Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel   Übungsleiter: M.Sc. Nicolas Pilia

Klausur

02. April 2019
Beginn: 13:00 Uhr

Familienname:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

AUFKLEBER

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem nicht programmierbaren Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein!
Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare!
Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

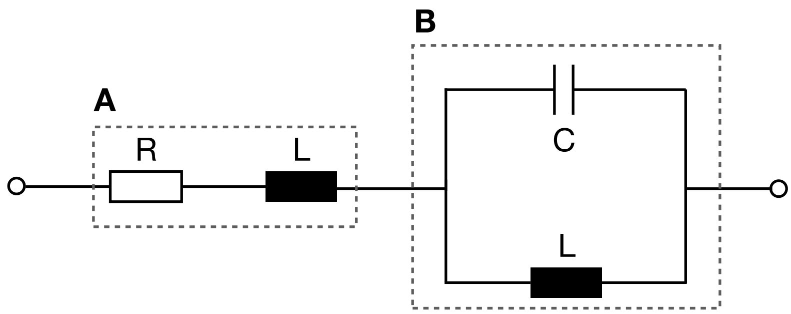
Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	20	
2	14	
3	22	
4	23	
5	15	
Gesamt:	94	

Note:________

Aufgabe 1 (20 Punkte)
Ortskurve

Gegeben sei die folgende Schaltung:



(a) Berechnen Sie (2 Punkte)
- die Admittanz $Y_{\mathbf{A}}(\omega)$ der Teilschaltung **A**.
- die Impedanz $Z_{\mathbf{B}}(\omega)$ der Teilschaltung **B**.

(b) Zeichnen Sie nun die Ortskurven (6 Punkte)
- der Impedanz $Z_{\mathbf{A}}(\omega)$ in Diagramm 1.1.
- der Admittanz $Y_{\mathbf{A}}(\omega)$ in Diagramm 1.2.
- der Impedanz $Z_{\mathbf{B}}(\omega)$ in Diagramm 1.3.
- der Admittanz $Y_{\mathbf{B}}(\omega)$ in Diagramm 1.4.

Markieren Sie in allen Ortskurven die Punkte $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ und beschriften Sie die Achsen.

(c) Berechnen Sie die Impedanz $Z_{\mathbf{ges}}(\omega)$ der Gesamtschaltung und deren Grenzwerte für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$. (2 Punkte)

(d) Berechnen Sie die Resonanzfrequenz ω_0 der Gesamtschaltung. (4 Punkte)

(e) Verändern Sie Teilschaltung **B** durch Hinzufügen eines Widerstands R so, dass sich die folgende Admittanz $Y_{\mathbf{B2}}(\omega)$ ergibt: (3 Punkte)

$$Y_{\mathbf{B2}}(\omega) = \frac{R + j\omega\left[CR^2 + C(\omega L)^2 - L\right]}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Zeichnen Sie die veränderte Teilschaltung und beweisen Sie $Y_{\mathbf{B2}}(\omega)$ mathematisch.

(f) Berechnen Sie die Impedanz $Z_{\mathbf{ges2}}(\omega)$ der neuen Gesamtschaltung mit $Y_{\mathbf{B2}}(\omega)$ und trennen Sie den Ausdruck nach Real- und Imaginärteil. (3 Punkte)
Hinweis: Trennen Sie zunächst die Impedanzen der Teilschaltungen $Z_{\mathbf{A}}(\omega)$ und $Z_{\mathbf{B2}}(\omega)$ nach Real- und Imaginärteil.

Lösung:

(a) Die Impedanz $Z_{\mathbf{A}}(\omega)$ ist eine Serienschaltung aus dem Widerstand R und der Induktivität L:

$$Z_{\mathbf{A}}(\omega) = R + j\omega L \tag{1}$$

Damit ergibt sich für die Admittanz $Y_{\mathbf{A}}(\omega)$:

$$Y_{\mathbf{A}}(\omega) = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \tag{2}$$

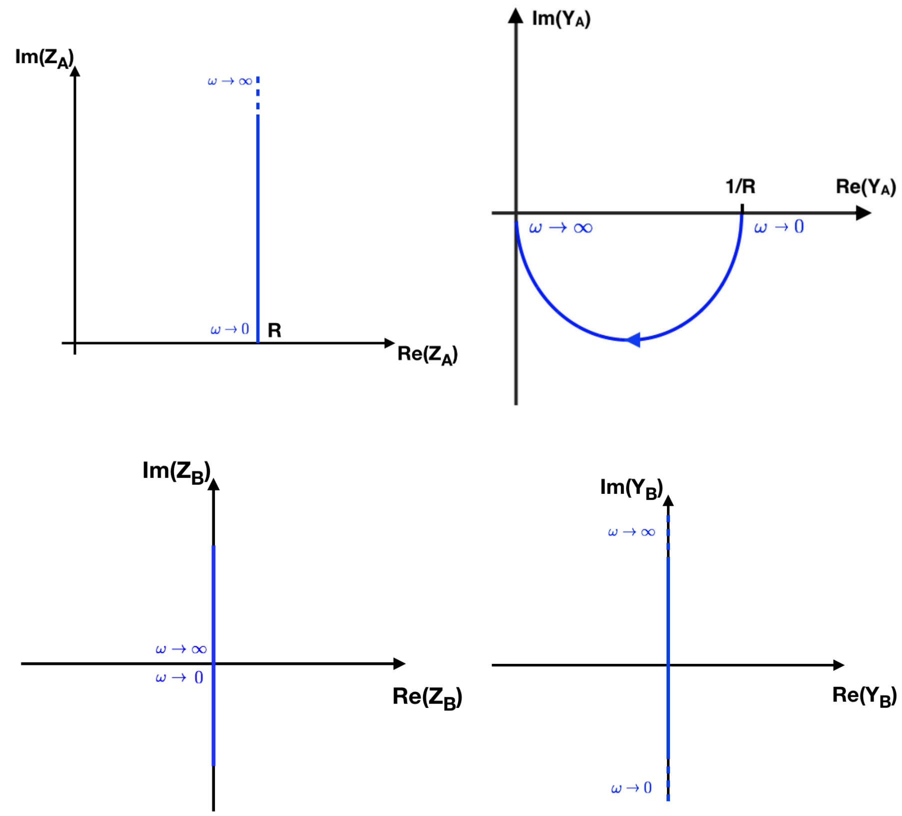
Die Impedanz $Z_{\mathbf{B}}(\omega)$ kann wie folgt bestimmt werden:

$$Z_{\mathbf{B}}(\omega) = j\omega L \,||\frac{1}{j\omega C} \tag{3}$$

$$= \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} \tag{4}$$

$$= \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC} \tag{5}$$

(b)



(c) Die Impedanz der Gesamtschaltung setzt sich aus der Serienschaltung der Impedanzen $Z_{\mathbf{A}}(\omega)$ und $Z_{\mathbf{B}}(\omega)$ der beiden Teilschaltungen **A** und **B** zusammen. Daher:

$$Z_{\mathbf{ges}}(\omega) = Z_{\mathbf{A}}(\omega) + Z_{\mathbf{B}}(\omega) \tag{6}$$

Für die Impedanz der Gesamtschaltung ergibt sich aus den Gleichungen (6), (1) und (5) die folgende Gleichung:

$$Z_{\mathbf{ges}}(\omega) = R + j\omega L + \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC} = R + j\omega L\left(1 + \frac{1}{1-\omega^2 LC}\right) \tag{7}$$

Für $\omega \to 0$ folgt $Z_{\mathbf{ges}}(\omega) \to R$. Für $\omega \to \infty$ folgt $Z_{\mathbf{ges}}(\omega) \to R + j\infty$.

