Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel   Übungsleiter: M.Sc. Nicolas Pilia

---

Klausur

24. März 2020
Beginn: 14:00 Uhr

Familienname:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

AUFKLEBER

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem nicht programmierbaren Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein!
Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare!
Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	13	
2	11	
3	12	
4	21	
5	23	
6	14	
Gesamt:	94	

Aufgabe 1 **(13 Punkte)**
Ortskurve

Gegeben ist folgende Schaltung:

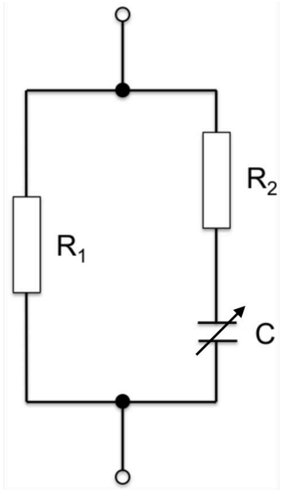


Abbildung 1

Die Widerstände R_1 und R_2 sind bekannt: $R_1 = 100\,\Omega$ und $R_2 = 300\,\Omega$.
Die Kapazität C soll variiert werden. Die Schaltung wird bei einer Frequenz von $\omega = 2\pi \cdot 50\,Hz$ betrieben.

(a) Stellen Sie die Impedanz Z(ω,R_1,R_2,C) der Schaltung in Abhängigkeit der Bauteile auf und geben Sie den Real- und Imaginärteil getrennt an. (3 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Kapazität C_{min}, die den Imaginärteil der Impedanz Z(C) minimiert. Berechnen Sie die Impedanz Z(C_{min}) für diese Kapazität. (6 Punkte)
Hinweis: Es ist nicht nötig, zu beweisen, ob ein Minimum oder Maximum vorliegt.

(c) Vervollständigen Sie Tabelle 1.1 mit den fehlenden Impedanzen Z(C) und zeichnen Sie alle Impedanzen aus der Tabelle 1.1 in das Diagramm 1.1 ein. Skizzieren Sie in dasselbe Diagramm die Impedanzortskurve in Abhängigkeit der Kapazität C. Beschriften Sie die Ortskurve mit C = 0 und C $\to \infty$. Achten Sie auch darauf die Achsen zu beschriften. (4 Punkte)

Lösung:

(a) Ausgangspunkt der Berechnung ist die folgende Parallelschaltung:

$$Z(C) = (R_2 + \frac{1}{j\omega C}) \,||\, R_1$$
$$= \frac{(R_1 + j\omega C R_1 R_2)}{1 + j\omega C(R_1 + R_2)}$$

Um die Gleichung nach Real- und Imaginärteil zu trennen, muss mit $\frac{1-j\omega C(R_1+R_2)}{1-j\omega C(R_1+R_2)}$ komplex konjugiert erweitert werden. Man erhält:

$$Z(C) = \frac{R_1 + \omega^2 C^2 R_1 R_2 (R_1 + R_2) - j\omega C R_1^2}{1 + \omega^2 C^2 (R_1 + R_2)^2} \tag{1}$$

Teilt man diese Gleichung auf, so erhält man den Real- und Imaginärteil zu:

$$Re\{Z(C)\} = R_1 \cdot \frac{1+\omega^2 C^2 R_2(R_1+R_2)}{1+\omega^2 C^2 (R_1+R_2)^2} \tag{2}$$

$$Im\{Z(C)\} = -\frac{\omega C R_1^2}{1+\omega^2 C^2 (R_1+R_2)^2} \tag{3}$$

(b) Die Kapazität C_{min} soll den Imaginärteil der Impedanz Z(C) minimieren. Das bedeutet die Ableitung der Impedanz Z(C) nach C ergibt 0 an der Stelle C_{min}. Mit der Quotientenregel erhält man die Ableitung des Imaginärteils:

$$\frac{dIm\{Z(C)\}}{dC} = \omega R_1^2 \cdot \frac{\omega^2 C^2 (R_1+R_2)^2 - 1}{(1+\omega^2 C^2 (R_1+R_2)^2)^2} = 0 \tag{4}$$

Man erhält schlussendlich die Gleichung:

$$\omega^2 C^2 (R_1+R_2)^2 - 1 = 0 \tag{5}$$

Daraus folgt direkt:

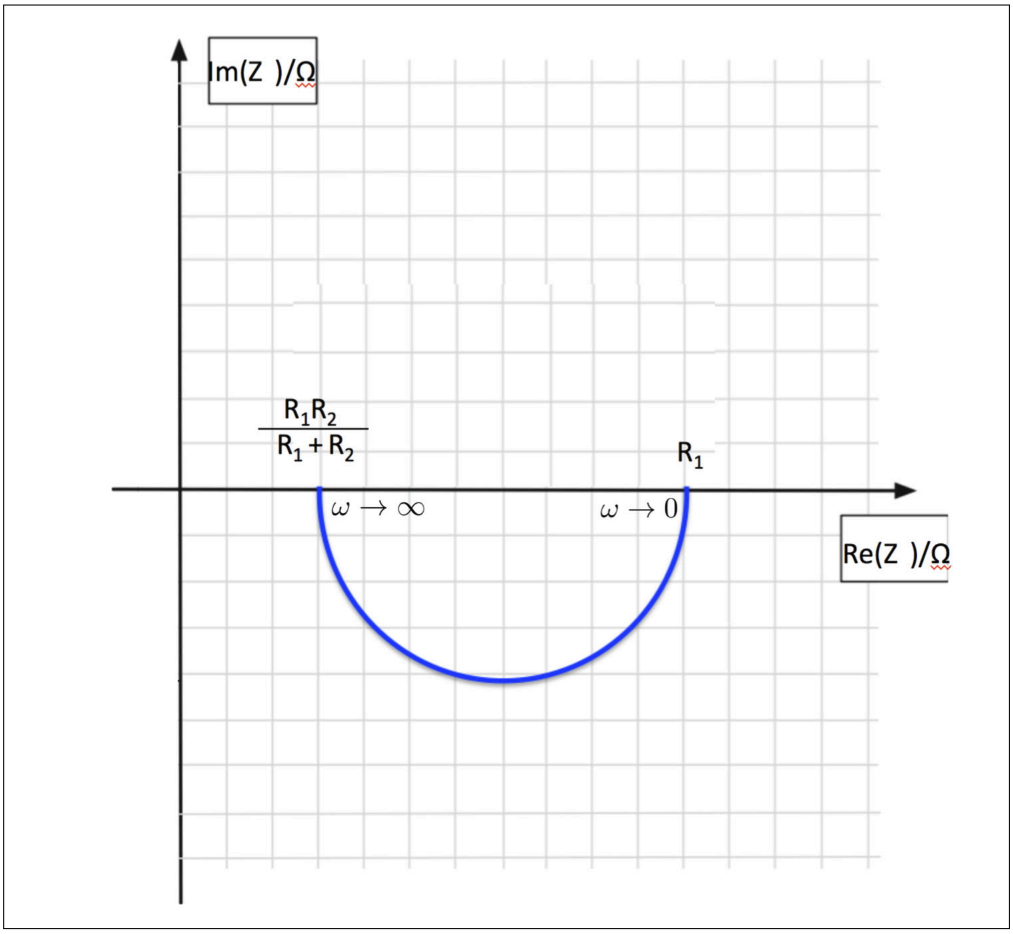
$$C_{min} = \frac{1}{(R_1+R_2)\omega} \tag{6}$$

Durch Einsetzen der Werte erhält man: $C_{min} = 7.96\,\mu F$. Die Impedanz für diese Induktivität berechnet sich zu:
$Z(C_{min}) = (87.5\Omega - 12.5j)\Omega$.

