie und in welchem Bereich sich der Amplitudengang der Schaltung qualitativ verändert. Nennen Sie auch die Eigenschaft eines Schwingkreises, die direkt mit dem Parameter b verknüpft ist. (1 Punkt)

Lösung:

(a) Wir stellen die Übertragungsfunktion auf:

$$\underline{G}_1(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{j\omega L_1}{j\omega L_1 + R_1} = \frac{j\omega\frac{L_1}{R_1}}{j\omega\frac{L_1}{R_1} + 1} \tag{6}$$

Nun normieren wir mit $\Omega_1 = \frac{\omega}{\omega_{n1}}$ mit $\omega_{n1} = \frac{R_1}{L_1}$

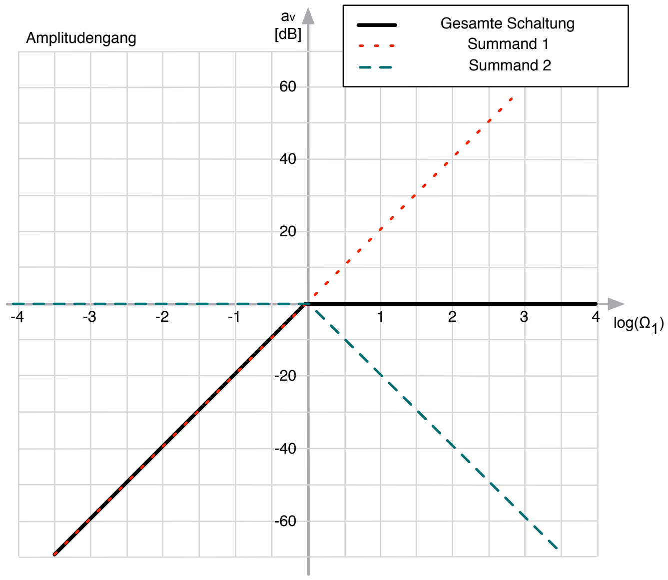
$$\underline{G}_{1,n}(j\Omega) = \frac{j\Omega_1}{j\Omega_1 + 1} \tag{7}$$

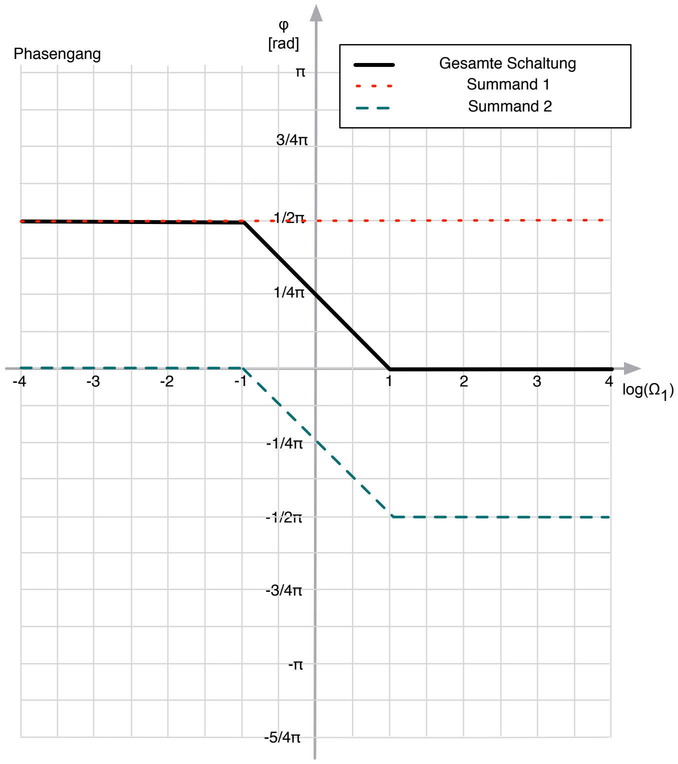
(b) Die Gleichungen für $a_{v,ges1}$ und ϕ_{ges1} lauten:

$$\begin{aligned} a_{v,ges1} &= 20 \cdot \log\left(\left|\frac{j\Omega_1}{j\Omega_1 + 1}\right|\right) = 20 \cdot \log(|j\Omega_1|) - 20 \cdot \log(|j\Omega_1 + 1|) \\ &= 20 \cdot \log(\Omega_1) - 20 \cdot \log\left(\sqrt{\Omega_1^2 + 1}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \phi_{ges1} &= \arg\left\{\frac{j\Omega_1}{j\Omega_1 + 1}\right\} = \arg\{j\Omega_1\} - \arg\{j\Omega_1 + 1\} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\Omega_1}{1}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan(\Omega_1) \end{aligned} \tag{9}$$