(d) Bei der Resonanzfrequenz ist der Imaginärteil der Impedanz null:

$$\mathrm{Im}\{Z_{\mathbf{ges}}(\omega_0)\} = 0 \tag{8}$$

Daraus folgt:

$$\omega_0 L\left(1 + \frac{1}{1-\omega_0^2 LC}\right) = 0 \tag{9}$$

Mathematisch ergeben sich folgende Lösungen:

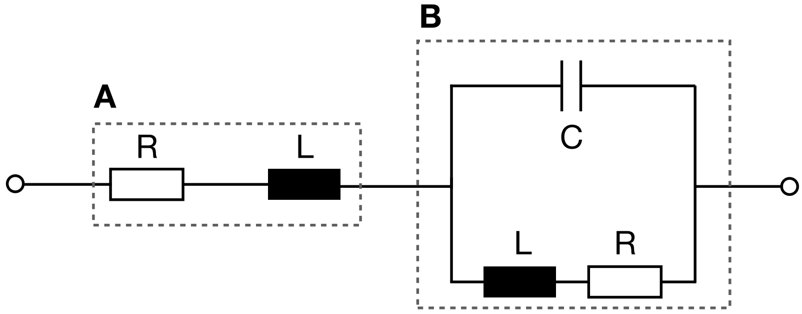
$$\omega_{0_1} = 0 \tag{10}$$

$$\omega_{0_{2,3}} = \pm\sqrt{\frac{2}{LC}} \tag{11}$$

Da die Resonanzfrequenz nicht null oder negativ sein kann, verbleibt als einzige gültige Lösung:

$$\omega_{0_2} = \sqrt{\frac{2}{LC}} \tag{12}$$

(e) Der Widerstand R muss zur Spule L in Reihe geschaltet werden:



Um den gegeben Ausdruck zu beweisen, leiten wir die neue Admittanz $Y_{\mathbf{B2}}(\omega)$ her:

$$\begin{aligned} Y_{\mathbf{B2}}(\omega) = Y_C(\omega) + Y_{RL}(\omega) = j\omega C + \frac{1}{j\omega L + R} &= \\ = \frac{R + j\omega\left[CR^2 + C(\omega L)^2 - L\right]}{R^2 + (\omega L)^2} \end{aligned}$$

(f) Die Impedanz der Teilschaltung **A** ist:

$$Z_{\mathbf{A}}(\omega) = R + j\omega L$$

Die Impedanz der Teilschaltung **B2** ist:

$$\begin{aligned} Z_{\mathbf{B2}}(\omega) &= \frac{R^2 + (\omega L)^2}{R + j\omega\left[CR^2 + C(\omega L)^2 - L\right]} \\ &= \frac{R\left[R^2 + (\omega L)^2\right]}{R^2 + \omega^2[CR^2 + C(\omega L)^2 - L]^2} \\ &\quad - j\frac{\omega\left[CR^2 + C(\omega L)^2 - L\right]\left[R^2 + (\omega L)^2\right]}{R^2 + \omega^2[CR^2 + C(\omega L)^2 - L]^2} \end{aligned}$$

Die Impedanz der Gesamtschaltung ist die Summe der Teilimpedanzen:

$$Z_{\mathbf{ges2}}(\omega) = Z_{\mathbf{A}}(\omega) + Z_{\mathbf{B2}}(\omega)$$

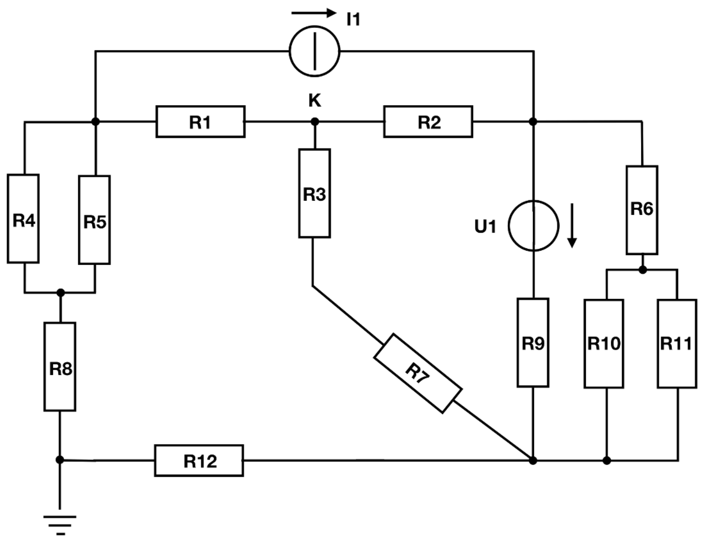
Damit ergibt sich für den Real- und Imaginärteil der Gesamtimpedanz:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{Z_{\mathbf{ges2}}(\omega)\} &= R + \frac{R\left[R^2 + (\omega L)^2\right]}{R^2 + \omega^2[CR^2 + C(\omega L)^2 - L]^2} \\ \mathrm{Im}\{Z_{\mathbf{ges2}}(\omega)\} &= \omega L - \frac{\omega\left[CR^2 + C(\omega L)^2 - L\right]\left[R^2 + (\omega L)^2\right]}{R^2 + \omega^2[CR^2 + C(\omega L)^2 - L]^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 **(14 Punkte)**
Netzwerk

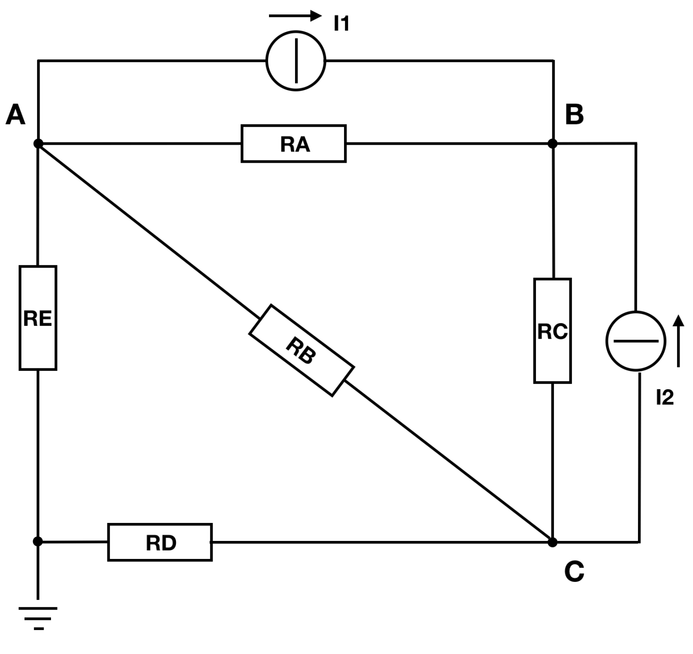
Gegeben sind die folgenden beiden Schaltungen:

Schaltung 1



$$U1 = \frac{135}{19}\,V, \quad I1 = \frac{3}{2}\,A$$
$$R1 = unbekannt, \quad R2 = \frac{3}{16}\,\Omega, \quad R3 = \frac{1}{4}\,\Omega, \quad R4 = R5 = \frac{1}{3}\,\Omega, \quad R6 = 8\,\Omega,$$
$$R7 = \frac{1}{2}\,\Omega, \quad R8 = \frac{1}{6}\,\Omega, \quad R9 = \frac{30}{19}\,\Omega, \quad R10 = 3\,\Omega, \quad R11 = 6\,\Omega, \quad R12 = \frac{1}{3}\,\Omega$$

Schaltung 2



$$RA = \frac{1}{4}\,\Omega, \quad RB = 1\,\Omega, \quad RC = 1\,\Omega, \quad RD = \frac{1}{3}\,\Omega, \quad RE = \frac{1}{3}\,\Omega$$

(a) In Schaltung 1 befinden sich eine Strom- und eine Spannungsquelle. Skizzieren (mit Achsenbeschriftung) Sie den Spannungsverlauf einer realen Spannungsquelle über dem Strom bei variierender Last und benennen und erklären Sie die Bedeutung der Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems. (2 Punkte)

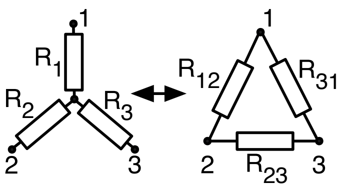
(b) Nun soll Schaltung 1 in Schaltung 2 umgeformt werden. Führen Sie hierzu folgende Schritte zur Vereinfachung des Netzwerkes durch: (5 Punkte)

i) Fassen Sie zeichnerisch alle parallelen und in Reihe liegenden Widerstände soweit wie möglich zusammen. Es muss keine Quellenumwandlung durchgeführt werden. Es sollen keine Zahlenwerte berechnet werden. Zeichnen Sie nur das vereinfachte Schaltbild.

ii) Führen Sie zeichnerisch eine Stern-Dreiecks-Transformation am Knoten K durch. Zeichnen Sie nur das resultierende Schaltbild. Setzen Sie noch keine Zahlenwerte ein.

iii) Führen Sie nun (falls zur Überführung der Schaltung aus dem vorigen Aufgabenteil ii) in Schaltung 2 nötig) eine Quellenumwandlung durch und vereinfachen Sie anschließend soweit wie möglich. Zeichnen Sie nur das resultierende Schaltbild. Setzen Sie immer noch keine Zahlenwerte ein.

iv) Berechnen Sie nun mit Hilfe der Stern-Dreiecks-Transformation den Wert des Widerstandes R1.