(c) Die Daten in der Tabelle sind wie folgt:

	Re{Z(C)} / Ω	Im{Z(C) / Ω}
$Z(C=0)$	100	0
$Z(C_{min})$	87.5	-12.5
$Z(C \to \infty)$	75	0

Die Ortskurve ist in der folgenden Abbildung dargestellt:


Im(Z)/Ω
$\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$
R_1
$\omega \to \infty$
$\omega \to 0$
Re(Z)/Ω

Aufgabe 2 **(11 Punkte)**

Ortskurve

Gegeben ist die folgende Schaltung:

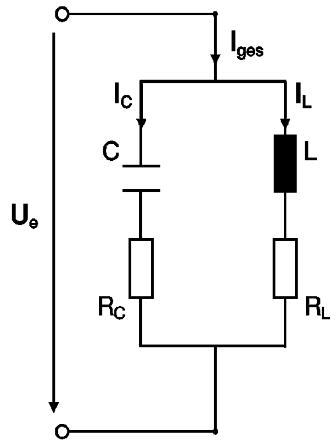


Abbildung 2

(a) Stellen Sie die Gleichung für den Strom I_L, I_C und I_{ges} in Abhängigkeit der Eingangsspannung U_e und der Impedanzen der Bauteile auf. Sie brauchen die Gleichungen nicht nach Real- und Imaginärteil trennen! (2 Punkte)

Nehmen Sie für alle weiteren Teilaufgaben an, dass L = 0 gilt.

(b) Zeigen Sie, dass für die **Stromübertragungsfunktion** $\frac{I_C}{I_{ges}}(\omega)$ gilt: (4 Punkte)

$$\frac{I_C}{I_{ges}} = \frac{\omega^2 C^2 R_L (R_C + R_L)}{1 + \omega^2 C^2 (R_C + R_L)^2} + j \frac{\omega C R_L}{1 + \omega^2 C^2 (R_C + R_L)^2}$$

(c) Begründen Sie, wie der Kurvenverlauf der Stromübertragungsfunktion aussehen muss. (2 Punkte)

(d) Zeichnen Sie die Ortskurve der Stromübertragungsfunktion in Diagramm 2.1 ein. Berechnen Sie dafür die Grenzwerte $\frac{I_C}{I_{ges}}(\omega \to 0)$ und $\frac{I_C}{I_{ges}}(\omega \to \infty)$ und zeichnen Sie diese im Diagramm ein. (3 Punkte)

Lösung:

(a) Die Gleichungen ergeben sich mit der Ohmschen Regel für komplexe

Größen zu:

$$
\begin{aligned}
I_L &= \frac{U_e}{R_L + j\omega L} \\
I_C &= \frac{U_e}{R_C + \frac{1}{j\omega C}} \\
&= \frac{j\omega C}{1 + j\omega C R_C} \cdot U_e \\
I_{ges} = I_L + I_C &= \left(\frac{1}{R_L + j\omega L} + \frac{j\omega C}{1 + j\omega C R_C}\right) \cdot U_e
\end{aligned}
$$

(b) Mit den Gleichungen aus (a) kann die Stromübertragungsfunktion direkt aufgestellt werden. Die Eingangsspannung U_e kürzt sich dabei weg:

$$
\frac{I_C}{I_{ges}} = \frac{\frac{j\omega C}{1+j\omega C R_C}}{\frac{1}{R_L} + \frac{j\omega C}{1+j\omega C R_C}}
$$

Nun kann der Hauptbruch oben und unten mit $R_L \cdot (1 + j\omega C R_C)$ multipliziert werden um den Doppelbruch loszuwerden:

$$
\frac{I_C}{I_{ges}} = \frac{j\omega C R_L}{1 + j\omega C(R_C + R_L)}
$$

Diese Gleichung muss nun nach Real- und Imaginärteil getrennt werden. Dafür wird sie komplex konjugiert erweitert:

$$
\begin{aligned}
\frac{I_C}{I_{ges}} &= \frac{j\omega C R_L \cdot \big(1 - j\omega C(R_C + R_L)\big)}{1 + \omega^2 C^2 (R_C + R_L)^2} \\
&= \frac{\omega^2 C^2 R_L (R_C + R_L)}{1 + \omega^2 C^2 (R_C + R_L)^2} + j \frac{\omega C R_L}{1 + \omega^2 C^2 (R_C + R_L)^2}
\end{aligned}
$$

(c) Man betrachtet den Kehrwert der Stromübertragungsfunktion:

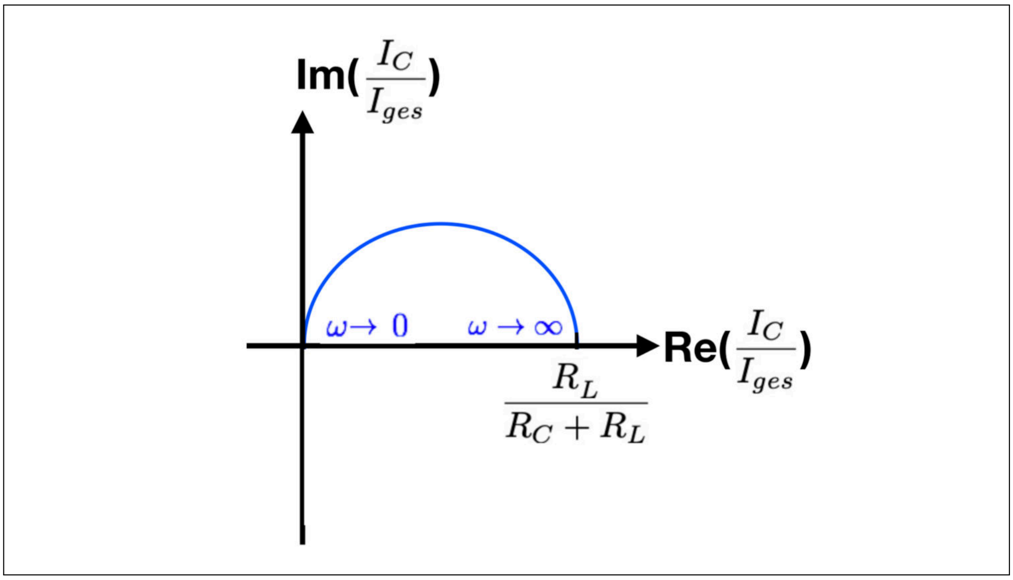
$$
\begin{aligned}
\frac{I_{ges}}{I_C} &= \frac{1 + j\omega C(R_C + R_L)}{j\omega C R_L} \\
&= \frac{-j + \omega C(R_C + R_L)}{\omega C R_L} = \frac{R_C + R_L}{R_L} - j\frac{1}{\omega C R_L}
\end{aligned}
$$

Für $\omega \to 0$ gilt $\frac{I_{ges}}{I_C} \to -\infty$ und für $\omega \to \infty$ wird $\frac{I_{ges}}{I_C}$ rein reell. Dies entspricht einer Halbgeraden im unteren, rechten Quadranten. Somit lässt sich durch eine Spiegelung am Einheitskreis belegen, dass es sich bei der Stromübertragungsfunktion $\frac{I_C}{I_{ges}}$ um einen Halbkreis im oberen rechten Quadranten handeln muss.

(d) Die beiden Grenzwerte ergeben sich zu:

$$
\begin{aligned}
\frac{I_C}{I_{ges}}(\omega \to 0) &= 0 \\
\frac{I_C}{I_{ges}}(\omega \to \infty) &= \frac{R_L}{R_C + R_L}
\end{aligned}
$$

Die Ortskurve ist in der folgenden Abbildung dargestellt:


$\mathrm{Im}(\frac{I_C}{I_{ges}})$
$\omega \to 0$
$\omega \to \infty$
$\mathrm{Re}(\frac{I_C}{I_{ges}})$
$\frac{R_L}{R_C + R_L}$

Aufgabe 3 **(12 Punkte)**
Netzwerk

Es gilt folgende Schaltung:

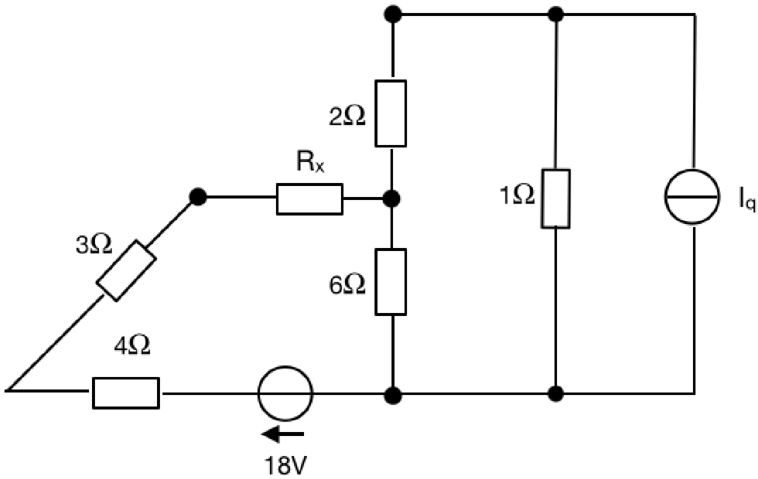


Abbildung 3

Die obige Schaltung enthält bekannte Widerstände, einen unbekannten Widerstand R_x und einen Quellstrom I_q.