Die Bodediagramme sind hier gezeigt:



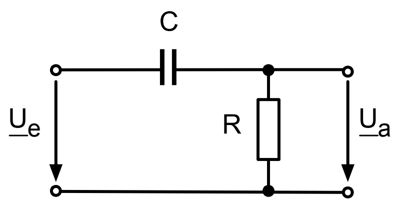


(c) Die die $-3\,\mathrm{dB}$-Grenzfrequenz liegt am Knickpunkt des Bodediagramms, also bei $\log(\Omega_1) = 0$ bzw. dann bei $\Omega_1 = \Omega_{g1} = 1$ Wir wissen aus der Normierung, dass

$$\Omega_{g1} = \omega_g \frac{L_1}{R_1} = 2\pi f_g \frac{L_1}{R_1} \Leftrightarrow L_1 = \frac{\Omega_{g1}}{2\pi f_g} R_1 \tag{10}$$

Setzt man nun $\Omega_{g1} = 1$ und die Angaben aus der Aufgabenstellung $f_g = 1\,\mathrm{Hz}$ und $R_1 = 1\,\Omega$ ein, lässt sich ausrechnen: $L_1 = \frac{1}{2\pi 1\,\mathrm{Hz}} \cdot 1\,\Omega = 159,51\,\mathrm{mH}$

(d) Man erkennt z.B. anhand des Amplitudengangs, dass niedrige Frequenzen gedämpft und hohe durchgelassen werden. Es handelt sich also hierbei um einen (passiven) Hochpass (erster Ordnung). Der Übungsleiter hat also Unrecht. Die alternative Schaltung kommt mit einem Kondensator und einem Widerstand aus:



(e) Wir stellen die Übertragungsfunktion auf:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{j\omega L_1}{j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + R_1} = \frac{-\omega^2 L_1 C_1}{-\omega^2 L_1 C_1 + j\omega R_1 C_1 + 1} \tag{11}$$

Nun normieren wir mit $\Omega_2 = \frac{\omega}{\omega_{n2}} = \sqrt{L_1 C_1}\omega$, erweitern den Bruch mit -1 und erhalten:

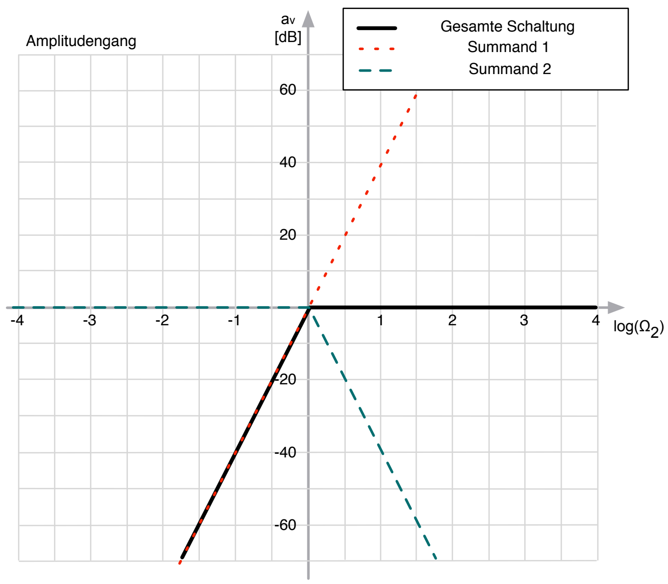
$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{\Omega_2^2}{\Omega_2^2 - j\frac{R_1 C_1}{\sqrt{L_1 C_1}}\Omega_2 - 1} = \frac{\Omega_2^2}{\Omega_2^2 - jb\Omega_2 - 1} \tag{12}$$

Es gilt also $b = \frac{R_1 C_1}{\sqrt{L_1 C_1}}$.