$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{12} = R_1 + R_2 + R_1\frac{R_2}{R_3}$$

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{23} = R_2 + R_3 + R_2\frac{R_3}{R_1}$$

$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{31} = R_3 + R_1 + R_3\frac{R_1}{R_2}$$

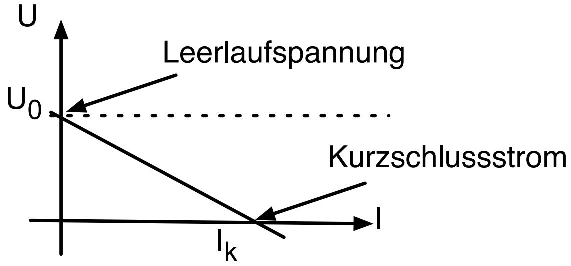
(c) Das Netzwerk soll nun mit dem Knotenpunktpotentialverfahren gelöst werden. Stellen Sie dazu das Gleichungssystem in Matrixform für die Punkte A, B und C in Schaltung 2 auf. Stellen Sie die Matrix allgemein auf und setzen Sie dann Werte ein. (2 Punkte)

(d) Lösen Sie das Gleichungssystem der 3x3 Matrix aus der vorigen Teilaufgabe mit Hilfe der Cramerschen Regel. Berechnen Sie dabei schriftlich für mindestens einen Knotenpunkt alle Determinanten. Geben Sie alle Potentiale der Knotenpunkte an. Runden Sie dabei auf 3 Nachkommastellen. (5 Punkte)

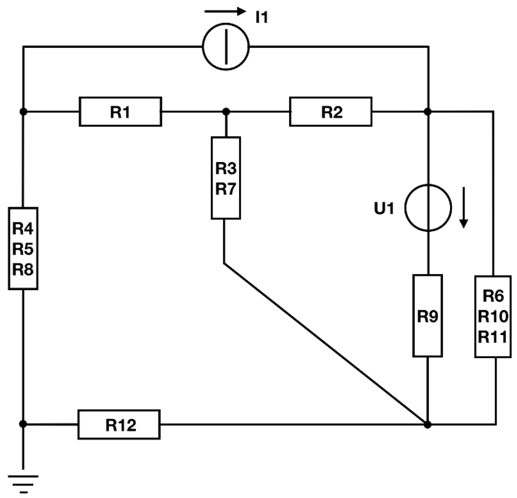
Lösung:

(a) Vergleiche mit Skript Seite 24, oben:

Wird der Widerstand auf einen sehr großen Wert eingestellt, so geht der Strom gegen Null und die Leerlaufspannung U_0 liegt an den Klemmen der Quelle an. Ist der Widerstand extrem klein (Kurzschluss), so geht die Spannung gegen Null und der Kurzschlussstrom I_K fließt.

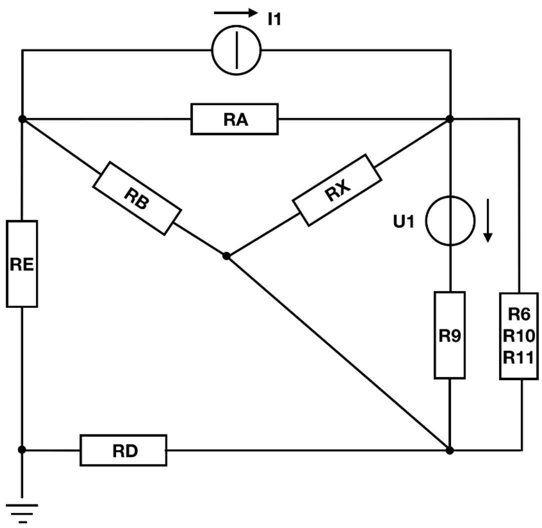


(b) i) Zusammenfassung der Widerstände ergibt:

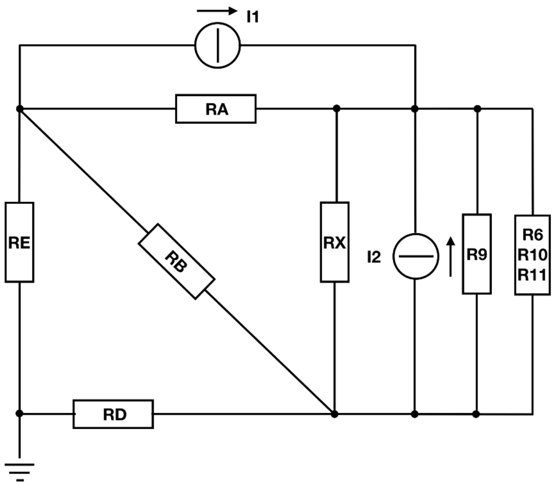


Dabei gilt R4R5R8 = R8 + R4||R5 = RE, R3R7 = R3+R7 und R6R10R11 = R6 + R10||R11.

ii) Stern-Dreieck-Transformation



iii) Quellenumwandlung



Zusammenfassen von RC = RX||R9||R6R10R11 ergibt schließlich Schaltung 2.

iv) Zurückrechnung aus der Stern-Dreiecks-Transformation.
Ausgehend von der Gleichung für Widerstand RB:

$$RB = R1 + (R3 + R7) + \frac{R1 \cdot (R3 + R7)}{R2}$$
$$R2 \cdot RB = R1 \cdot R2 + R3 \cdot R2 + R7 \cdot R2 + R1 \cdot (R3 + R7)$$
$$R1 \cdot R2 + R1 \cdot (R3 + R7) = R2 \cdot RB - R2 \cdot R3 - R2 \cdot R7$$
$$R1 = \frac{R2 \cdot (RB - R3 - R7)}{R2 + R3 + R7} = \frac{1}{20}\,\Omega$$

Alternative Vorgehensweise:
Ausgehend von der Gleichung für Widerstand RA:

$$RA = R1 + R2 + \frac{R1 \cdot R2}{R3 + R7}$$
$$RA \cdot (R3 + R7) = R1 \cdot (R3 + R7) + R2 \cdot (R3 + R7) + R1 \cdot R2$$
$$R1 = \frac{(RA - R2) \cdot (R3 + R7)}{R2 + R3 + R7} = \frac{1}{20}\,\Omega$$

(c) Es gilt $i = G \cdot V$.

$$G = \begin{pmatrix} GA + GB + GE & -GA & -GB \\ -GA & GA + GC & -GC \\ -GB & -GC & GB + GC + GD \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4+1+3 & -4 & -1 \\ -4 & 4+1 & -1 \\ -1 & -1 & 1+1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 \\ -4 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$
$$i = \begin{pmatrix} -I1 \\ I1 + I2 \\ -I2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 6 \\ -4,5 \end{pmatrix} \text{ wegen } I2 = \frac{U1}{R9} = \frac{135}{19} \cdot \frac{19}{30} = 4,5A$$

(d) Die Determinante der Matrix wurde hier mit der Regel von Sarrus berechnet:

$$
\begin{aligned}
D = det(G) &= 8 \cdot (25-1) - (-4) \cdot (-20-1) + (-1) \cdot (4-(-5)) \\
&= 8 \cdot 24 - 4 \cdot 21 - 9 = 192 - 84 - 9 = 99S^3
\end{aligned}
$$

Knotenpunkt 1:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \det \begin{pmatrix} -1,5 & -4 & -1 \\ 6 & 5 & -1 \\ -4,5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \\
&= -1,5 \cdot (25-1) - 6 \cdot (-20-1) - 4,5 \cdot (4+5) \\
&= -1,5 \cdot 24 + 6 \cdot 21 - 4,5 \cdot 9 = -36 + 126 - 40,5 = 49,5A \cdot S^2 \\
V_A &= \frac{D_1}{D} = \frac{49,5}{99} = 0,5\frac{A \cdot S^2}{S^3} = 0,5\frac{A}{S} = 0,5\frac{A}{\frac{1}{\Omega}} = 0,5A \cdot \Omega = 0,5V
\end{aligned}
$$

Knotenpunkt 2:

$$
\begin{aligned}
D_2 &= \det \begin{pmatrix} 8 & -1,5 & -1 \\ -4 & 6 & -1 \\ -1 & -4,5 & 5 \end{pmatrix} \\
&= 8 \cdot (30-4,5) + 4 \cdot (-7,5-4,5) - 1 \cdot (1,5+6) \\
&= 8 \cdot 25,5 - 4 \cdot 12 - 1 \cdot 7,5 = 204 - 48 - 7,5 = 148,5A \cdot S^2 \\
V_B &= \frac{D_2}{D} = \frac{148,5}{99} = 1,5V
\end{aligned}
$$

Knotenpunkt 3:

$$
\begin{aligned}
D_3 &= \det \begin{pmatrix} 8 & -4 & -1,5 \\ -4 & 5 & 6 \\ -1 & -1 & -4,5 \end{pmatrix} \\
&= 8 \cdot (-22.5+6) + 4 \cdot (18-1,5) - 1 \cdot (-24+7,5) \\
&= -8 \cdot 16,5 + 4 \cdot 16,5 + 1 \cdot 16,5 = -132 + 66 + 16,5 = -49,5A \cdot S^2 \\
V_C &= \frac{D_3}{D} = \frac{-49,5}{99} = -0,5V
\end{aligned}
$$

Somit gilt $V = \begin{bmatrix} 0,5 & 1,5 & -0,5 \end{bmatrix} V$

Aufgabe 3 **(22 Punkte)**

Wechselstromlehre

Hörgeräte gibt es in verschiedenen Ausführungen, z.B. auch als Paar, das linkes und rechtes Ohr unterstützt. Ein großer Vorteil von dieser Art ist, dass Informationen von beiden Seiten kombiniert werden können, um Hintergrundgeräusche herauszufiltern und nicht zu verstärken. Hierfür müssen die Ohrteile allerdings miteinander kommunizieren. Dies geschieht i.d.R. durch Induktion. Dieses Verhalten kann mit Hilfe eines Transformators modelliert werden:

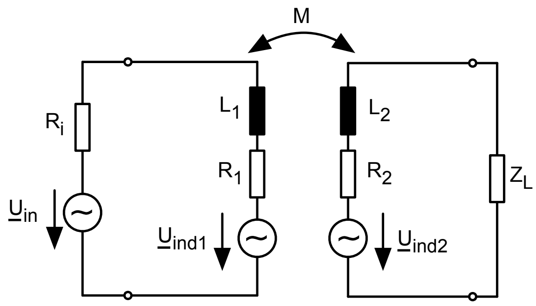


Abbildung 1: Ersatzschaltbild zweier Ohrteile.

Um einen optimalen Leistungsfluss zu erreichen, werden auf Primär- und Sekundärseite jeweils zwei Kondensatoren (C_1 und C_2 bzw. C_3 und C_4) verwendet, um Leistungsanpassung zu erreichen. Durch Einbau der Kondensatoren ergibt sich das folgende Ersatzschaltbild:

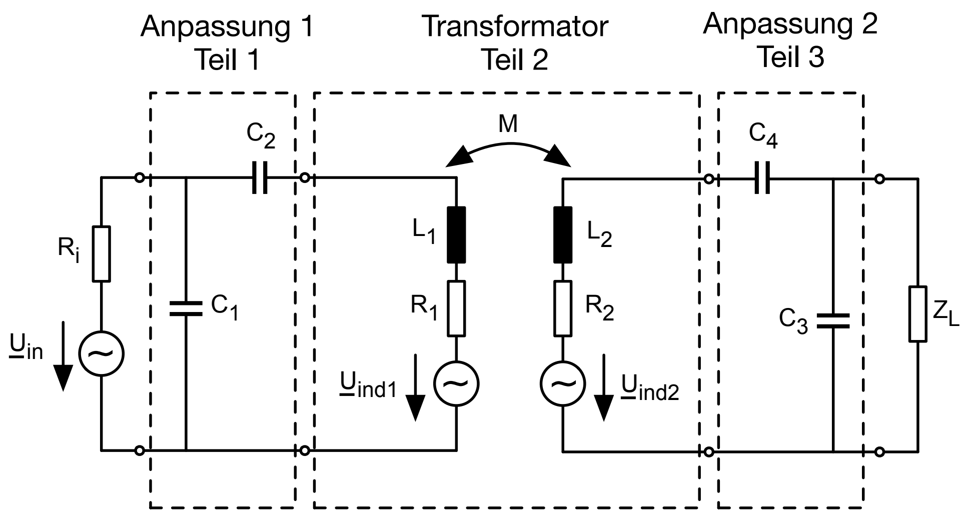
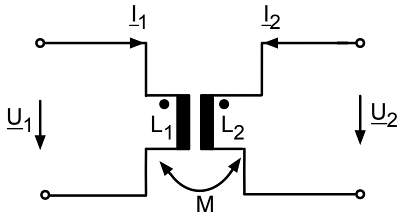


Abbildung 2: Angepasstes Ersatzschaltbild zweier Ohrteile.

Im Folgenden soll dieses System bestehend aus Teil 1, 2 und 3 durch Vierpol-Matrizen beschrieben werden.

Es ist bekannt, dass für den idealen Transformator das Folgende gilt:



$$\underline{U}_1 = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = j\omega M \underline{I}_1 + j\omega L_2 \underline{I}_2$$

Außerdem kennt man den Zusammenhang von Kettenmatrix und Impedanzmatrix:

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} & \frac{det\ \underline{Z}}{\underline{Z}_{21}} \\ \frac{1}{\underline{Z}_{21}} & \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} \end{bmatrix}$$

Gehen Sie in den folgenden Aufgaben vom angepassten Ersatzschaltbild (Abbildung 2) aus. Gehen Sie weiterhin davon aus, dass der Eingang der Schaltung links und der Ausgang der Schaltung rechts ist.

(a) Welche Gleichung muss erfüllt sein, damit die reale Quelle ($\underline{U}_{in}$ mit Innenwiderstand R_i) an die Last (Anpassungsteil 1 und Transformator) angepasst ist? (1 Punkt)
Hinweis: Stellen Sie nur eine Gleichung auf ohne diese zu vereinfachen; lösen Sie keine Parallel- oder Reihenschaltungen auf.

(b) Wie sind die Koeffizienten der Kettenmatrix im Allgemeinen definiert? Zeigen Sie, dass die Kettenmatrix $[\underline{A}_T]$ für den Transformatorvierpol (Teil 2) wie folgt lautet: (4 Punkte)

$$[\underline{A}_T] = \begin{bmatrix} \frac{R_1+j\omega L_1}{j\omega M} & \frac{(R_1+j\omega L_1)(R_2+j\omega L_2)+\omega^2 M^2}{j\omega M} \\ \frac{1}{j\omega M} & \frac{R_2+j\omega L_2}{j\omega M} \end{bmatrix}$$

Stellen Sie hierzu die Kettenmatrix ohne Umwege über Impedanz- oder Admittanzmatrix auf.

(c) Wann ist ein Vierpol kopplungssymmetrisch? Zeigen Sie mithilfe der Kettenmatrix $[\underline{A}_T]$, dass der Transformatorvierpol (Teil 2) kopplungssymmetrisch ist. (2 Punkte)

(d) Zeigen Sie, dass die Impedanzmatrix $[\underline{Z}_{A1}]$ für den Anpassungsvierpol 1 (Teil 1) die folgende Form hat: (5 Punkte)

$$[\underline{Z}_{A1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{j\omega C_1} & \frac{1}{j\omega C_1} \\ \frac{1}{j\omega C_1} & \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} \end{bmatrix}$$

Zeigen Sie mithilfe von $[\underline{Z}_{A1}]$, dass auch der Anpassungsvierpol 1 (Teil 1) kopplungssymmetrisch ist.

(e) Nun sollen Anpassungsvierpol 1 (Teil 1) und Transformatorvierpol (Teil 2), wie in Abbildung 2 gezeigt, verbunden werden. Argumentieren Sie, wieso die Gesamtschaltung weiterhin kopplungssymmetrisch sein muss. Sie müssen hierzu nicht die Kettenmatrix der verbundenen Teile berechnen. (2 Punkte)

(f) Bestimmen Sie die Kettenmatrix $[\underline{A}_{A1T}]$ für die Zusammenschaltung von Anpassungsvierpol 1 (Teil 1) und Transformatorvierpol (Teil 2). (5 Punkte)
Hinweis: Führen Sie im letzten Schritt zur Berechnung von $[\underline{A}_{A1T}]$ keine Matrixoperationen durch, sondern zeigen Sie nur, wie $[\underline{A}_{A1T}]$ zu berechnen wäre.

(g) Bestimmen Sie aus der Kettenmatrix $[\underline{A}_{A1}]$ von Anpassungsvierpol 1 (Teil 1) die Kettenmatrix $[\underline{A}_{A2}]$ von Anpassungsvierpol 2 (Teil 3). (3 Punkte)
Hinweis: Hier ist explizit gefragt, wie man von $[\underline{A}_{A1}]$ auf $[\underline{A}_{A2}]$ kommt.

Lösung:

(a) Die Ersatzimpedanz der Last muss dem Innenwiderstand entsprechen:

$$R_i = \frac{1}{j\omega C_1} \Big|\Big| \left(\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_1 + R_1 \right) \tag{13}$$

(b) Die Matrixparameter werden wie folgt berechnet:

$$\underline{A}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{R_1 + j\omega L_1}{j\omega M} \tag{14}$$

Für $\underline{A}_{22}$ nutzen wir die 2. Trafogleichung und die Tatsache, dass $U_2 = 0$ ist und finden so einen Ausdruck für $\underline{I}_2$.

$$-j\omega M \underline{I}_1 = (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 \tag{15}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{-j\omega M}{(R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_1} \tag{16}$$

$$\underline{A}_{22} = -\left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_2=0} = \frac{R_2 + j\omega L_2}{j\omega M} \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

Für $\underline{A}_{12}$ nutzen wir die 2. Trafogleichung und die Tatsache, dass $U_2 = 0$ und finden so einen Ausdruck für $\underline{I}_1$. Diesen setzen wir in die erste Trafogleichung im Zähler ein:

$$-j\omega M \underline{I}_1 = (R_2 + j\omega L_2)\underline{I}_2 \tag{19}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{(R_2 + j\omega L_2)}{-j\omega M}\underline{I}_2 \tag{20}$$

$$\underline{A}_{12} = -\left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_2=0} = -\left.\frac{(R_1 + j\omega L_1)\underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_2=0}$$
$$= \frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{j\omega M} \tag{21}$$

Nun fehlt noch ein Element; hier nutzen wir die 2. Trafogleichung und den Fakt, dass $\underline{I}_2 = 0$:

$$\underline{A}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{1}{j\omega M} \tag{22}$$

(c) Ein Vierpol ist kopplungssymmetrisch, wenn $\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{12}$; dies ist äquivalent zu $det\left([\underline{A}]\right) = 1$. Wir müssen also zeigen, dass die Determinante der Kettenmatrix 1 ist:

$$det\left([\underline{A}_T]\right) = \frac{R_2 + j\omega L_2}{j\omega M} \cdot \frac{R_1 + j\omega L_1}{j\omega M} - \left(\frac{1}{j\omega M} \frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{j\omega M} \right) \tag{23}$$

$$= \frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2)}{-\omega^2 M^2} - \left(\frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{-\omega^2 M^2} \right) = 1 \tag{24}$$

(d) Die Elemente der $[\underline{Z}]$-Matrix werden wie folgt berechnet.

$$\underline{Z}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{1}{j\omega C_1} \tag{25}$$

$$\underline{Z}_{22} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} \tag{26}$$

$$\underline{Z}_{21} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{1}{j\omega C_1} \tag{27}$$

$$\underline{Z}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \frac{1}{j\omega C_1} \tag{28}$$

Man sieht, dass $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ ist. Deshalb ist auch dieser Schaltungsteil kopplungssymetrisch.

(e) Wir wissen, dass beide Schaltungsteile für sich kopplungssymmetrisch sind. Für die Zusammenschaltung der Schaltungsteile gilt $[\underline{A}_{A1T}] = [\underline{A}_{A1}] \cdot [\underline{A}_T]$. Wir wissen, dass für Determinanten gilt: $det([\underline{A}_{A1}] \cdot [\underline{A}_T]) = det([\underline{A}_{A1}]) \cdot det([\underline{A}_T])$. Da wir aus den vorherigen Aufgabenteilen wissen, dass die Einzeldeterminanten 1 sind, muss auch die Gesamtdeterminante 1 sein und somit ist die Schaltung kopplungssymmetrisch.

(f) Wir müssen zuerst die Impedanzmatrix aus Aufgabenteil c) in eine Kettenmatrix umschreiben:

$$\underline{A}_{11} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} = \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{\frac{1}{j\omega C_1}} = 1 \tag{29}$$

$$\underline{A}_{22} = \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} = \frac{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}}{\frac{1}{j\omega C_1}} = 1 + \frac{C_1}{C_2} \tag{30}$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_{21}} = j\omega C_1 \tag{31}$$

$$\underline{A}_{12} = \frac{det([\underline{Z}])}{\underline{Z}_{21}} = \frac{\frac{1}{j\omega C_1} \cdot \left(\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}\right) - \left(\frac{1}{j\omega C_1} \cdot \frac{1}{j\omega C_1}\right)}{\frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{1}{j\omega C_2} \tag{32}$$

$$[\underline{A}_{A1}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{j\omega C_2} \\ j\omega C_1 & 1 + \frac{C_1}{C_2} \end{bmatrix} \tag{33}$$

Nun reicht es, die Matrixteile zu multipizieren: $[\underline{A}_{A1T}] = [\underline{A}_{A1}] \cdot [\underline{A}_T]$. Die Berechnung soll laut Hinweis nicht durchgeführt werden!

(g) Anpassungsteil 2 entspricht vom Aufbau Anpassungsteil 1, allerdings sind Ein- und Ausgang der Schaltung vertauscht, sowie die Benennung der Bauteile unterschiedlich. Wir können $[\underline{A}_{A2}]$ aus $[\underline{A}_{A1}]$ berechnen, indem wir $[\underline{A}_{A1}]$ invertieren und die Bauteilbenennung ändern. Mit der Invertierungsformel für 2x2-Matrizen können wir die Inverse berechnen:

$$[\underline{A}_{A1}]^{-1} = \frac{1}{det([\underline{A}_{A1}])} \cdot \begin{bmatrix} \underline{A}_{22} & -\underline{A}_{12} \\ -\underline{A}_{21} & \underline{A}_{11} \end{bmatrix} \tag{34}$$

Wir wissen, dass $det([\underline{A}_{A1}]) = 1$. Also können wir direkt hinschreiben:

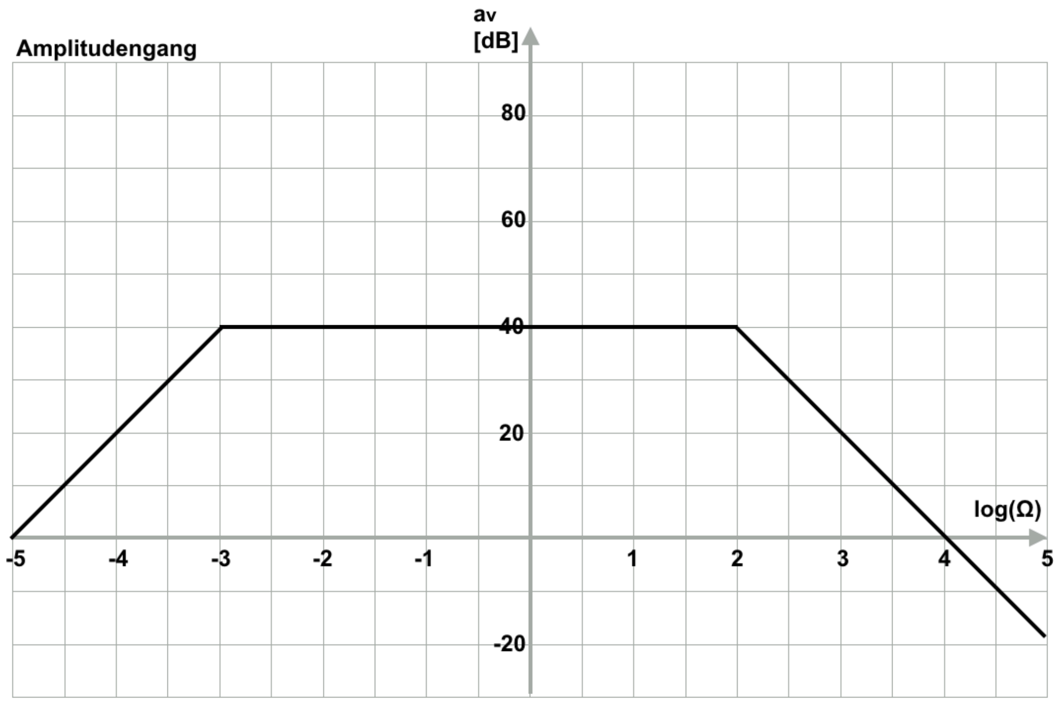
$$[\underline{A}_{A1}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{C_1}{C_2} & -\frac{1}{j\omega C_2} \\ -j\omega C_1 & 1 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Nun benennen wir die Bauteile um und haben den Ausdruck für $[\underline{A}_{A2}]$ gefunden:

$$[\underline{A}_{A2}] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{C_3}{C_4} & -\frac{1}{j\omega C_4} \\ -j\omega C_3 & 1 \end{bmatrix} \tag{36}$$

Aufgabe 4 **(23 Punkte)**
Bodediagramm

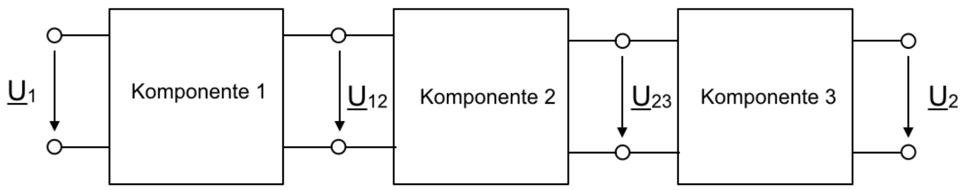
Sie sollen für Ihren Arbeitgeber eine Schaltung mit dem folgenden Amplitudengang bauen:



Die Schaltung soll aus drei Komponenten mit den folgenden Eigenschaften bestehen:

- **Komponente 1** ist eine passive Komponente 1. Ordnung mit einer Grenzfrequenz $f_{g1} = 0{,}2$ Hz.
- **Komponente 2** dreht die Phase vom Eingang zum Ausgang um 180° für alle Frequenzen.
- **Komponente 3** ist eine passive Komponente 1. Ordnung mit einer Grenzfrequenz $f_{g3} > f_{g1}$.

Die drei Komponenten sind in Reihe verschaltet:



(a) Benennen Sie die Komponenten so genau wie möglich. Begründen Sie! (3 Punkte)
Hinweis: Sie müssen keine Bauteile nennen oder Schaltungen zeichnen.

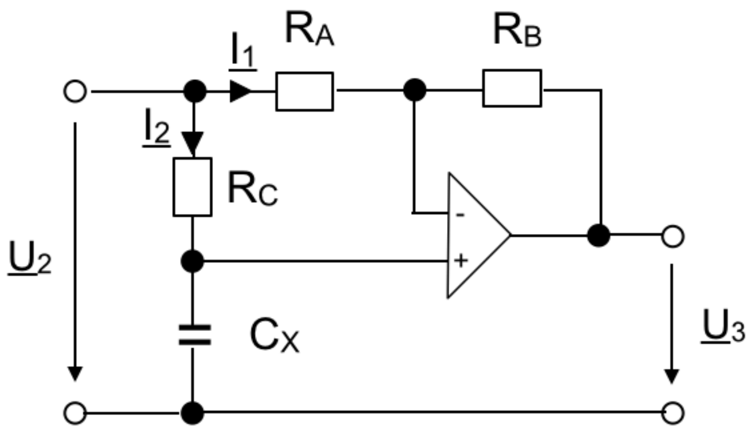
(b) Komponente 1 besteht aus einem Widerstand R_1 und einer Kapazität C_1. Komponente 3 besteht aus einem Widerstand R_3 und einer Spule L_3. Zeichnen Sie die Schaltbilder der beiden Komponenten. (2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Grenzfrequenz f_{g3} der dritten Komponente. Bestimmen Sie ebenfalls die Normierungsfrequenz des Bodediagrammes. Begründen Sie! (2 Punkte)

(d) Zeichnen Sie ein mögliches Schaltbild der 2. Komponente. Geben Sie auch die Übertragungsfunktion $\frac{\underline{U}_{23}}{\underline{U}_{12}}$ in Abhängigkeit der Bauteile an. Geben Sie ebenfalls den Verstärkungsfaktor an. (3 Punkte)

(e) Zeichnen Sie die Phasengänge der einzelnen Komponenten und den Phasengang der Gesamtschaltung in Diagramm 4.1 ein. Verwenden Sie hierfür die gleiche Normierung wie für den in der Aufgabe gegebenen Amplitudengang. (4 Punkte)

Die aus den drei Komponenten bestehende Schaltung soll nun um eine weitere vierte serielle Komponente erweitert werden. Diese Komponente soll die Phasen für Frequenzen $f \geq 2000\,\text{Hz}$ um zusätzliche 180° drehen. Der Amplitudengang soll dabei nicht verändert werden.
Die Schaltung der vierten Komponente ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



(f) Wie nennt man Komponente 4 mit den oben beschriebenen Eigenschaften? (1 Punkt)

(g) Zeigen Sie dass die Übertragungsfunktion $\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2}$ der vierten Komponente die folgende Form hat: (4 Punkte)

$$\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} = \frac{1 - j\omega C_x \cdot \frac{R_C R_B}{R_A}}{1 + j\omega C_x R_C}$$

Leiten Sie diese mit Hilfe von drei Maschengleichungen her.

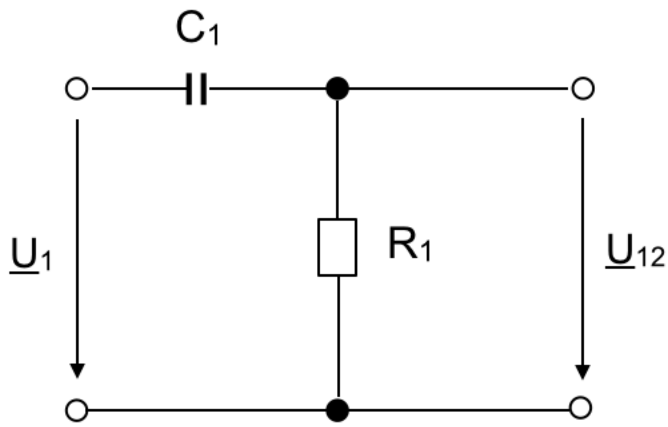
(h) Wie muss R_B in Abhängigkeit von R_A gewählt werden, sodass der Amplitudengang der Gesamtschaltung aus allen vier Komponenten unverändert bleibt? (1 Punkt)

(i) Sie wollen für die Kapazität das Standardbauelement $C_x = 20\,\mu F$ verwenden. Wie müssen Sie R_C wählen, dass die Phase für Frequenzen $f \geq 2000\,\text{Hz}$ um 180° gedreht wird? Berechnen Sie den Wert für R_C. Runden Sie auf eine ganze Zahl. Skizzieren Sie hierfür auch das Bodediagramm des Allpasses (Phase und Betrag). (3 Punkte)

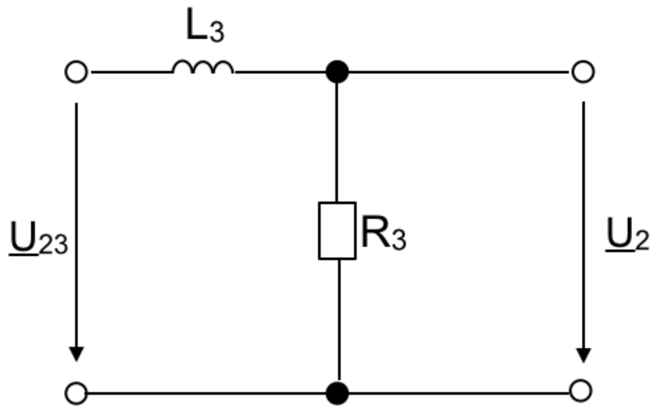
Lösung:

(a) **Komponente 1:** Es handelt sich um einen passiven Hochpass 1. Ordnung.
Komponente 3: Es handelt sich um einen passiven Tiefpass 1. Ordnung.
Komponente 2: Es handelt sich um einen aktiven invertierenden Verstärker.

(b) Das Schaltbild der 1. Komponente:



Das Schaltbild der dritten Komponente:



(c) Die Grenzfrequenz der dritten Komponente kann aus dem Amplitudengang und der gegebenen Grenzfrequenz f_{g1} bestimmt werden. Der Amplitudengang von Komponente 1 knickt bei $log(\Omega_1) = -3$, der von Komponente 3 bei $log(\Omega_2) = 2$. Die Grenzfrequenz der ersten Komponente ist bekannt: $f_{g1} = 0,2\,Hz$. Daraus kann die Grenzfrequenz der dritten Komponente bestimmt werden:

$$f_{g2} = f_{g1} \cdot 10^{(log(\Omega_2) - log(\Omega_1))} = 0,2 \cdot 10^5\,Hz = 20\,kHz$$

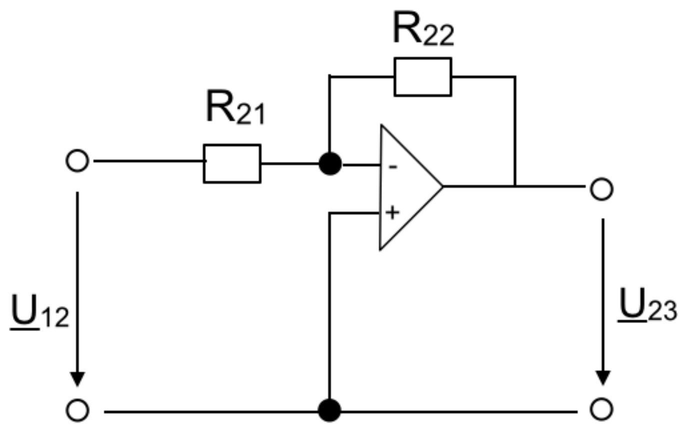
Um die Normierungsfrequenz zu bestimmen kann ähnlich vorgegangen werden. Die Grenzfrequenz der ersten Komponente $f_{g1} = 0,2\,Hz$ entspricht $log(\Omega_1) = -3$ im Amplitudengang des Bodediagramms. Es muss gelten:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\Omega_1}{\Omega_0}$$

Daraus folgt:

$$f_0 = f_{g1} \cdot \frac{\Omega_0}{\Omega_1}$$
$$f_0 = 0,2\,Hz \cdot \frac{1}{10^{log(\Omega_1)}} f_0 \qquad = 0,2\,Hz \cdot 10^3 = 200\,Hz$$

(d) Das Schaltbild des aktiven invertierenden Verstärkers ist in der folgenden Abbildung dargestellt:

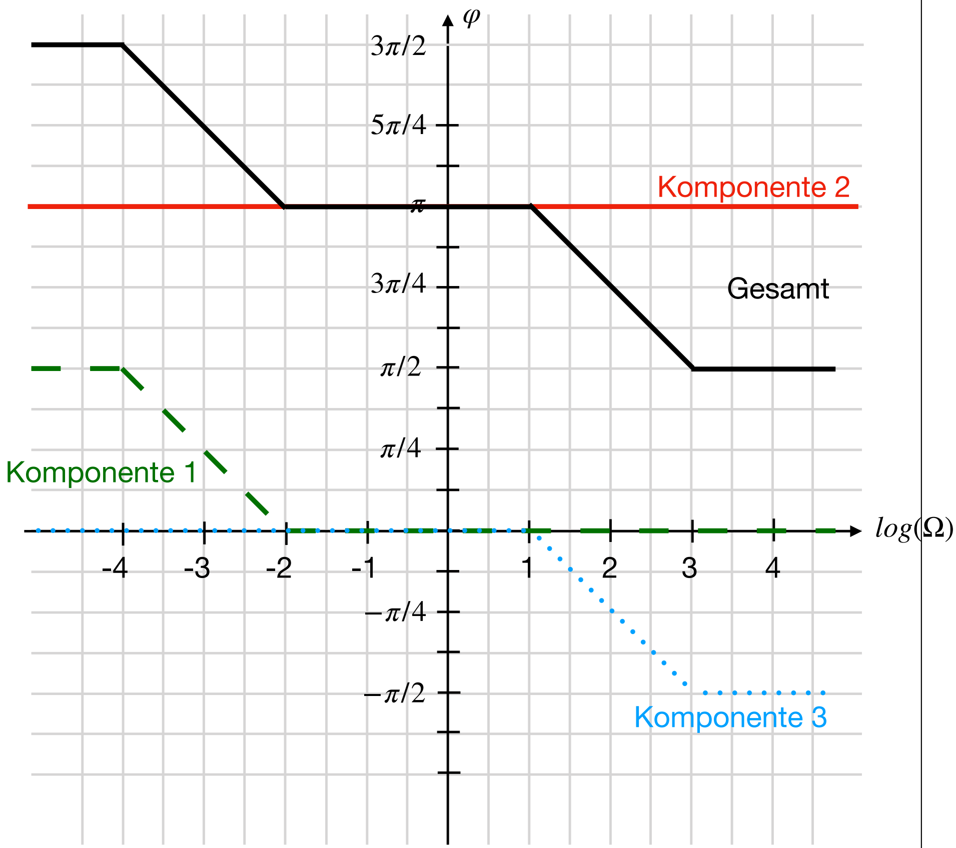


Die Übertragungsfunktion hat die folgende Form:

$$\frac{\underline{U}_{23}}{\underline{U}_{12}} = -\frac{R_{22}}{R_{21}}$$

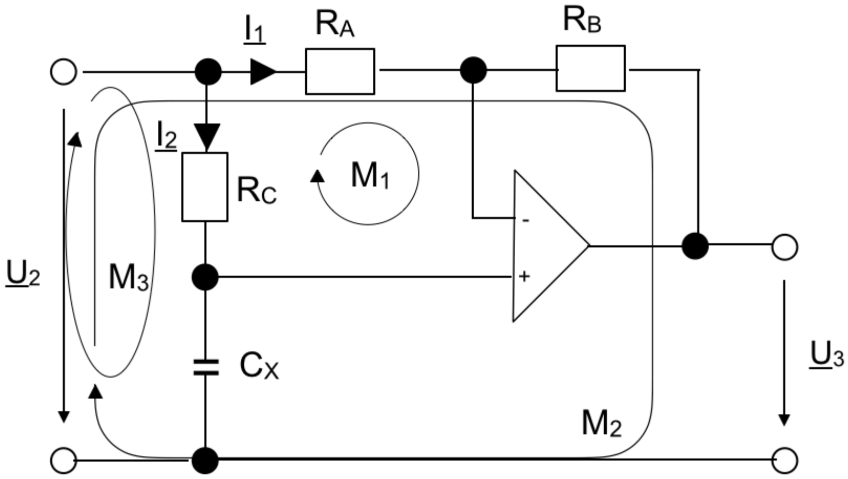
Aus dem Diagramm kann die Verstärkung im Durchlassbereich abgelesen werden: $20 \cdot log(|\frac{\underline{U}_{23}}{\underline{U}_{12}}|) = 40\,dB$. Daraus folgt der Verstärkungsfaktor: $V = 100$.

(e) Der Phasengang ist in der folgenden Abbildung dargestellt:



(f) Eine Schaltung, die alle Frequenzen ungedämpft durchlässt und die Phase um 180° dreht, nennt man einen Allpass.

(g) Zunächst werden die drei Maschen aufgestellt:



$$M1: \quad \underline{I}_1 R_A - \underline{I}_2 R_C = 0$$
$$M2: \quad -\underline{U}_2 + \underline{I}_1 (R_A + R_B) + \underline{U}_3 = 0$$
$$M3: \quad -\underline{U}_2 + \underline{I}_2 R_C + \underline{I}_2 \frac{1}{j\omega C_x} = 0$$

Stellt man nun M2 nach $\underline{I}_1$ und M3 nach $\underline{I}_2$ um und setzt sie in M1 ein, erhält man:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_3}{R_A + R_B}$$
$$\underline{I}_2 = \frac{j\omega C_x \underline{U}_2}{1 + j\omega C_x R_C}$$
$$\frac{R_A}{R_A + R_B} \cdot (\underline{U}_2 - \underline{U}_3) - \frac{j\omega C_x R_C}{1 + j\omega C_x R_C} \cdot \underline{U}_2 = 0$$

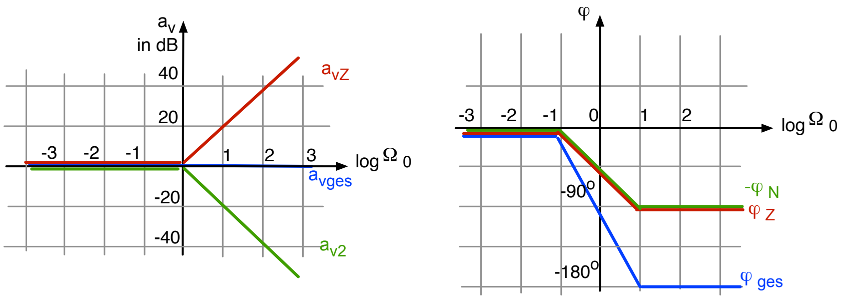
Durch Umstellen erhält man schlussendlich:

$$\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} = \frac{1 - j\omega C_x \cdot \frac{R_C R_B}{R_A}}{1 + j\omega C_x R_C}$$

(h) Damit der Amplitudengang unverändert bleibt, muss die Addition des Amplitudengangs des Zählers und des Nenners der vierten Komponente eine Waagrechte bei 0dB ergeben. Für $R_B = R_A$ haben Zähler und Nenner den gleichen Amplitudengang, aber da der Nenner subtrahiert werden muss, ergibt sich insgesamt ein waagrechter Verlauf:

$$\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} = \frac{1 - j\omega C_x R_C}{1 + j\omega C_x R_C}$$

Gemeinsam ergibt der Verlauf einen waagrechten Amplitudengang bei 0dB:

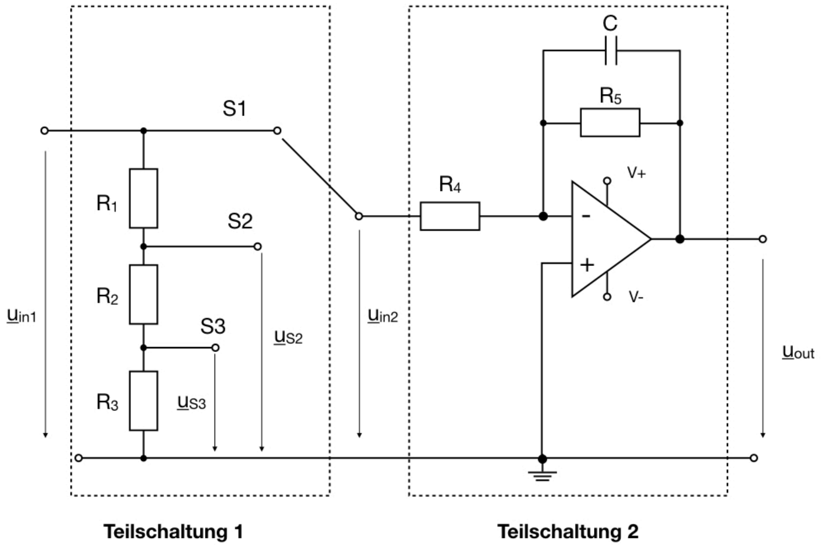


Die Phase wird dabei um 180° gedreht.

(i) Die Phase des Allpasses dreht von 0 auf $-180°$ um die Kreisfrequenz $\omega_4 = \frac{1}{R_C C_x}$ (Siehe Bodediagramm in der Abbildung oben). Eine Dekade später ist die Phase um 180° gedreht. Damit bei 2000 Hz die Phase um 180° gedreht ist, muss $\omega_4 = 2\pi \cdot 200\,Hz$ betragen. Der Widerstand kann daher zu $R_C = 40\,\Omega$ bestimmt werden. Die Skizze des Bodediagramms finden Sie in den Abbildungen im vorherigen Aufgabenteil.

Aufgabe 5 **(15 Punkte)**
Operationsverstärker

Die nachfolgend abgebildete Operationsverstärkerschaltung setzt sich aus einem idealen Operationsverstärker sowie den Widerständen R_1 bis R_5 und der Kapazität C zusammen:



Die Schaltung besteht aus Teilschaltung 1 und Teilschaltung 2, welche durch den Schalter S verbunden sind. Der Schalter S kann die Positionen S1, S2 oder S3 einnehmen. Alle nachfolgenden Aufgabenteile beziehen sich auf die oben abgebildete Schaltung:

(a) Nennen Sie zwei der goldenen Regeln für ideale Operationsverstärker. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion von Teilschaltung 2. (3 Punkte)

Gegeben seien nun die folgenden Größen und Bauteilwerte:

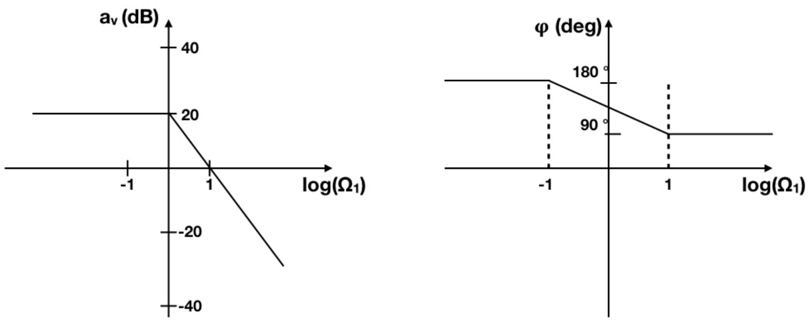
$\underline{u}_{in1} = 0{,}6\,\mathrm{V}$	$R_1 = 6\,\mathrm{k}\Omega$	$R_4 = 1\,\mathrm{k}\Omega$
$V+ = +5\,\mathrm{V}$	$R_2 = 4\,\mathrm{k}\Omega$	$R_5 = 10\,\mathrm{k}\Omega$
$V- = -5\,\mathrm{V}$	$R_3 = 2\,\mathrm{k}\Omega$	$C = 100\,\mu\mathrm{F}$

(c) Berechnen Sie die Spannungen $\underline{u}_{S2}$ und $\underline{u}_{S3}$. (2 Punkte)

(d) Welchen Wert nimmt die Kreisfrequenz ω für die gegebene Gleichspannungsquelle $\underline{u}_{in1} = 0,6\,\mathrm{V}$ an? (1 Punkt)

(e) Berechnen Sie nun die Ausgangsspannung $\underline{u}_{out}$ jeweils für die Schalterpositionen S2 und S3. (2 Punkte)

Es werde nun eine Wechselspannungsquelle mit $\underline{u}_{in1}(t) = 0{,}6\,\text{V} \cdot \sin(2\pi f_0 t)$ und $f_0 = \frac{1}{2\pi}$ Hz an den Eingang von Teilschaltung 1 angeschlossen. Der Schalter S befinde sich in Position S1.
Das folgende Bode-Diagramm sei für Teilschaltung 2 gegeben. Die charakteristische Frequenz wurde zu $\omega_1 = \frac{1}{R_5 C}$ gewählt und bestimmt die normierte Frequenz $\Omega_1 = \frac{\omega}{\omega_1}$.



(f) Zeichnen Sie die Zeitverläufe der Spannungen $\underline{u}_{in1}(t)$ und $\underline{u}_{out}(t)$ in Diagramm 5.1 ein. (6 Punkte)
Hinweise:

- Lesen Sie die Verstärkung sowie die Phasenverschiebung für die sich ergebende Normierungsfrequenz Ω_1 im Bode-Diagramm ab.
- Beachten Sie, dass sich die Phasenverschiebung φ additiv auf das Argument des betrachteten Spannungsverlaufs auswirkt: $\underline{u}_{II} = \underline{u}_I(\omega t + \varphi)$.
- Achten Sie insbesondere auf das Vorzeichen der Phasenverschiebung.

Lösung:

(a)
- Für die Differenzspannung U_d am Eingang des Operationsverstärkers gilt: $U_d = 0$.
- Die Eingangsströme in den Operationsverstärker verschwinden.

(b) Fasst man die Parallelschaltung aus R_5 und C zusammen, erhält man die Ersatzimpedanz Z_{ers} mit

$$Z_{ers} = C||R_5 = \frac{\frac{1}{j\omega C} \cdot R_5}{\frac{1}{j\omega C} + R_5} = \frac{R_5}{1 + j\omega R_5 C}$$

Berechnung der Übertragungsfunktion als Verhältnis aus den entsprechenden Impedanzen:

$$\frac{\underline{u}_{out}}{\underline{u}_{in2}} = \frac{-Z_{ers}}{R_4} = -\frac{\frac{R_5}{1+j\omega R_5 C}}{R_4} = -\frac{R_5}{R_4} \cdot \frac{1}{1+j\omega R_5 C}$$

(c) • Mit der Spannungsteilerregel folgt für $\underline{u}_{S2}$:

$$\underline{u}_{S2} = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot u_{in} = \frac{4\,\mathrm{k\Omega} + 2\,\mathrm{k\Omega}}{6\,\mathrm{k\Omega} + 4\,\mathrm{k\Omega} + 2\,\mathrm{k\Omega}} \cdot 0{,}6\,\mathrm{V} = 0{,}3\,\mathrm{V}$$

• Mit der Spannungsteilerregel folgt für $\underline{u}_{S3}$:

$$\underline{u}_{S3} = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot u_{in} = \frac{2\,\mathrm{k\Omega}}{6\,\mathrm{k\Omega} + 4\,\mathrm{k\Omega} + 2\,\mathrm{k\Omega}} \cdot 0{,}6\,\mathrm{V} = 0{,}1\,\mathrm{V}$$

(d) $\omega = 0\,\frac{1}{s}$

(e) Mit der Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil (a) folgt:

$$\underline{u}_{out} = -\frac{R_5}{R_4} \cdot \frac{1}{1+j\omega C R_5} \cdot \underline{u}_{in2}.$$

Mit der Kreisfrequenz $\omega = 0\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ ergibt sich

$$\underline{u}_{out} = -\frac{R_5}{R_4} \cdot \frac{1}{1+0} \cdot \underline{u}_{in2} = -\frac{R_5}{R_4} \cdot \underline{u}_{in2}.$$

Für Schalterposition 1 gilt: $\underline{u}_{in2} = \underline{u}_{S2}$:

$$\underline{u}_{out} = -\frac{R_5}{R_4} \cdot \underline{u}_{S2} = -\frac{10\,\mathrm{k\Omega}}{1\,\mathrm{k\Omega}} \cdot 0{,}3\,\mathrm{V} = -3\,\mathrm{V}.$$

Für Schalterposition 2 gilt: $\underline{u}_{in2} = \underline{u}_{S3}$:

$$\underline{u}_{out} = -\frac{R_5}{R_4} \cdot \underline{u}_{S3} = -\frac{10\,\mathrm{k\Omega}}{1\,\mathrm{k\Omega}} \cdot 0{,}1\,\mathrm{V} = -1\,\mathrm{V}.$$

(f) Wir bestimmen zunächst $\log(\Omega_1)$ im Arbeitspunkt, um Verstärkung und Phasenverschiebung aus dem Bode-Diagramm ablesen zu können:

$$\begin{aligned}\log(\Omega_1) &= \log(\omega R_5 C)\\ &= \log(2\pi f_0 R_5 C)\\ &= \log(2\pi \cdot \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Hz} \cdot 10\,\mathrm{k\Omega} \cdot 100\,\mu\mathrm{F})\\ &= \log(1)\\ &= 0\end{aligned}$$

Aus dem Bode-Diagramm folgt damit:

- $a_v = 20\,\mathrm{dB}$
  Dies entspricht einer linearen Verstärkung von $10^{\frac{20}{20}} = 10$.
- $\varphi = 135\,°$

Die sinusförmige Eingangsspannung wird somit auf eine Amplitude von 0,6 V·10 = 6 V verstärkt und um 135 ° phasenverschoben. Im Zeitbereich entspricht dies einer Verschiebung nach links, da sich φ additiv auf das Argument des betrachteten Zeitverlaufs auswirkt.
Da der Operationsverstärker nur mit einer Versorgungsspannung von ±5 V gespeist wird, ist die Amplitude der Ausgangsspannung auf ±5 V begrenzt.
Die Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf der Eingangsspannung und der Ausgangsspannung.