(a) Wandeln Sie die in Abbildung 3 dargestellte Schaltung in folgende Form (Abbildung 4) um. Gehen Sie wie folgt vor: (2 Punkte)

i) Vereinfachen Sie das Netzwerk soweit wie möglich. Zeichnen Sie das vereinfachte Ersatzschaltbild.

ii) Transformieren Sie, falls nötig, die Quellen. Vereinfachen Sie erneut soweit wie möglich. Zeichnen Sie das vereinfachte Ersatzschaltbild.

Bestimmen Sie die Werte für I_q und R_x.

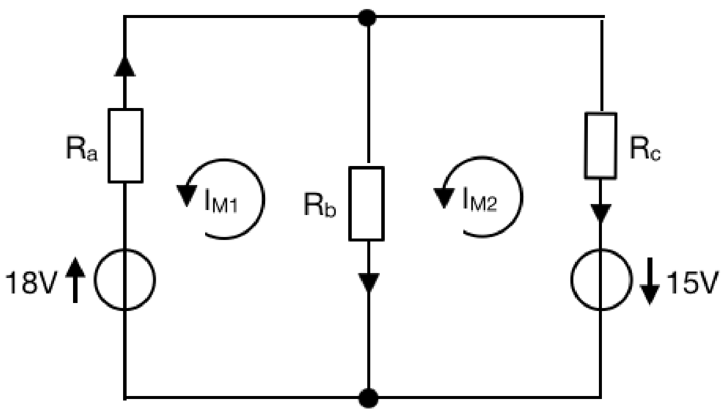


Abbildung 4

$$R_a = 12\,\Omega, \quad R_b = 6\,\Omega, \quad R_c = 3\,\Omega$$

(b) Bestimmen Sie mit dem formalisierten Maschenstromverfahren das Gleichungssystem für die Maschenströme I_{M1} und I_{M2} (Abbildung 4). Gehen Sie dabei wie folgt vor: (6 Punkte)

i) Geben Sie das Gleichungssystem in allgemeiner Form ohne Zahlen an.

ii) Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel. Berechnen Sie dabei mindestens eine Determinante schriftlich.

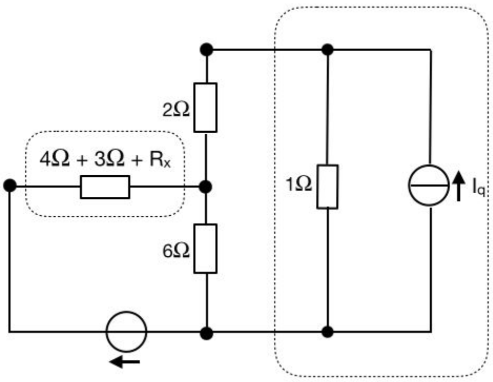
(c) Berechnen Sie den Strom durch den Widerstand R_b. (1 Punkt)

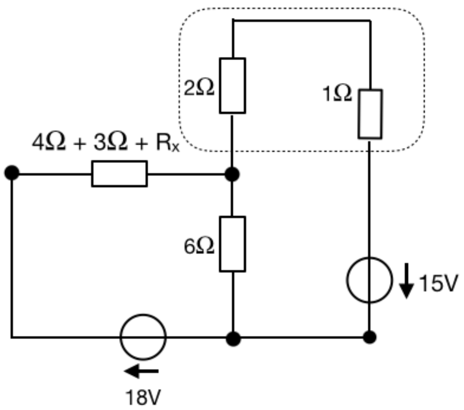
(d) Welche Leistung geben die beiden Quellen aus Abbildung 4 jeweils ab? (2 Punkte)

(e) Das Maschenstromverfahren basiert darauf, Ströme einzelner Maschen zu überlagern. Welche Eigenschaft müssen die Bauelemente erfüllen, damit dieses Überlagerungsprinzip angewendet werden darf? (1 Punkt)

Lösung:

(a) **Umwandlungen:**





i.) Widerstände kombinieren R_x = 12 - 3 - 4 = 5Ω

ii.) Stromquelle in Spannungsquelle umwandeln

$$U = I \cdot R$$
$$I_q = \frac{15}{1} = 15\,A$$

(b) **Formalisiertes Maschenstromverfahren:**

Es gilt $V = IR$.

$$V = \begin{pmatrix} R_a + R_b & -R_b \\ -R_b & R_b + R_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 + 6 & -6 \\ -6 & 6 + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Determinante der Matrix wurde hier mit der Regel von Sarrus berechnet:

$$\begin{aligned} D &= \det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 6 \cdot 3 - (-2 \cdot -2) \\ &= 18 - 4 = 14 \end{aligned}$$

Maschenstrom 1:

$$\begin{aligned} D_1 &= \det \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 6 \cdot 3 - (-2 \cdot 5) \\ &= 18 + 10 = 28 \\ I_{M1} &= \frac{D_1}{D} = \frac{28}{14} A = 2A \end{aligned}$$

Maschenstrom 2:

$$\begin{aligned} D_2 &= \det \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= 6 \cdot 5 - (-2 \cdot 6) \\ &= 30 + 12 = 42 \\ I_{M1} &= \frac{D_1}{D} = \frac{42}{14} A = 3A \end{aligned}$$

Die Lösungen lauten $I_{M1} = 2\,A$ und $I_{M2} = 3\,A$

(c) Der Strom ergibt sich aus der Differenz der Maschenströme:

$$I_{Rb} = I_{M1} - I_{M2} = -2 + 3 = 1\,A$$

(d) Für die Leistung gilt allgemein: P=U·I.
Im Falle einer Quelle ist die abgegebene Leistung positiv, wenn Strom und Spannung in entgegengesetzte Richtung zeigen. Dadurch ergibt sich:

$$P_1 = 18\,V \cdot 2\,A = 36\,W$$
$$P_2 = 15\,V \cdot 3\,A = 45\,W$$

(e) Die Bauelemente müssen linear sein, d.h. es muss ein linearer Zusammenhang zwischen auftretenden Spannungen und Strömen bestehen.

Aufgabe 4 **(21 Punkte)**
Transformator

Als Ingenieur*in stehen Sie vor der Aufgabe, eine Schaltung zu entwickeln, die eine entkoppelnde Wirkung hat. Sie denken natürlich direkt an Ihre LEN-Vorlesung und an den Transformator, der genau diese Eigenschaft hat. Die Anforderungen Ihres Auftraggebers sind die folgenden:

1. Das Eingangssignal soll an zwei entkoppelte Sekundärseiten übertragen werden. Für die Verbraucher gilt: $R_{1L} = R_{2L} = 50\,\Omega$.
2. Der Strom durch den Verbraucher R_{1L} soll betragsmäßig gleich groß sein wie der Strom durch R_{2L}.
3. Der Strom durch die Verbraucher R_{1L} und R_{2L} soll bei $\omega = 10000\frac{1}{\mathrm{s}}$ eine Phasenverschiebung von $-45°$ gegenüber der Eingangsspannung $\underline{U}_0$ haben. Außerdem soll die aufgenommene Leistung der beiden Verbraucher R_{1L} und R_{2L} bei dieser Kreisfrequenz jeweils 100 W betragen.