(f) Die Gleichung für den Amplitudengang lautet wie folgt, wenn man den Summanden mit b, wie im Hinweis angegeben, direkt vernachlässigt:

$$a_{v,ges2} = 20 \cdot \log\left(\left|\frac{\Omega_2^2}{\Omega_2^2 - 1}\right|\right) = 20 \cdot \log\left(\left|\Omega_2^2\right|\right) - 20 \cdot \log\left(\left|\Omega_2^2 - 1\right|\right) \tag{13}$$

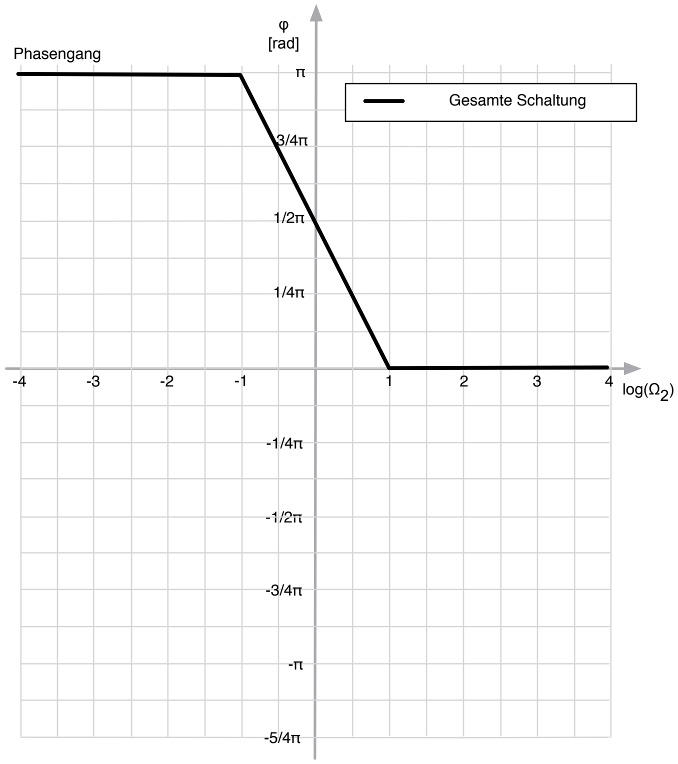
Der Amplitudengang sieht wie folgt aus:



(g) Der Phasengang ergibt sich mit dem Hinweis zu folgender Gesamtgleichung (der Einfachheit halber wird hier mit b gerechnet):

$$\begin{aligned}\phi_{ges2} &= \arg\left(\frac{\Omega_2^2}{\Omega_2^2 - jb\Omega_2 - 1}\right) = \arg\left(\Omega_2^2\right) - \arg(\Omega_2^2 - jb\Omega_2 - 1) \\ &= -\arg(\Omega_2^2 - jb\Omega_2 - 1)\end{aligned} \tag{14}$$

Der Phasengang sieht wie folgt aus:



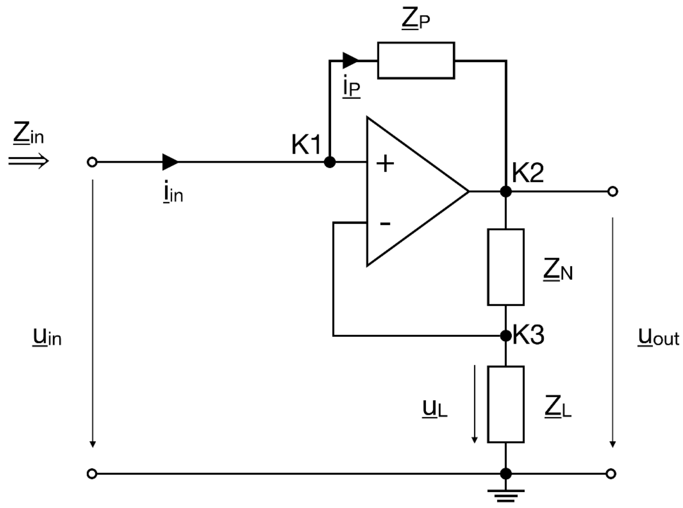
Der Verlauf der Phase ist so zu erklären: Für ein sehr großes Ω_2 überwiegt der Realtteil im Argument. Die Phase geht also gegen 0. Für ein sehr kleines Ω_2 überwiegt der Summand -1 allen anderen Summanden. Die zugehörige Phase ist $\pm\pi$. Im Bereich dazwischen, also wenn $\Omega_2 = 1$ überwiegt der Imaginärteil. Dessen Phase ist $-\frac{\pi}{2}$. Beachtet man nun das Minus vor dem Argument, ergibt sich der oben gezeigte Phasenverauf.

(h) Es handelt sich um einen passiven Hochpass 2. Ordnung. Passiv, da nur passive Bauteile verwendet werden. Hochpass, da tiefe Frequenzen gedämpft und hohe durchgelassen werden. 2. Ordnung, da der Abfall im Amplitudengang 40 dB/Dekade beträgt.

(i) Je größer b, desto höher ist die Überschwingung im Bereich zwischen $\Omega_2 = 0,1$ und $\Omega_2 = 10$, bzw. $\log(\Omega_2) = -1$ und $\log(\Omega_2) = 1$. b ist direkt mit der Güte des Schwingkreises verknüpft.

Aufgabe 7 **(13 Punkte)**
Operationsverstärker

Die nachfolgend abgebildete Operationsverstärkerschaltung setzt sich aus einem idealen Operationsverstärker in dominanter Gegenkopplung sowie den drei Impedanzen $\underline{Z}_P$, $\underline{Z}_N$ und $\underline{Z}_L$ zusammen:



Alle nachfolgenden Aufgabenteile beziehen sich auf die oben abgebildete Schaltung:

(a) Welches Potential liegt am Knoten K1 an? Welches Potential liegt am Knoten K3 an? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)
Stellen Sie einen Zusammenhang her zwischen $\underline{u}_{in}$ und $\underline{u}_L$ in der Form $\underline{u}_{in}(\underline{u}_L) =$.

(b) Stellen Sie die Übertragungsfunktion $\frac{\underline{u}_{out}}{\underline{u}_{in}}$ der Schaltung mit Hilfe der Spannungsteiler-Regel auf. (1 Punkt)

(c) Was gilt für den Eingangswiderstand eines idealen Operationsverstärkers? (1 Punkt)

(d) Stellen Sie eine Gleichung für den Eingangsstrom $\underline{i}_{in}$ in Abhängigkeit von $\underline{Z}_P$, $\underline{u}_{in}$ und $\underline{u}_{out}$ auf. Begründen Sie. (1 Punkt)

Die folgenden Teilaufgaben sind unabhängig von den vorherigen lösbar.

Die Eingangsimpedanz der Schaltung lässt sich nun als Quotient aus Eingangsspannung und Eingangsstrom berechnen. Nach Umformung und Vereinfachung erhält man die Eingangsimpedanz

$$\underline{Z}_{in} = -\frac{\underline{Z}_P}{\underline{Z}_N} \cdot \underline{Z}_L = B \cdot \underline{Z}_L.$$

Die gegebene Schaltung stellt also einen Impedanzwandler dar, der eine Lastimpedanz $\underline{Z}_L$ in die Impedanz $\underline{Z}_{in}$ am Eingang der Schaltung umwandelt.

(e) Eine gegebene Lastimpedanz $\underline{Z}_L = 3\,\Omega + 2j\,\Omega$ soll nun mit Hilfe der obigen Schaltung in die Impedanz $\underline{Z}_{in} = 4\,\Omega - 6j\,\Omega$ umgewandelt werden. Bestimmen Sie den Quotienten $B = -\frac{\underline{Z}_P}{\underline{Z}_N}$. Vereinfachen Sie unter Angabe des Rechenweges so weit wie möglich. Geben Sie Real- und Imaginärteil des Quotienten B an. (3 Punkte)

(f) Es gelten weiterhin die Angaben aus dem vorangegangenen Aufgabenteil. Es sei nun $\underline{Z}_N = -5j\,\Omega$. Berechnen Sie $\underline{Z}_P$ mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus Aufgabenteil (e). Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. (1 Punkt)

(g) Wählen Sie für $\underline{Z}_N$ und $\underline{Z}_P$ aus dem vorangegangenen Aufgabenteil jeweils ein lineares Bauelement der Elektrotechnik aus, mit dem die Impedanz realisiert werden kann. Nennen Sie den Namen des jeweiligen Bauelements und begründen Sie Ihre Wahl. Die Bauelemente sollen nicht dimensioniert werden. (2 Punkte)

(h) Es sei nun $\underline{Z}_P \to \infty$. Wird der Operationsverstärker in dominanter Mitkopplung oder in dominanter Gegenkopplung betrieben? Begründen Sie. (1 Punkt)

(i) Es gelte weiterhin $\underline{Z}_P \to \infty$. $\underline{Z}_N$ und $\underline{Z}_L$ seien nun reelle Widerstände. Geben Sie den Namen der nun vorliegenden Schaltung an. (1 Punkt)

Lösung:

(a) Am positiven Eingang des Operationsverstärkers (K1) liegt die Eingangsspannung $\underline{u}_{in}$ an.
Beim idealen Operationsverstärker in Gegenkopplung gilt $U_P = U_N$ bzw. $U_d = 0$.
Daher liegt auch am negativen Eingang des Operationsverstärkers (K3) die Eingangsspannung $\underline{u}_{in}$ an und es gilt:

$$\underline{u}_{in} = \underline{u}_L$$

(b)

$$\frac{\underline{u}_{out}}{\underline{u}_{in}} = \frac{\underline{Z}_N + \underline{Z}_L}{\underline{Z}_L}$$

(c) Der Eingangswiderstand eines idealen Operationsverstärkers ist sehr groß.

(d) Da kein Strom in den idealen Operationsverstärker hineinfließt, fließt $\underline{i}_{in}$ auch durch $\underline{Z}_P$. Gleichzeitig fällt die Differenz der Spannungen $\underline{u}_{in}$ und $\underline{u}_{out}$ über $\underline{Z}_P$ ab. Es folgt:

$$\underline{i}_{in} = \frac{\underline{u}_{in} - \underline{u}_{out}}{\underline{Z}_P}$$

(e)

$$\begin{aligned}
B = -\frac{\underline{Z}_P}{\underline{Z}_N} &= \frac{\underline{Z}_{in}}{\underline{Z}_L} \\
&= \frac{4\,\Omega - 6j\,\Omega}{3\,\Omega + 2j\,\Omega} \\
&= \frac{(4\,\Omega - 6j\,\Omega)\cdot(3\,\Omega - 2j\,\Omega)}{(3\,\Omega + 2j\,\Omega)\cdot(3\,\Omega - 2j\,\Omega)} \\
&= \frac{12\,\Omega^2 - 8j\,\Omega^2 - 18j\,\Omega^2 - 12\,\Omega^2}{9\,\Omega^2 + 4\,\Omega^2} \\
&= -\frac{26j\,\Omega^2}{13\,\Omega^2} \\
&= -2j
\end{aligned}$$

Real- und Imaginärteil lassen sich direkt ablesen:

$$Im\left(B = -\frac{\underline{Z}_P}{\underline{Z}_N}\right) = -2$$
$$Re\left(B = -\frac{\underline{Z}_P}{\underline{Z}_N}\right) = 0$$

(f)
$$\underline{Z}_P = -\underline{Z}_N \cdot B = -\underline{Z}_N \cdot (-2j) = \underline{Z}_N \cdot 2j = -5j\,\Omega \cdot 2j = 10\,\Omega$$

(g) $\underline{Z}_P = 10\,\Omega$ ist rein reell und kann daher durch einen Widerstand realisiert werden.
$\underline{Z}_N = -5j\,\Omega = 5 \cdot \frac{1}{j}\,\Omega$ lässt sich durch eine Kapazität realisieren ($\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$).

(h) Es herrscht Gegenkopplung vor, da der Ausgang des Operationsverstärkers immer noch auf den invertierenden Eingang zurückgekoppelt ist.

(i) Nichtinvertierender Spannungsverstärker.