Sie zeichnen sich das folgende Schaltbild eines verlustbehafteten Transformators mit 2 Sekundärseiten, die jeweils mit der Primärseite (M_{01} bzw. M_{02}) und untereinander (M_{12}) magnetisch gekoppelt sind:

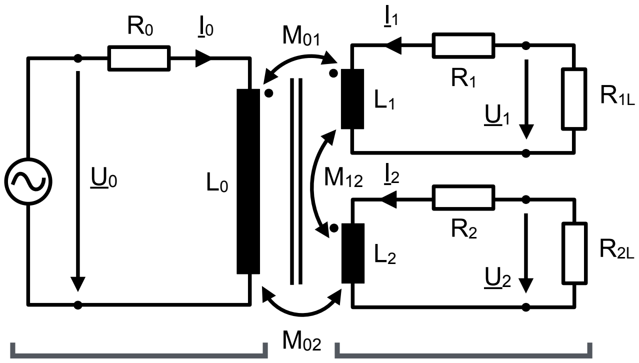


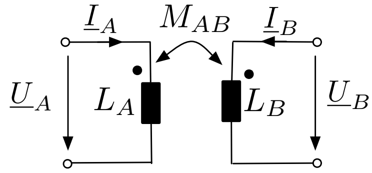
Abbildung 5: Schaltbild der eingesetzten Schaltung.

Aus dem Datenblatt des von Ihnen gewählten Transformators wissen Sie, dass Folgendes gilt:

$$L_1 = L_2 = 9L_0 \qquad \text{und} \qquad k = 1 \text{ für alle Kopplungen}$$

Im Folgenden soll dieses System bauteilmäßig so dimensioniert werden, dass alle Anforderungen erfüllt sind.

Es ist auch bekannt, dass allgemein für den idealen, verlustlosen Transformator das Folgende gilt:



$$\begin{aligned}\underline{U}_A &= \underline{I}_A \cdot j\omega L_A + \underline{I}_B \cdot j\omega M_{AB}\\ \underline{U}_B &= \underline{I}_A \cdot j\omega M_{AB} + \underline{I}_B \cdot j\omega L_2\end{aligned}$$

Außerdem kennen Sie die Zusammenhänge für den idealen Fall:

$$ü^2 = \frac{L_A}{L_B} \qquad \text{und} \qquad k^2 = \frac{M_{AB}^2}{L_A \cdot L_B}$$

(a) Bestimmen Sie 5 Gleichungen, die das System beschreiben: (5 Punkte)

- Drei der Gleichungen sollen die Spannungen auf Primär- und Sekundärseiten $\underline{U}_0$, $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ beschreiben.
- Zwei der Gleichungen sollen nur das Verhalten der Verbraucher auf den Sekundärseiten beschreiben (ohmsche Gleichungen).

Hinweis: Denken Sie daran, dass Sie in allen drei Gleichungen für $\underline{U}_0$, $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ alle magnetischen Kopplungen berücksichtigen.

(b) Bestimmen Sie M_{01}, M_{12} und M_{02} in Abhängigkeit von L_0. (3 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass für die hier gezeigte Schaltung folgendes gilt: (4 Punkte)

$$\underline{U}_0 = \underline{I}_2 \cdot \left(R_0 \cdot \frac{-R_{1L} - R_1 - j\omega 18 L_0}{j\omega 3 L_0} + \frac{-R_{1L} - R_1 - j\omega 18 L_0}{3} + j\omega 6 L_0 \right)$$

Hinweis: Überlegen Sie, welcher Zusammenhang zwischen $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ herrscht. Setzen Sie auch die Zusammenhänge aus (b) ein.

(d) Dimensionieren Sie R_0 und bestimmen Sie $|\underline{U}_0|$ nun so, dass Anforderung 3 erfüllt ist. Nehmen Sie an, dass $L_0 = 1\,\text{mH}$ und $R_1 = 160\,\Omega$. (5 Punkte)
Hinweis: Nutzen Sie das Zwischenergebnis aus (c).

Sie haben jetzt zwar die Schaltung dimensioniert, wollen aber noch das Ersatzschaltbild der von Ihnen entworfenen Schaltung bestimmen, um es an die Kollegen von der Qualitätskontrolle weiterzugeben. Sie kennen aus LEN noch das folgende Ersatzschaltbild eines verlustbehafteten Transformators:

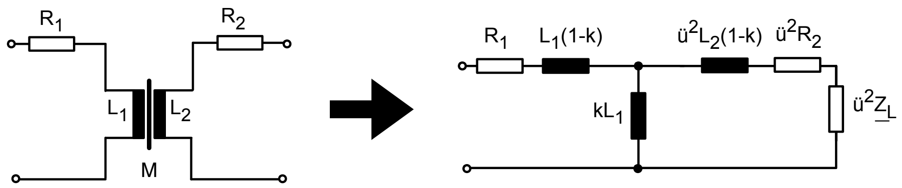


Abbildung 6: Ersatzschaltbild des Transformators mit einer Sekundärseite.

(e) Zeichnen Sie nun das Ersatzschaltbild des entworfenen Transformators mit den zwei Sekundärseitenwicklungen. Sie müssen die Schaltung nicht vereinfachen. Begründen Sie die Beschaltung der beiden Sekundärseiten mit der Primärseite. (4 Punkte)
Hinweis: Überlegen Sie sich hierfür, ob sie die zweite Sekundärseite nun parallel oder in Reihe schalten müssen.

Lösung:

(a) Die drei Gleichungen bzgl. der Spannungen lauten:

$$\underline{U}_0 = (R_0 + j\omega L_0) \cdot \underline{I}_0 + j\omega M_{01} \underline{I}_1 + j\omega M_{02} \underline{I}_2$$
$$\underline{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \cdot \underline{I}_1 + j\omega M_{01} \underline{I}_0 + j\omega M_{12} \underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = (R_2 + j\omega L_2) \cdot \underline{I}_2 + j\omega M_{02} \underline{I}_0 + j\omega M_{12} \underline{I}_1$$

Die zwei Gleichungen, die das Verhalten der Verbraucher beschreiben, lauten:

$$\underline{U}_1 = -\underline{I}_1 \cdot R_{1L}$$
$$\underline{U}_2 = -\underline{I}_2 \cdot R_{2L}$$

(b) Mit $k^2 = \frac{M_{ij}^2}{L_i \cdot L_j}$ und den Angaben für L_i und L_j kann man M_{ij} bestimmen:

$$M_{01} = M_{02} = 3L_0$$
$$M_{12} = 9L_0$$

(c) Wir setzen in die Gleichungen aus a) die Werte für L_1, L_2, M_{01}, M_{02}, M_{12} ein:

$$\underline{U}_0 = (R_0 + j\omega L_0) \cdot \underline{I}_0 + j\omega 3L_0\underline{I}_1 + j\omega 3L_0\underline{I}_2$$
$$\underline{U}_1 = (R_1 + j\omega 9L_0) \cdot \underline{I}_1 + j\omega 3L_0\underline{I}_0 + j\omega 9L_0\underline{I}_2$$
$$\underline{U}_2 = (R_2 + j\omega 9L_0) \cdot \underline{I}_2 + j\omega 3L_0\underline{I}_0 + j\omega 9L_0\underline{I}_1$$

Die Sekundärseiten sollen ein vollständig äquivalentes Verhalten zeigen. Daraus folgt, dass hier die unbekannten Spannungen, Ströme und Widerstände auch gleich sein müssen! Wir können das zeigen, indem wir den Zusammenhang der Gleichungen untersuchen:

$$\underline{U}_1 = R_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega 9L_0\underline{I}_1 + j\omega 3L_0\underline{I}_0 + j\omega 9L_0\underline{I}_2 = -\underline{I}_1 \cdot R_{1L}$$
$$\underline{U}_2 = R_2 \cdot \underline{I}_2 + j\omega 9L_0\underline{I}_2 + j\omega 3L_0\underline{I}_0 + j\omega 9L_0\underline{I}_1 = -\underline{I}_2 \cdot R_{2L}$$

Teilt man durch die entsprechenden Ströme, sieht man:

$$R_1 + \frac{1}{\underline{I}_1} \cdot (j\omega 9L_0\underline{I}_1 + j\omega 3L_0\underline{I}_0 + j\omega 9L_0\underline{I}_2) = -R_{1L}$$
$$R_2 + \frac{1}{\underline{I}_2} \cdot (j\omega 9L_0\underline{I}_2 + j\omega 3L_0\underline{I}_0 + j\omega 9L_0\underline{I}_1) = -R_{2L}$$

Setzt man nun die Teile gleich, berücksichtigt man, dass die Ströme laut Aufgabe gleich sind und kürzt entsprechend, so findet man: $R_1 = R_2$. Dementsprechend sind die Gleichungen für $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ äquivalent. Wir arbeiten nun mit den Gleichungen für $\underline{U}_0$ und $\underline{U}_2$ weiter, setzen $\underline{I}_1 = \underline{I}_2$. Jetzt nutzen wir den Zusammenhang für den Verbraucher von oben:

$$\underline{U}_0 = (R_0 + j\omega L_0) \cdot \underline{I}_0 + j\omega 3L_0\underline{I}_2 + j\omega 3L_0\underline{I}_2$$
$$-\underline{I}_2 \cdot R_{2L} = (R_2 + j\omega 9L_0) \cdot \underline{I}_2 + j\omega 3L_0\underline{I}_0 + j\omega 9L_0\underline{I}_2$$

Wir nutzen die zweite Zeile, um $\underline{I}_0$ in der ersten Gleichung zu eliminieren. Wir stellen hierfür nach $\underline{I}_0$ um:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_2 \cdot \frac{-R_{2L} - R_2 - j\omega 9L_0 - j\omega 9L_0}{j\omega 3L_0} = \underline{I}_2 \cdot \frac{-R_{2L} - R_2 - j\omega 18L_0}{j\omega 3L_0}$$

Dies setzen wir in die Gleichung von $\underline{U}_0$ ein:

$$\begin{aligned}\underline{U}_0 &= (R_0 + j\omega L_0)\cdot \underline{I}_2 \cdot \frac{-R_{2L} - R_2 - j\omega 18L_0}{j\omega 3L_0} + j\omega 3L_0\underline{I}_2 + j\omega 3L_0\underline{I}_2 \\ &= \underline{I}_2 \cdot \left(R_0 \cdot \frac{-R_{2L} - R_2 - j\omega 18L_0}{j\omega 3L_0} + \frac{-R_{2L} - R_2 - j\omega 18L_0}{3} + j\omega 6L_0\right)\end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie muss gelten: $R_2 = R_1$, also ergibt sich:

$$\underline{U}_0 = \underline{I}_2 \cdot \left(R_0 \cdot \frac{-R_{1L} - R_1 - j\omega 18L_0}{j\omega 3L_0} + \frac{-R_{1L} - R_1 - j\omega 18L_0}{3} + j\omega 6L_0\right)$$

(d) Eine Phasendrehung von $-45°$ tritt dann auf, wenn der Realteil gleich dem negativen Imaginärteil ist. Wir formen weiter um:

$$\begin{aligned}\underline{U}_0 &= \underline{I}_2 \cdot \left(R_0 \cdot \frac{-R_{1L} - R_1 - j\omega 18L_0}{j\omega 3L_0} + \frac{-R_{1L} - R_1 - j\omega 18L_0}{3} + j\omega 6L_0\right) \\ &= \underline{I}_2 \cdot \left(R_0 \cdot \left(\frac{-R_{1L} - R_1}{j\omega 3L_0} - 6\right) + \frac{-R_{1L} - R_1}{3} - j\omega 6L_0 + j\omega 6L_0\right) \\ &= \underline{I}_2 \cdot \left(R_0 \cdot \left(\frac{-R_{1L} - R_1}{j\omega 3L_0} - 6\right) + \frac{-R_{1L} - R_1}{3}\right)\end{aligned}$$

Der Impedanzterm

$$\begin{aligned}\frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_2} &= \left(R_0 \cdot \left(\frac{-R_{1L} - R_1}{j\omega 3L_0} - 6\right) + \frac{-R_{1L} - R_1}{3}\right) \\ &= jR_0\frac{R_{1L} + R_1}{\omega 3L_0} - 6R_0 + \frac{-R_{1L} - R_1}{3}\end{aligned}$$

verursacht die Phasendrehung von $-45°$, wenn der Realteil gleich dem negativen Imaginärteil ist:

$$R_0\frac{R_{1L} + R_1}{\omega 3L_0} = 6R_0 + \frac{R_{1L} + R_1}{3}$$

Aufgelöst nach R_0 ergibt sich:

$$R_0 = \frac{\frac{R_{1L}+R_1}{3}}{\frac{R_{1L}+R_1}{\omega 3L_0} - 6} = 70\,\Omega$$

Wir rechnen den Betrag der Impedanz aus:

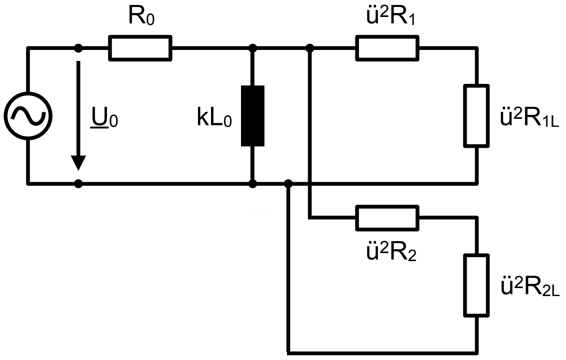
$$\left|\frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_2}\right| = \sqrt{\left(R_0\frac{R_{1L} + R_1}{\omega 3L_0}\right)^2 + \left(-6R_0 + \frac{-R_{1L} - R_1}{3}\right)^2} = \sqrt{480200}\,\Omega$$

Wir wissen, dass $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = Z \cdot \underline{I} \cdot \underline{I}^* = Z \cdot |I|^2$. Die Impedanz Z ist in unserem Falle ein Widerstand, also ist $\underline{S}$ rein reell und somit gilt: $\underline{S} = P$. Wir können also $|\underline{I}_2|$ bestimmen:

$$|\underline{I}_2| = \frac{100\,\mathrm{W}}{50\,\Omega} = 2\,\mathrm{A}$$

Für den Betrag der Spannung $\underline{U}_0$ ergibt sich:
$\underline{U}_0 = 2\,\mathrm{A} \cdot \sqrt{480200}\,\Omega \approx 1385,93\,\mathrm{V}$

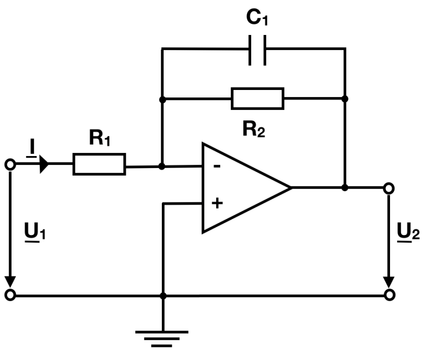
(e) Im gesuchten Ersatzschaltbild sind die Sekundärseiten parallel geschaltet:



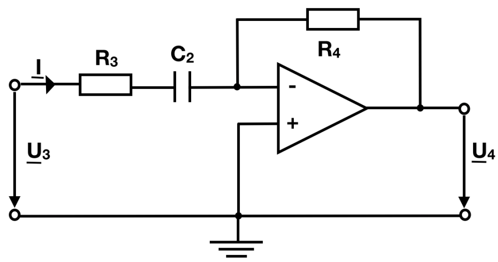
Wie kann man sich anschaulich erklären, dass die beiden Teile parallel geschaltet sein müssen? Die Teile sind parallel geschaltet, da Sie beide den gleichen Fluss durch den Eisenkern mit der gleichen Wicklungszahl (gleiche Induktivität) sehen; somit ist auch die induzierte Spannung gleich - wie bei einer Parallelschaltung beide Zweige die gleiche Spannung sehen.

Aufgabe 5 (23 Punkte)
Bodediagramme

Für ein Mikrofon wollen Sie eine Filterschaltung entwerfen, die alle Signalanteile innerhalb des Frequenzbereichs der menschlichen Stimme (100Hz bis 10kHz) verstärkt. Dazu stehen Ihnen neben einem Spannungsfolger auch die folgenden beiden Schaltungen zur Verfügung:



(a) Teilschaltung A

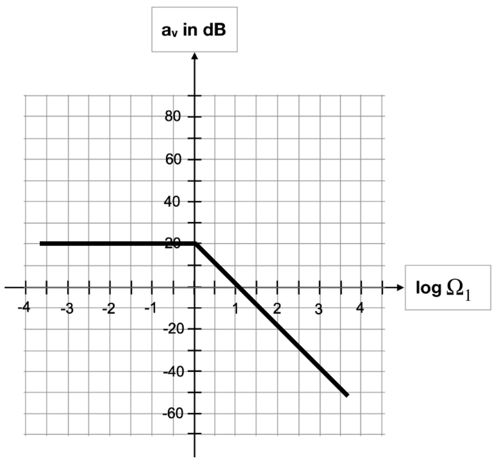


(b) Teilschaltung B

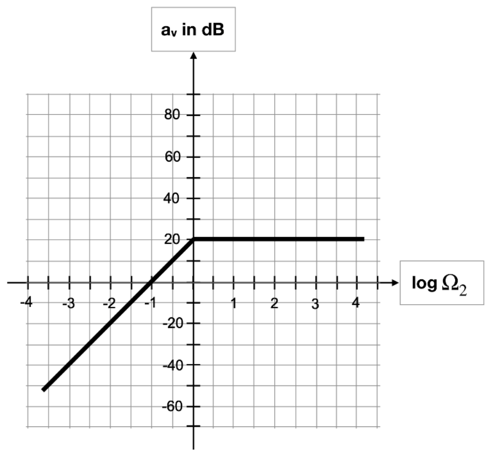
Abbildung 7: Zur Verfügung stehende Schaltungen

(a) Stellen Sie die Übertragungsfunktionen $\underline{G}_A(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$ und $\underline{G}_B(j\omega) = \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_3}$ für die beiden Filterschaltungen aus Abbildung 7(a) und 7(b) auf. (2 Punkte)

(b) Ordnen Sie die beiden Amplitudengänge aus Abbildung 8 den beiden Filterschaltungen zu. Begründen Sie Ihre Lösung anhand der Übertragungsfunktionen, die Sie in Aufgabenteil (a) hergeleitet haben. (2 Punkte)



(a) Bodediagramm 1



(b) Bodediagramm 2

Abbildung 8: Amplitudengänge der Teilschaltungen aus Abbildung 7

(c) Es gilt $R_2 = 1\,k\Omega$ und $R_4 = 10\,k\Omega$. Berechnen Sie die Bauteilwerte für R_1, R_3, C_1 und C_2 der beiden Schaltungen, sodass sich jeweils im Durchlassbereich eine Verstärkung von $20\,dB$ (s. Abbildung 8) einstellt und die Knickfrequenzen mit den Intervallgrenzen der menschlichen Sprachfrequenzen übereinstimmen. Nutzen Sie hierfür die berechneten Übertragungsfunktionen aus Aufgabenteil (a) und wählen Sie für beide Schaltungen eine geeignete Normierungsfrequenz. (6 Punkte)

(d) Verketten Sie die beiden Filterschaltungen sowie den Spannungsfolger miteinander, sodass ein Filter entsteht, das alle Frequenzen innerhalb der Bandbreite der menschlichen Sprache um $40\,dB$ verstärkt und dessen Knickfrequenzen bei den Intervallgrenzen der menschlichen Sprachfrequenzen liegen. Zeichnen Sie hierfür das vollständige Schaltbild. (2 Punkte)

(e) Wie nennt man die entstehende Filterart? (1 Punkt)

(f) Begründen Sie den Einsatz des Spannungsfolgers. (1 Punkt)

(g) Stellen Sie die Gleichungen für den Amplituden- und den Phasengang der Gesamtschaltung aus Aufgabenteil (d) auf. Wählen Sie die Normierungsfrequenz $\Omega_G = \frac{\omega}{\omega_G}$ mit $\omega_G = \frac{1}{R_2 C_1}$. Zeichnen Sie dann den Amplituden- und den Phasengang Ihrer Gesamtschaltung in Diagramm 5.1 (Amplitudengang) bzw. Diagramm 5.2 (Phasengang). (7 Punkte)

(h) Sie ersetzen Teilschaltung A aus Abbildung 7(a) durch die Schaltung in Abbildung 9. Nennen Sie qualitativ zwei Änderungen, die im Amplitudengang dieser passiven Schaltung gegenüber des Amplitudengangs von Teilschaltung A zu sehen sein werden. (2 Punkte)

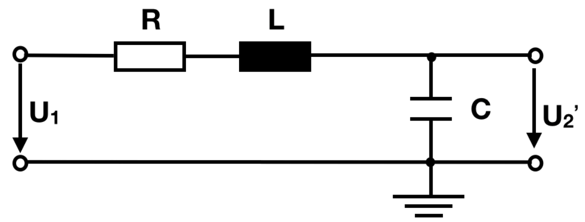


Abbildung 9: Passives Filter, mit dem Teilschaltung A ersetzt wird.

Lösung:

(a) Für Abbildung A gilt:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_1}$$

Für Abbildung B gilt:

$$\frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_3} = -\frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{j\omega R_3 C_2}{1 + j\omega R_3 C_2}$$

(b) Schaltung A repräsentiert einen Tiefpass ($\underline{U}_2/\underline{U}_1$ geht gegen 0 für $\omega \to \infty$) und gehört daher zu Bodediagramm 1. Schaltung B repräsentiert einen Hochpass ($\underline{U}_4/\underline{U}_3$ geht gegen 0 für $\omega \to 0$) und gehört daher zu Bodediagramm 2.

(c) Für Schaltung A (Tiefpass) soll $a_v = 20$dB (im Durchlassbereich) und eine Knickfrequenz von $f_1 = 10$ kHz gelten. Für die Übertragungsfunktion und somit die Verstärkung gilt:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_1}$$
$$a_{v1} = 20 \cdot \log \frac{R_2}{R_1} - 20 \cdot \log |1 + j\omega R_2 C_1|$$

Mit der Normierungsfrequenz $\omega_1 = \frac{1}{R_2 C_1}$ und $\Omega_1 = \frac{\omega}{\omega_1}$ kann die obige Gleichung umgeformt werden:

$$a_{v1} = 20 \cdot \log \frac{R_2}{R_1} - 20 \cdot |\log 1 + j\Omega_1|$$

Mit $R_2 = 1k\Omega$ kann R_1 berechnet werden:

$$\begin{aligned} 20 \cdot \log \frac{R_2}{R_1} &= 20 \\ \frac{R_2}{R_1} &= 10 \\ R_1 &= \frac{R_2}{10} \\ R_1 &= 100\,\Omega \end{aligned}$$

Mit $f_1 = 10$ kHz kann C_1 berechnet werden:

$$\begin{aligned} 2\pi f_1 &= \frac{1}{R_2 C_1} \\ C_1 &= \frac{1}{2\pi R_2 f_1} \\ C_1 &= 15.9\,nF \end{aligned}$$

Für Schaltung B (Hochpass) soll $a_v = 20$dB (im Durchlassbereich) und eine Knickfrequenz von $f_2 = 100$ Hz gelten. Für die Übertragungsfunktion und somit die Verstärkung gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_3} &= -\frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{j\omega R_3 C_2}{1 + j\omega R_3 C_2} \\ a_{v2} = 20 \cdot \log \frac{R_4}{R_3} &+ 20 \cdot \log |j\omega R_3 C_2| - 20 \cdot \log |1 + j\omega R_3 C_2| \end{aligned}$$

Mit der Normierungsfrequenz $\omega_2 = \frac{1}{R_3 C_2}$ und $\Omega_2 = \frac{\omega}{\omega_2}$ kann die obige Gleichung umgeformt werden:

$$a_{v2} = 20 \cdot \log \frac{R_4}{R_3} + 20 \cdot \log |j\Omega_2| - 20 \cdot \log |1 + j\Omega_2|$$

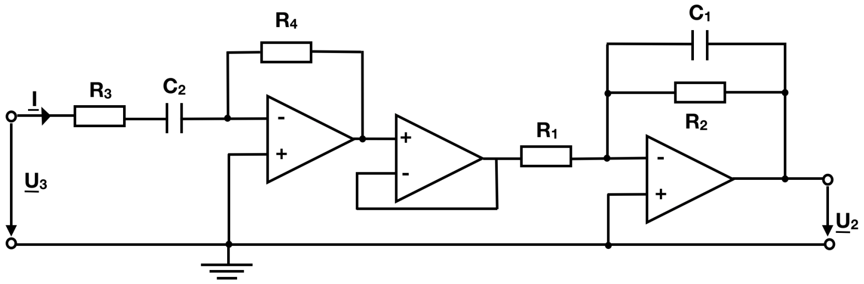
Mit $R_4 = 10k\Omega$ kann R_3 berechnet werden:

$$\begin{aligned} 20 \cdot \log \frac{R_4}{R_3} &= 20 \\ \frac{R_4}{R_3} &= 10 \\ R_3 &= \frac{R_4}{10} \\ R_3 &= 1\,k\Omega \end{aligned}$$

Mit $f_2 = 100$ Hz kann C_2 berechnet werden:

$$\begin{aligned} 2\pi f_1 &= \frac{1}{R_3 C_2} \\ C_2 &= \frac{1}{2\pi R_3 f_2} \\ C_2 &= 1.59\,\mu F \end{aligned}$$

(d) Die resultierende Gesamtschaltung sieht wie folgt aus:



Die Reihenfolge der Hoch- und Tiefpassschaltung spielt bei korrekter Wahl der Knickfrequenzen keine Rolle.

(e) Durch das Hintereinanderschalten eines Hochpass und eines Tiefpass entseht ein **Bandpass**.

(f) Ein Spannungsfolger wird eingesetzt, damit die Ausgangsspannung unabhängig von der Last ist.

(g) Es soll die Normierungsfrequenz $\Omega_G = \Omega_1$ eingesetzt werden. Daher muss die Frequenzskala des Hochpass aus Bodediagramm 2 um x verschoben werden:

$$\omega_2 = x \cdot \omega_1$$
$$x = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$
$$x = \frac{R_2 C_1}{R_3 C_2}$$
$$x = 10^{-2}$$

Damit gilt für Ω_2:

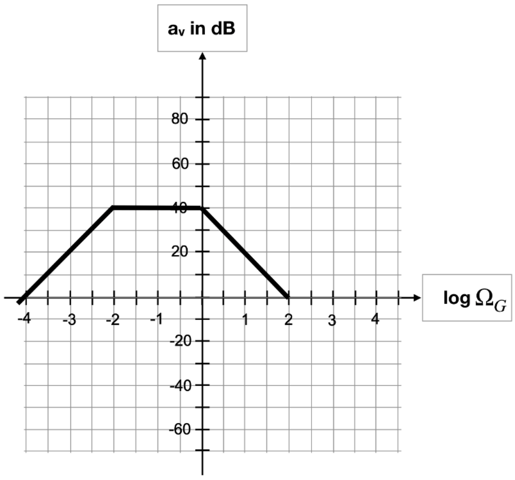
$$\Omega_2 = \frac{\omega}{\omega_2}$$
$$\Omega_2 = \frac{\omega}{10^{-2}\omega_1}$$
$$\Omega_2 = 10^2 \frac{\omega}{\omega_1}$$
$$\Omega_2 = 10^2 \frac{\omega}{\omega_G}$$

Der Amplitudengang und der Phasengang der Gesamtschaltung ergeben sich somit zu:

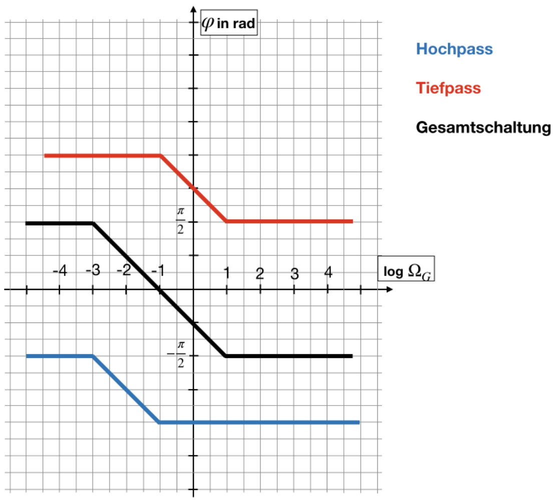
$$a_{vG} = 20 \cdot \log \frac{R_2}{R_1} - 20 \cdot \log |1 + j\Omega_1| + 20 \cdot \log \frac{R_4}{R_3} + 20 \cdot \log |j10^2\Omega_1| - 20 \cdot \log |1 + j10^2\Omega_1|$$

$$\varphi_G = \arg \frac{-R_2}{R_1} - \arg (1 + j\Omega_1) + \arg \frac{-R_4}{R_3} + \arg (j10^2\Omega_1) - \arg (1 + j10^2\Omega_1)$$
$$\varphi_G = \frac{\pi}{2} - \arctan \Omega_1 - \arctan 10^2\Omega_1$$

Der Amplitudengang sieht wie folgt aus:



Der Phasengang sieht wie folgt aus:



(h) Folgende Änderungen können sich ergeben:

- Es kann zu Resonanzüberhöhungen bei der Knickfrequenz kommen
- Im Durchlassbereich kann bei passiven Filterschaltungen die Verstärkung maximal 1 werden.
- Es handelt sich um einen Filter 2. Ordnung, d.h. im Sperrbereich nimmt die Amplitude mit $40\,dB/Dekade$ ab.

Aufgabe 6 **(14 Punkte)**
Operationsverstärker

Die unten gezeigte Operationsverstärkerschaltung besteht aus drei idealen Operationsverstärkern und den Widerständen R_1 bis R_7. Die idealen Operationsverstärker sind an eine Spannungsversorgung von $V_{CC+} = 10V$ und $V_{CC-} = -10V$ angeschlossen. Die Schaltung besteht aus Teilschaltung 1 und Teilschaltung 2.

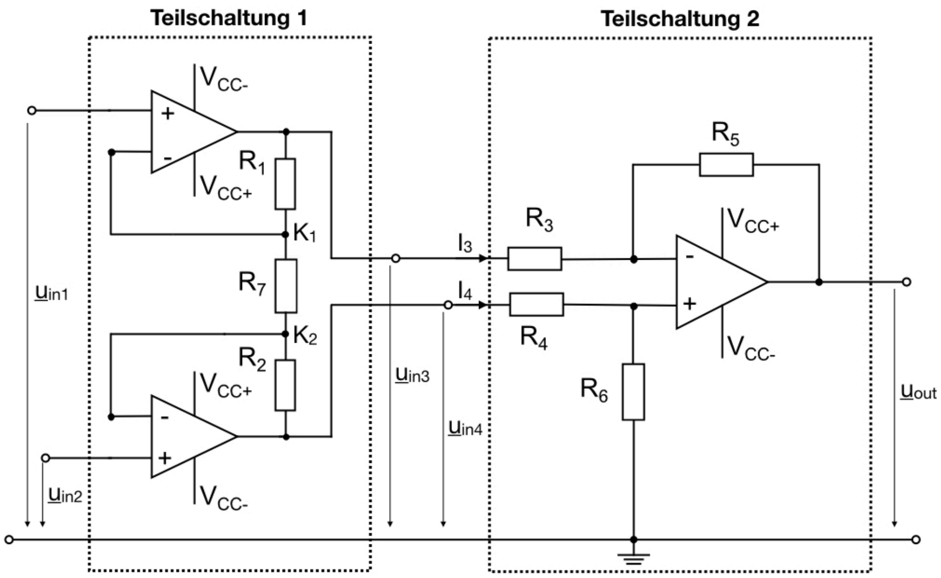


Abbildung 10

(a) Was gilt für den Eingangswiderstand eines idealen Operationsverstärkers? (1 Punkt)

(b) Wie heißt Teilschaltung 2? Erläutern Sie, was diese Schaltung macht. (2 Punkte)

(c) Leiten Sie die Übertragungsfunktionen von Teilschaltung 1 mit Hilfe der Knotengleichungen für K_1 und K_2 her. Bringen Sie diese auf die Form $\underline{u}_{in3}$ = f($\underline{u}_{in1}$,$\underline{u}_{in2}$,R) und $\underline{u}_{in4}$ = f($\underline{u}_{in1}$,$\underline{u}_{in2}$,R). (3 Punkte)

(d) Leiten Sie die Übertragungsfunktion von Teilschaltung 2 mit Hilfe von drei Maschen her. Geben Sie diese in der Form $\underline{u}_{out}$ = f($\underline{u}_{in3}$,$\underline{u}_{in4}$,R) an. (4 Punkte)
Hinweis: Berechnen Sie zuerst eine Gleichung für den Strom I_4.

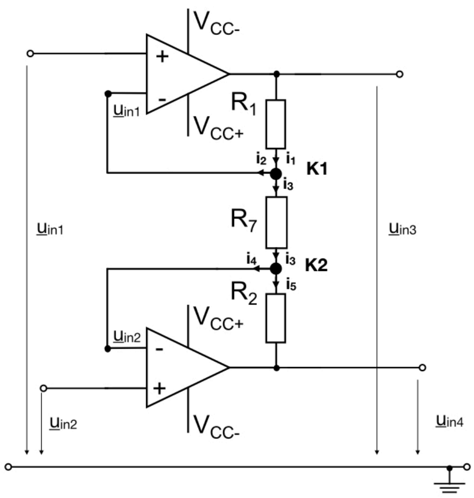
(e) Verwenden Sie die Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil (d) und nehmen Sie an, dass gilt: $R_3 = \frac{1}{k} \cdot R_5$ und $R_4 = \frac{1}{k} \cdot R_6$. (4 Punkte)
I) Vereinfachen Sie die Übertragungsfunktion $\underline{u}_{out}$ = f($\underline{u}_{in3}$,$\underline{u}_{in4}$,R) soweit wie möglich.
II) Wie muss k gewählt werden, damit sich eine Gesamtverstärkung V=2 einstellt?
III) Verwenden Sie die gegebene Verstärkung und die im Diagramm 6.1 gegebenen Spannungsverläufe von $\underline{u}_{in3}$ und $\underline{u}_{in4}$, um die Ausgangsspannung $\underline{u}_{out}$ in Diagramm 6.1 einzuzeichnen.

Lösung:

(a) Für den Eingangswiderstand eines idealen Operationsverstärkers gilt $R_{ein} = \infty$.

(b) Bei Teilschaltung 2 handelt es sich um einen Differenzverstärker. Es wird die Spannungsdifferenz von u_{in3} und u_{in4} verstärkt.

(c) Zur Herleitung der Übertragungsfunktion wird zuerst die Richtung der Ströme festgelegt:



$$K1: \quad \frac{\underline{u}_{in3} - \underline{u}_{in1}}{R_1} - i_2 - \frac{\underline{u}_{in1} - \underline{u}_{in2}}{R_7} = 0$$

$$K2: \quad \frac{\underline{u}_{in1} - \underline{u}_{in2}}{R_7} - i_4 - \frac{\underline{u}_{in2} - \underline{u}_{in4}}{R_2} = 0$$

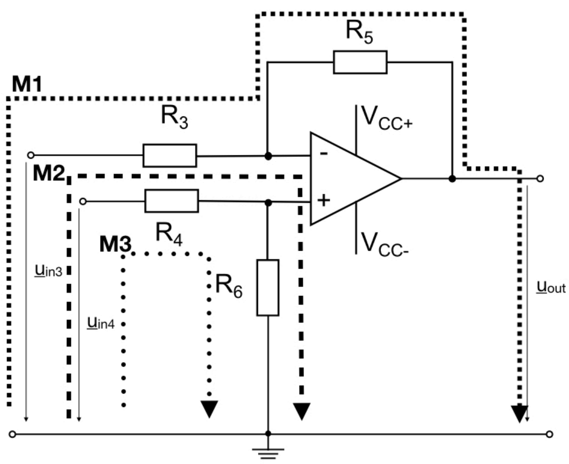
Da kein Strom in den Operationsverstärker fließt, muss $i_2 = 0$ und $i_4 = 0$ gelten.

$$\underline{u}_{in3} = \underline{u}_{in1} + R_1 \cdot \frac{\underline{u}_{in1} - \underline{u}_{in2}}{R_7}$$

$$\underline{u}_{in4} = \underline{u}_{in2} - R_2 \cdot \frac{\underline{u}_{in1} - \underline{u}_{in2}}{R_7}$$

(d) Zur Herleitung der Übertragungsfunktion werden die drei Maschen aus der folgenden Abbildung verwendet:

Teilschaltung 2



$$M1: \quad -\underline{u}_{in3} + R_3 \cdot I_3 + R_5 \cdot I_3 + \underline{u}_{out} = 0$$
$$M2: \quad -\underline{u}_{in3} + R_3 \cdot I_3 + R_6 \cdot I_4 = 0$$
$$M3: \quad -\underline{u}_{in4} + R_4 \cdot I_4 + R_6 \cdot I_4 = 0$$

Aus M3 folgt:

$$I_4 = \frac{\underline{u}_{in4}}{R_4 + R_6}$$

Das können wir einsetzen in M2:

$$-\underline{u}_{in3} + R_3 \cdot I_3 + R_6 \cdot \frac{\underline{u}_{in4}}{R_4 + R_6}$$

Aufgelöst nach I_3 ergibt sich:

$$I_3 = \frac{\underline{u}_{in3}}{R_3} - \frac{R_6}{R_3} \cdot \frac{\underline{u}_{in4}}{R_4 + R_6}$$

Eingesetzt in M1 erhalten wir:

$$-\underline{u}_{in3} + \underline{u}_{in3} - R_6 \cdot \frac{\underline{u}_{in4}}{R_4 + R_6} + \frac{R_5}{R_3} \cdot \underline{u}_{in3} - \frac{R_5 \cdot R_6}{R_3} \cdot \frac{\underline{u}_{in4}}{R_4 + R_6} + \underline{u}_{out} = 0$$

$$\underline{u}_{out} = -\frac{R_5}{R_3} \cdot \underline{u}_{in3} + \frac{R_3 \cdot R_6 + R_5 \cdot R_6}{R_3 \cdot (R_4 + R_6)} \cdot \underline{u}_{in4}$$

(e) I) Wir gehen aus von:

$$\underline{u}_{out} = -\frac{R_5}{R_3} \cdot \underline{u}_{in3} + \frac{R_3 \cdot R_6 + R_5 \cdot R_6}{R_3 \cdot (R_4 + R_6)} \cdot \underline{u}_{in4}$$

Mit $R_3 = \frac{1}{k} \cdot R_5$ und $R_4 = \frac{1}{k} \cdot R_6$ gilt:

$$u_{out} = -k \cdot u_{in3} + \frac{\frac{R_5 R_6}{k} + R_5 R_6}{\frac{R_5}{k}(\frac{R_6}{k} + R_6)} u_{in4}$$
$$= -k \cdot u_{in3} + \frac{(\frac{1}{k}) R_5 R_6}{\frac{R_5 R_6}{k^2} + \frac{R_5 R_6}{k}} u_{in4} = -k \cdot u_{in3} + \frac{\frac{1}{k} + 1}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k}} u_{in4}$$
$$= k \cdot (u_{in4} - u_{in3})$$

II) Für V=2 muss k=2 gelten.

III) Die resultierende Ausgangsspannung ist in der folgenden Abbildung dargestellt: