Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel   Übungsleiter: M.Sc. Jochen Brenneisen

---

Klausur

1. März 2021
Beginn: 14:00 Uhr

Familienname:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

AUFKLEBER

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem nicht programmierbaren Taschenrechner.

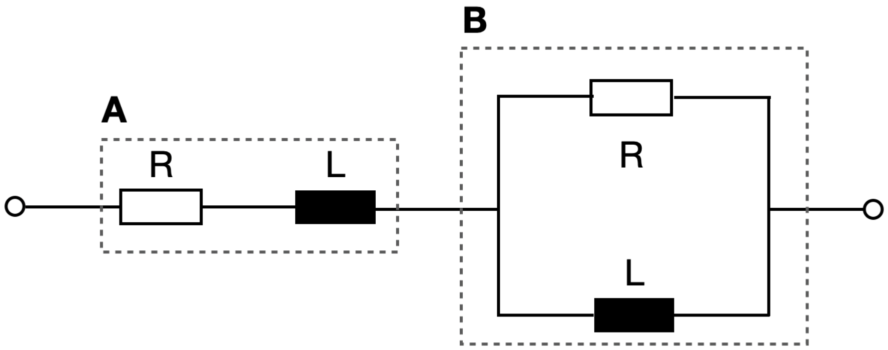
Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein!
Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare!
Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	25	
2	13	
3	20	
4	22	
5	14	
Gesamt:	94	

Aufgabe 1 **(25 Punkte)**
Ortskurve

Gegeben sei die folgende Schaltung:



(a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil (3 Punkte)
- der Admittanz $Y_{\mathbf{A}}(\omega)$ der Teilschaltung **A**.
- der Impedanz $Z_{\mathbf{B}}(\omega)$ der Teilschaltung **B**.

(b) Zeichnen Sie nun die Ortskurven (6 Punkte)
- der Impedanz $Z_{\mathbf{A}}(\omega)$ in Diagramm 1.1.
- der Admittanz $Y_{\mathbf{A}}(\omega)$ in Diagramm 1.2.
- der Impedanz $Z_{\mathbf{B}}(\omega)$ in Diagramm 1.3.
- der Admittanz $Y_{\mathbf{B}}(\omega)$ in Diagramm 1.4.

Markieren Sie in allen Ortskurven die Punkte $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ und beschriften Sie die Achsen.

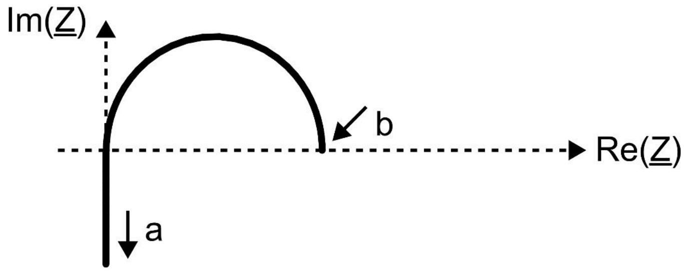
(c) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der Impedanz $Z_{\mathbf{ges}}(\omega)$ der Gesamtschaltung und deren Grenzwerte für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$. (4 Punkte)

(d) Verändern Sie Teilschaltung **A** durch Hinzufügen eines Kondensators C so, dass sich die folgende Admittanz $Y_{\mathbf{A2}}(\omega)$ ergibt: (3 Punkte)

$$Y_{\mathbf{A2}}(\omega) = \frac{R + j\omega\left[CR^2 + C(\omega L)^2 - L\right]}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Zeichnen Sie die veränderte Teilschaltung und beweisen Sie $Y_{\mathbf{A2}}(\omega)$ mathematisch.

(e) Verändern Sie Teilschaltung **B** durch Hinzufügen eines Kondensators C so, dass sich die folgende Impedanzortskurve $Z_{\mathbf{B2}}(\omega)$ ergibt: (6 Punkte)



Zeichnen Sie die veränderte Teilschaltung und berechnen Sie $Z_{\mathbf{B2}}(\omega)$. Trennen Sie den Ausdruck nach Real- und Imaginärteil und bestimmen Sie **a** und **b**.

(f) Berechnen Sie die Resonanzfrequenz ω_0 der veränderten Teilschaltung **B2**. (3 Punkte)

Lösung:

(a) Die Impedanz $Z_\mathbf{A}(\omega)$ ist eine Serienschaltung aus dem Widerstand R und der Induktivität L:

$$Z_\mathbf{A}(\omega) = R + j\omega L \tag{1}$$

Damit ergibt sich für die Admittanz $Y_\mathbf{A}(\omega)$:

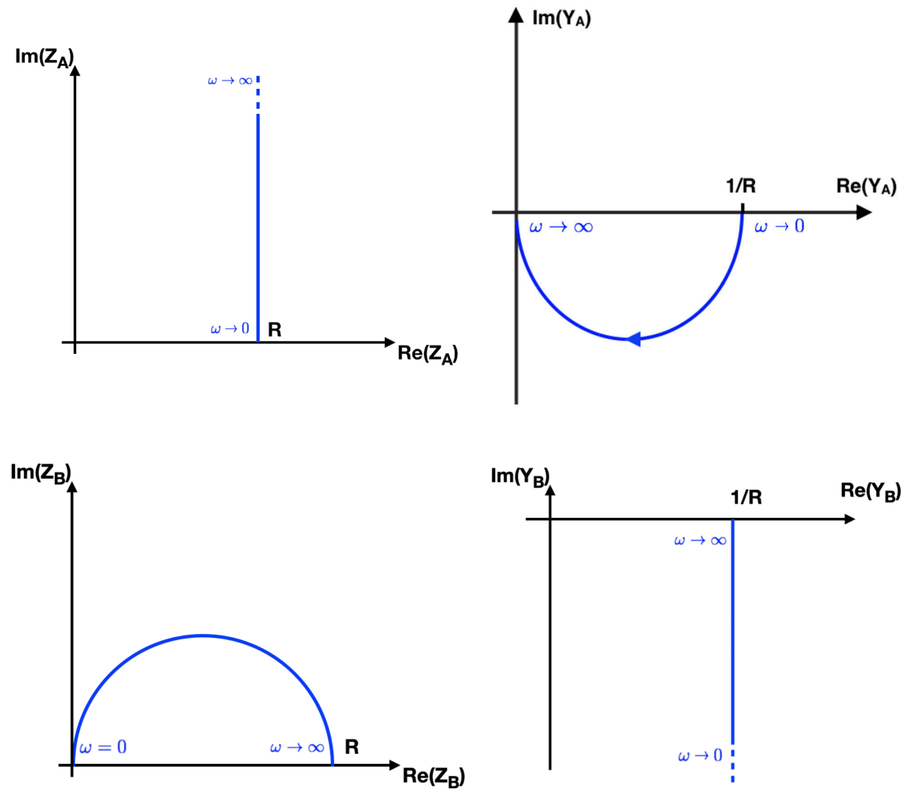
$$Y_\mathbf{A}(\omega) = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} \tag{2}$$

Die Impedanz $Z_\mathbf{B}(\omega)$ kann wie folgt bestimmt werden:

$$Z_\mathbf{B}(\omega) = j\omega L \,||R = \frac{j\omega LR}{R + j\omega L} \tag{3}$$

$$= \frac{j\omega LR(R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\frac{\omega L R^2}{R^2 + (\omega L)^2} \tag{4}$$

(b)



(c) Die Impedanz der Gesamtschaltung setzt sich aus der Serienschaltung der Impedanzen $Z_\mathbf{A}(\omega)$ und $Z_\mathbf{B}(\omega)$ der beiden Teilschaltungen **A** und **B** zusammen. Daher:

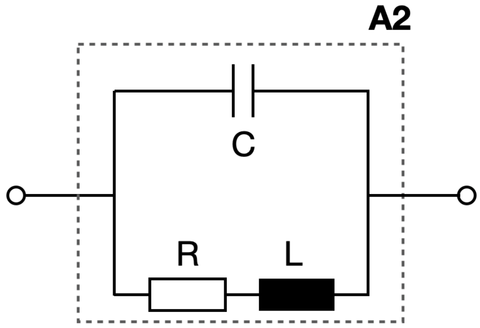
$$Z_\mathbf{ges}(\omega) = Z_\mathbf{A}(\omega) + Z_\mathbf{B}(\omega) \tag{5}$$

Für die Impedanz der Gesamtschaltung ergibt sich aus den Gleichungen (5), (1) und (4) die folgende Gleichung:

$$Z_\mathbf{ges}(\omega) = R + j\omega L + \frac{j\omega LR}{R + j\omega L} = R + \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega L + \frac{\omega L R^2}{R^2 + (\omega L)^2}\right) \tag{6}$$

Für $\omega \to 0$ folgt $Z_{\mathbf{ges}}(\omega) \to R$. Für $\omega \to \infty$ folgt für den Realteil mit der Umformung $R + \frac{\omega^2 L^2 R}{R^2+(\omega L)^2} = R + \frac{L^2 R}{\frac{R^2}{\omega^2}+L^2}$ dann $Z_{\mathbf{ges}}(\omega) \to 2R$. Für den Imaginärteil gilt mit Umformung $\omega L + \frac{\omega L R^2}{R^2+(\omega L)^2} = \omega L + \frac{LR^2}{\frac{R^2}{\omega}+\omega L^2}$ dann $Z_{\mathbf{ges}}(\omega) \to +j\infty$.

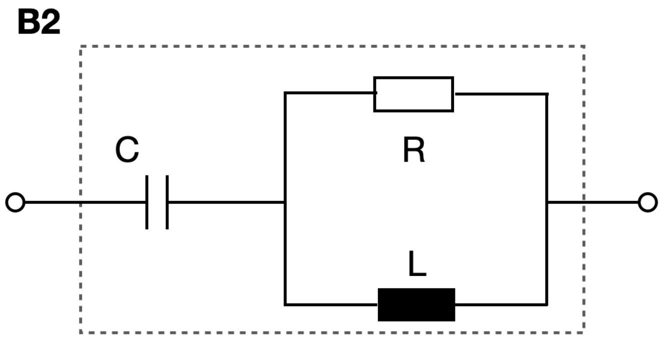
(d) Der Kondensator C muss parallel zur Serienschaltung aus R und L geschaltet werden, da für $\omega \to 0$ $Y = \frac{1}{R}$ herauskommen muss.



Um den gegeben Ausdruck zu beweisen, leiten wir die neue Admittanz $Y_{\mathbf{A2}}(\omega)$ her:

$$
\begin{aligned}
Y_{\mathbf{A2}}(\omega) &= Y_C(\omega) + Y_{RL}(\omega) = j\omega C + \frac{1}{j\omega L + R} \\
&= \frac{R + j\omega\left[CR^2 + C(\omega L)^2 - L\right]}{R^2 + (\omega L)^2}
\end{aligned}
$$

(e) Der Kondensator C muss seriell (in Reihe) zur Parallelschaltung aus R und L geschaltet werden:



Um den gegeben Ausdruck zu beweisen, leiten wir die neue Impedanz $Z_{\mathbf{B2}}(\omega)$ her:

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathbf{B2}}(\omega) &= Z_C(\omega) + Z_B(\omega) = \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega RL}{R + j\omega L} \\
&= \frac{\omega^4 RC^2L^2 + j\omega C\left[\omega^2 R^2 CL - (\omega L)^2 - R^2\right]}{\omega^4 C^2 L^2 + \omega^2 C^2 R^2}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für den Real- und Imaginärteil der Gesamtimpedanz:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\{Z_{\mathbf{B2}}(\omega)\} &= \frac{\omega^2 RL^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \\
\mathrm{Im}\{Z_{\mathbf{B2}}(\omega)\} &= \frac{\omega C\left[\omega^2 R^2 CL - (\omega L)^2 - R^2\right]}{\omega^4 C^2 L^2 + \omega^2 C^2 R^2} = \frac{\omega^2 R^2 LC - \omega^2 L^2 - R^2}{\omega C R^2 + \omega^3 C L^2}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich für a und b:

$$a = \omega \to 0 = -j\infty$$
$$b = \omega \to \infty = \frac{\omega^2 R L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{R L^2}{\frac{R^2}{\omega^2} + L^2} = R$$

(f) Bei der Resonanzfrequenz ist der Imaginärteil der Impedanz null:

$$\mathrm{Im}\{Z_{\mathbf{B2}}(\omega_0)\} = 0 \tag{7}$$

Daraus folgt:

$$\omega_0^2 R^2 LC - \omega_0^2 L^2 - R^2 = 0 \tag{8}$$

Mathematisch ergeben sich folgende Lösungen:

$$\omega_{0_{1,2}} = \pm\sqrt{\frac{R^2}{R^2 LC - L^2}} \tag{9}$$

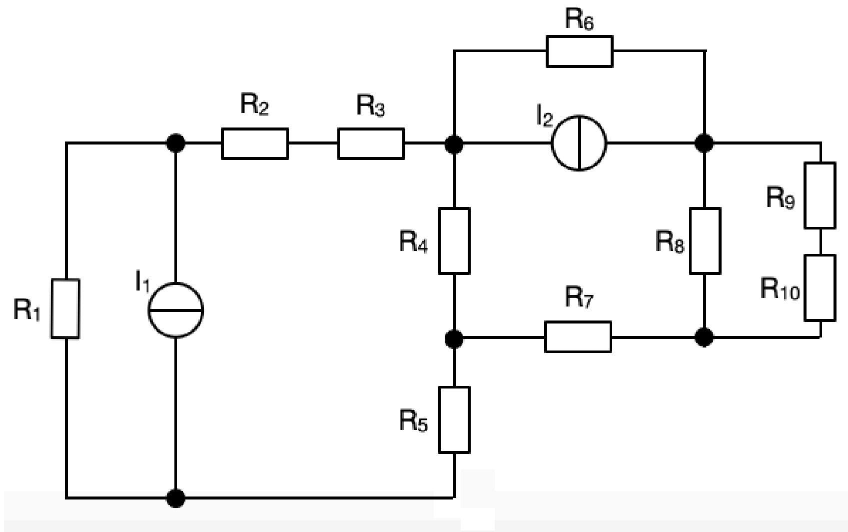
Da die Resonanzfrequenz nicht null oder negativ sein kann, verbleibt als einzige gültige Lösung:

$$\omega_{0_2} = \sqrt{\frac{R^2}{R^2 LC - L^2}} \tag{10}$$

Aufgabe 2 **(13 Punkte)**
Netzwerk

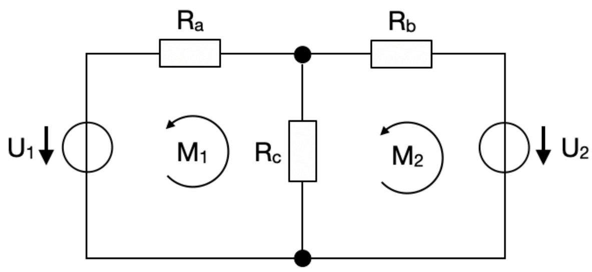
Gegeben sind die folgenden beiden Schaltungen:

Schaltung 1



$$R_1 = R_4 = R_5 = R_7 = R_9 = R_{10} = 1\,\Omega,\ R_2 = R_6 = R_8 = 2\,\Omega,\ R_3 = 3\,\Omega$$
$$I_1 = 3\,\text{A},\ I_2 = 12\,\text{A}$$

Schaltung 2



(a) Es soll Schaltung 1 in Schaltung 2 umgeformt werden. Führen Sie hierzu folgende Schritte zur Vereinfachung des Netzwerkes durch: (5 Punkte)

i) Fassen Sie zeichnerisch alle parallelen und in Reihe liegenden Widerstände soweit wie möglich zusammen.
Hinweis: Die beiden Innenwiderstände R_1 und R_6 sollen in diesem Schritt von der Vereinfachung unberührt bleiben!

ii) Führen Sie nun, eine geeignete Quellenumwandlung für das Maschenstromverfahren durch. Berechnen Sie die Spannungen U_1 und U_2.

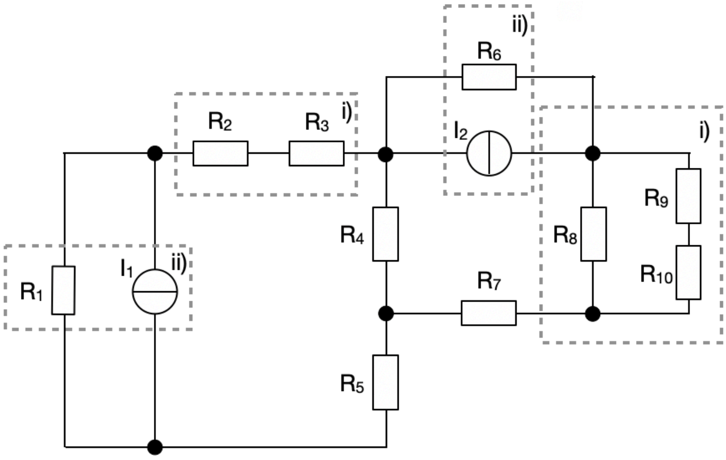
iii) Vereinfachen Sie soweit möglich und berechnen Sie die Widerstandswerte R_a, R_b und R_c.

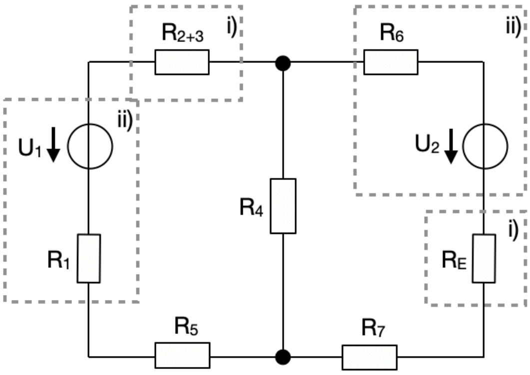
(b) Bestimmen Sie mit dem formalisierten Maschenstromverfahren das Gleichungssystem für die Maschenströme I_{M1} und I_{M2} (Schaltung 2). Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel. Berechnen Sie mindestens eine Determinate schriftlich. (6 Punkte)

(c) Welche Leistung geben die beiden Quellen U_1 und U_2 aus Schaltung 2 ab? (2 Punkte)

Lösung:

(a) **Umwandlungen:**





i) Parallelschaltung + Reihenschaltung

Für den Ersatzwiderstand $R_E = R_8||(R_9 + R_{10})$ gilt:
$R_E = \frac{R_8 \cdot (R_9+R_{10})}{R_8+R_9+R_{10}} = 1\,\Omega$
Für die Reihenschaltung gilt: $R_{2+3} = R_2 + R_3 = 5\,\Omega$

ii) Stromquelle in Spannungsquelle umwandeln;
$U = R \cdot I$
$U_1 = I_1 \cdot R_1 = 3\,V$
$U_2 = I_2 \cdot R_6 = 24\,V$

iii) Vereinfachung:
Nun können die Widerstände weiter zusammengefasst werden. Es gilt:

$$R_a = R_1 + R_2 + R_3 + R_5 = 7\,\Omega$$
$$R_b = R_6 + R_7 + R_E = 4\,\Omega$$
$$R_c = R_4 = 1\,\Omega$$

(b) Es gilt $U = R \cdot I$.

i)

$$\begin{pmatrix} R_a + R_c & -R_c \\ -R_c & R_b + R_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 24 \end{pmatrix}$$

ii) Die Berechnung der Determinante ergibt:

$$det(G) = 8 \cdot 5 - (-1) \cdot (-1) = 39\,\Omega^2$$

$I_{M,1}$**:**

$$G_1 = \det \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 24 & 5 \end{pmatrix} = 9\,V \cdot \Omega$$
$$I_{M,1} = \frac{G_1}{G} = \frac{9}{39} = \frac{3}{13}\,A$$

$I_{M,2}$**:**

$$G_2 = \det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 24 \end{pmatrix} = 189\,V \cdot \Omega$$
$$I_{M,2} = \frac{G_2}{G} = \frac{189}{39} = \frac{63}{13}\,A$$

Somit gilt $I = \begin{bmatrix} \frac{3}{13} & \frac{63}{13} \end{bmatrix} A$

(c) Allgemein gilt: P=U·I.

Im Falle einer Quelle ist die abgegebene Leistung positiv, wenn Strom und Spannung in die entgegengesetzte Richtung zeigen. Dadurch ergibt sich:

P_1=-3 V$\cdot\frac{3}{13}$ A=-$\frac{9}{13}$ W $\approx -0,7$ W

P_2=24 V$\cdot\frac{63}{13}$ A=$\frac{1512}{13}$ W $\approx 116,3$ W

Aufgabe 3 **(20 Punkte)**

Komplexe Wechselstromlehre

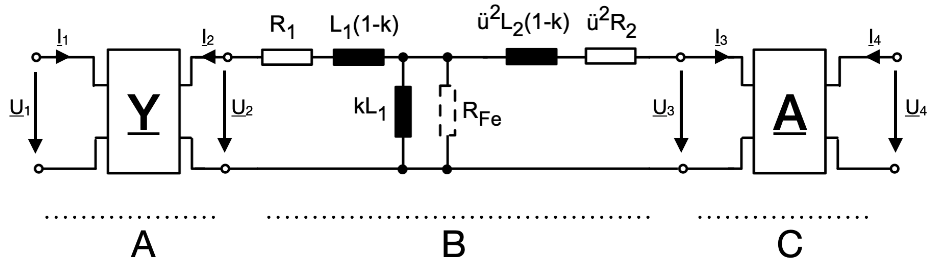


Abbildung 1: Kettenschaltung

Gegeben sei die obige Kettenschaltung mit den zugehörigen Matrizen:

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R+j\omega L} & -\frac{1}{R+j\omega L} \\ -\frac{1}{R+j\omega L} & \frac{1}{R+j\omega L} + j\omega C \end{bmatrix} \qquad \underline{A} = \begin{bmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}} \end{bmatrix}$$

Es gilt $R_{Fe} = 0$.

Des weiteren ist die folgende Umrechnungsvorschrift bekannt:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_{11}}{\underline{Z}_{21}} & \frac{det\ \underline{Z}}{\underline{Z}_{21}} \\ \frac{1}{\underline{Z}_{21}} & \frac{\underline{Z}_{22}}{\underline{Z}_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} & -\frac{1}{\underline{Y}_{21}} \\ -\frac{det\ \underline{Y}}{\underline{Y}_{21}} & -\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{det\ \underline{H}}{\underline{H}_{21}} & -\frac{\underline{H}_{11}}{\underline{H}_{21}} \\ -\frac{\underline{H}_{22}}{\underline{H}_{21}} & -\frac{1}{\underline{H}_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{P}_{21}} & \frac{\underline{P}_{22}}{\underline{P}_{21}} \\ \frac{\underline{P}_{11}}{\underline{P}_{21}} & \frac{det\ \underline{P}}{\underline{P}_{21}} \end{bmatrix}$$

Es gilt die vereinfachende Annahme, dass Vierpol B den Ausgang von Vierpol A nicht belastet.

(a) Geben Sie die allgemeine Definition der vier Matrixelemente der Admittanzmatrix an. (2 Punkte)

(b) Zeichnen Sie ein möglichst einfaches Schaltbild für die Teilschaltung A ("Welche Schaltung ist in der black box?"). Geben Sie auch zwei vereinfachte Ersatzschaltbilder an, die zur Berechnung der Kernadmittanzen benötigt werden. (3 Punkte)

(c) Um welche Art von Filterschaltung handelt es sich bei Teilschaltung A? Begründen Sie! (2 Punkte)

(d) Kann das Reziprozitätstheorem für Teilschaltung A angewendet werden? Wann gilt das Theorem und was besagt es? (2 Punkte)

(e) Zeigen Sie, dass für die Leerlauf-Spannungsübersetzung der Teilschaltung B gilt (2 Punkte)

$$\underline{A}_{B,11} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_3}\right|_{-\underline{I}_3=0} = \frac{1 + \frac{R_1}{j\omega L_1}}{k}.$$

Nehmen Sie ab sofort an, dass k=1 gilt.

(f) Was bedeutet dies für den Transformator in Schaltungsteil B und C? (1 Punkt)

(g) Bestimmen Sie die namenlose Größe $\underline{A}_{B,21} = -\left.\frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_3}\right|_{\underline{U}_3=0}$. (4 Punkte)

Zeichnen Sie das dafür nötige vereinfachte Ersatzschaltbild.

Hinweis: Die Gleichung muss nicht nach Real- und Imaginärteil aufgelöst werden.

(h) Bestimmen Sie $\underline{A}_{A,12} = -\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\Big|_{-\underline{U}_2=0}$ (2 Punkte)

(i) Bestimmen Sie die Leerlauf-Spannungsübersetzung der gesamten Schaltung. (2 Punkte)
Hinweis: Überlegen Sie, welche Auswirkung die spärlich besetzte Matrix $\underline{A}$ hat. Für die vollständige Lösung der Aufgabe reicht es aus, wenn sie die Gleichung zur Berechnung der Leerlauf-Spannungsübersetzung aus den Koeffizienten der drei Kettenmatrizen angeben.

Lösung:

(a) Es gilt:

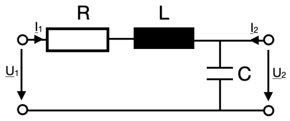
$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\Big|_{\underline{U}_2=0} \qquad \text{Eingangs-Kurzschlussadmittanz}$$

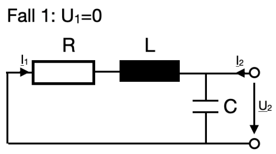
$$\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\Big|_{\underline{U}_1=0} \qquad \text{Ausgangs-Kurzschlussadmittanz}$$

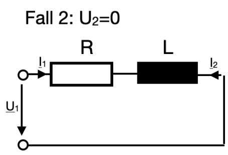
$$\underline{Y}_{21} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\Big|_{\underline{U}_2=0} \qquad \text{Kurzschluss-Kernadmittanz vorwärts}$$

$$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\Big|_{\underline{U}_1=0} \qquad \text{Kurzschluss-Kernadmittanz rückwärts}$$

(b) Die Schaltung und die beiden Ersatzschaltbilder sind in der folgenden Abbildung zu sehen:







(c) Bei Teilschaltung A handelt es sich um einen Tiefpass zweiter Ordnung. Mit Hilfe der Spannungsteilerregel ergibt sich:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

Alternativ kann auch die Umrechungsvorschrift genutzt werden:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = A_{11} = -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}} = -\frac{\frac{1}{R+j\omega L} + j\omega C}{-\frac{1}{R+j\omega L}}$$

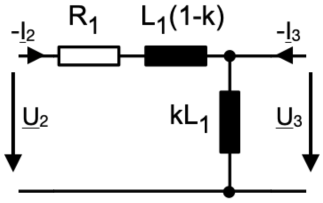
$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = 1 + (R + j\omega L) \cdot j\omega C = 1 - \omega^2 LC + j\omega RC$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

Bildet man nun die Grenzwerte $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$, so ergibt sich das Tiefpassverhalten.

(d) Das Reziprozitätstheorem besagt: Bei linearen passiven Vierpolen gilt $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$. Entsprechend auch $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$. Das ist hier gegeben.

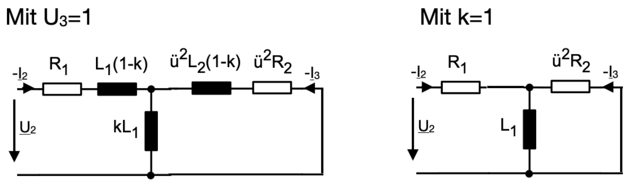
(e) Mit $-\underline{I}_3 = 0$ ergibt sich das folgende Ersatzschaltbild:



$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_3} = \frac{R_1 + j\omega L_1 \cdot (1-k) + j\omega L_1 \cdot k}{k \cdot j\omega L_1}$$
$$= \frac{R_1 + j\omega L_1}{j\omega k L_1} = \frac{1 + \frac{R_1}{j\omega L_1}}{k}$$

(f) k=1 bedeutet: Perfekte Kopplung, also keine Streuung.

(g) Es ergibt sich das folgende Ersatzschaltbild:



Durch Nutzung der Stromteilerregel lässt sich die gesuchte Größe berechnen:

$$-\frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_3} = -\frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_3} \cdot \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_2} = -\frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_2} \cdot \frac{\underline{I}_2}{-\underline{I}_3}$$

Setzt man den Stromteiler und die Gesamtimpedanz der Schaltung ein, ergibt sich:

$$-\frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_3} = -(R_1 + \frac{\text{ü}^2 R_2 j\omega L_1}{\text{ü}^2 R_2 + j\omega L_1}) \cdot \frac{\frac{1}{\text{ü}^2 R_2} + \frac{1}{j\omega L_1}}{\frac{1}{\text{ü}^2 R_2}} = -\frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_2} \cdot \frac{\underline{I}_2}{-\underline{I}_3}$$
$$= (R_1 + \frac{\text{ü}^2 R_2 j\omega L_1}{\text{ü}^2 R_2 + j\omega L_1}) \cdot (1 - j\frac{\text{ü}^2 R_2}{\omega L_1}) := \underline{A}_{B,21}$$

(h) Das Element $\underline{A}_{A,12}$ ergibt sich mit Hilfe der Transformationsvorschrift zu

$$[\underline{A}_{A,12}] = -\frac{1}{\underline{Y}_{21}} = R + j\omega L$$

(i) Die Leerlauf-Spannungsübersetzung ist im ersten Element der Kettenmatrix $\underline{A}_{ges,11}$ angegeben. In dieser Schaltung sind die Vierpole A, B und C hintereinander geschaltet, somit können für die Kettenmatrix der Gesamtschaltung alle einzelnen Kettenmatrizen multipliziert werden.

$$\begin{aligned}[\underline{A}_{ges}] &= [\underline{A}_A] \cdot [\underline{A}_B] \cdot [\underline{A}_C] \\ &= \begin{bmatrix} \underline{A}_{A,11} \cdot \underline{A}_{B,11} + \underline{A}_{A,12} \cdot \underline{A}_{B,21} & ... \\ ... & ... \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{ü} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{ü}} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Durch die spärlich besetzte Matrix $\underline{A}_C$ ergibt sich $\underline{A}_{ges,11} = \text{ü} \cdot (\underline{A}_{A,11} \cdot \underline{A}_{B,11} + \underline{A}_{A,12} \cdot \underline{A}_{B,21})$ ausschließlich aus fünf relevanten Matrixeinträgen.

Die abschließende Matrixmultiplikation musste laut Hinweis nicht durchgeführt werden, alle Elemente wurden in den Aufgabenteilen c), e), g) und h) berechnet.

Aufgabe 4 (22 Punkte)
Bodediagramm

(a) Ordnen Sie die Amplitudengänge A-D den Schaltungen 1-4 in Abbildung 3 (Folgeseite) zu. Geben Sie zusätzlich für jede Schaltung eine korrekte Bezeichnung an. Geben Sie außerdem wenn zutreffend an, ob es sich um eine aktive oder passive Schaltung handelt und welche Ordnung sie besitzt. (8 Punkte)

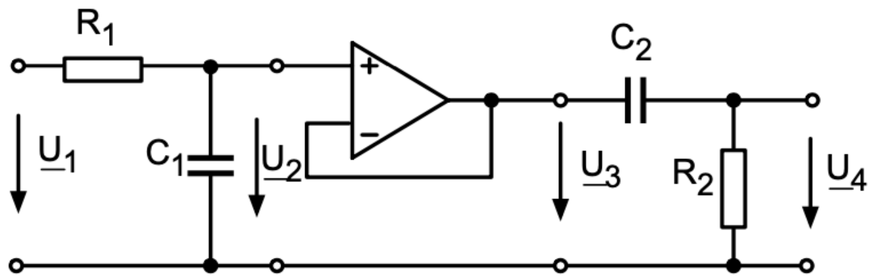


Abbildung 2: Schaltbild

(b) Betrachten Sie nun die Schaltung in Abbildung 2. Wozu dient der Operationsverstärker? Was gilt somit für das Spannungsverhältnis $\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2}$? (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion der Schaltung in Abbildung 2 die folgende Form besitzt: (2 Punkte)

$$\frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1} = \frac{j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega(C_1 R_1 + C_2 R_2) - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2}$$

(d) Im Folgenden gilt $C_2 R_2 = 10 \cdot C_1 R_1$. Wählen Sie die Normierungsfrequenz $\Omega_G = \omega C_2 R_2$ und geben Sie die Gleichungen für Amplituden- und Phasengang an. (2 Punkte)
Hinweis: Sie sollten dazu den Nenner der Übertragungsfunktion in der Form $(1 + jA) \cdot (1 + jB)$ *darstellen.*

(e) Skizzieren Sie Amplituden- und Phasengang der Schaltung aus Abbildung 2 in Diagramm 4.1 (Amplitudengang) und Diagramm 4.2 (Phasengang). Beschriften Sie alle Achsen! (5 Punkte)

(f) Wie nennt man die Schaltung aus Abbildung 2? (1 Punkt)

(g) Wie können Sie mit dem Einsatz einer zusätzlichen Spule einen Abfall des Amplitudengangs für Frequenzen $\Omega > 10^{+1}\Omega_G$ um 40dB/Dekade hervorrufen? Zeichnen Sie das resultierende Gesamtschaltbild. (2 Punkte)

Lösung:

(a) Schaltung 1: Amplitudengang D, passiver Tiefpass 1. Ordnung
Schaltung 2: Amplitudengang A, Spannungsfolger
Schaltung 3: Amplitudengang B, aktiver invertierender Hochpass 1. Ordnung
Schaltung 4: Amplitudengang C, passiver Tiefpass, 2. Ordnung

(b) Der Spannungsfolger wird eingesetzt um beide Teilschaltungen voneinander zu entkoppeln. Daher wird der Ausgang von Vierpol 1 nicht belastet. Für $\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2}$ gilt somit $\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} = 1$.

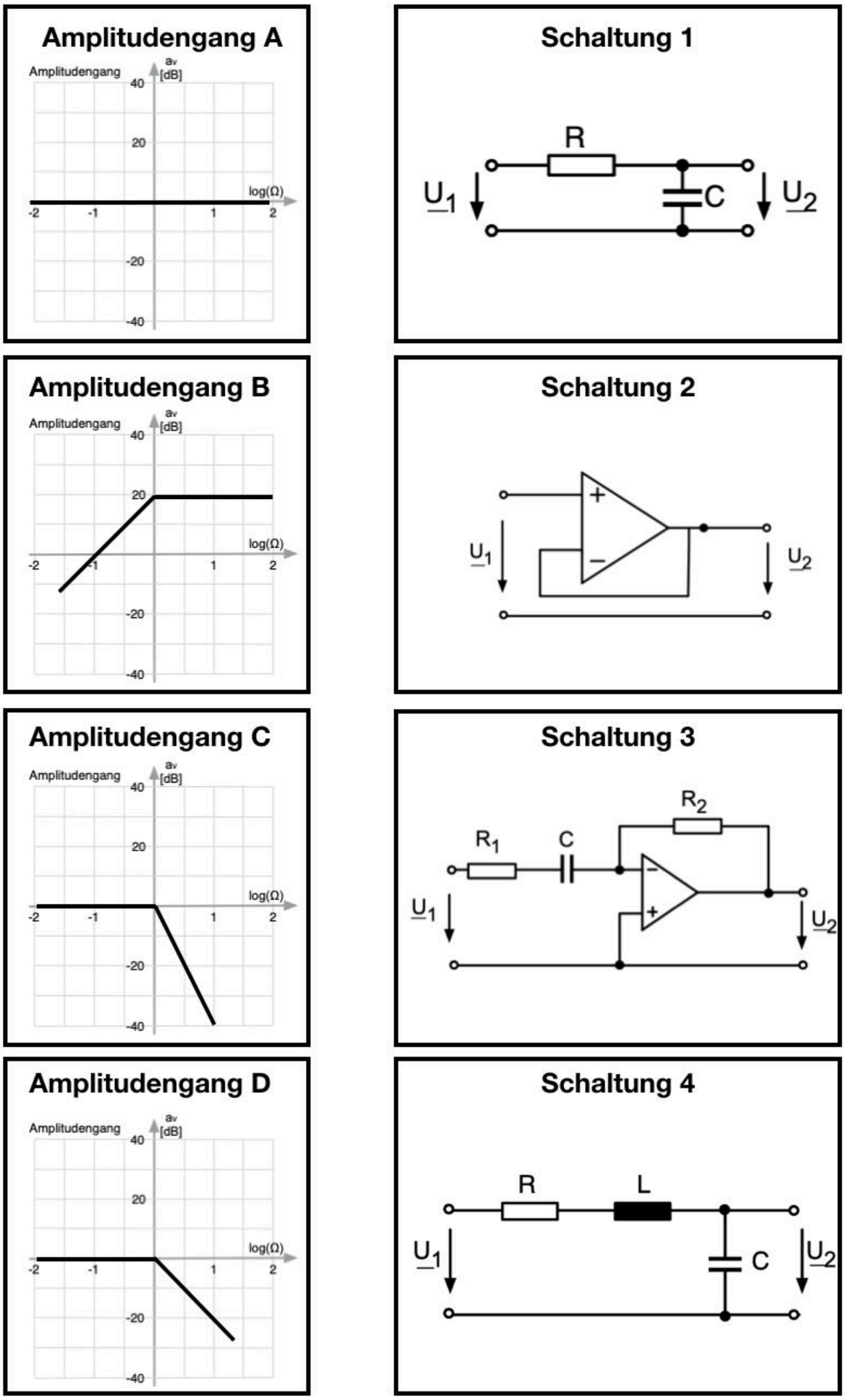


Abbildung 3: Bodediagramme und Schaltbilder

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1} &= \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_3} \cdot \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \\
&= \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_3} \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \\
&= \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} \cdot \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} \\
&= \frac{j\omega C_2 R_2}{(1 + j\omega C_2 R_2) \cdot (1 + j\omega C_1 R_1)} \\
&= \frac{j\omega C_2 R_2}{1 + j\omega (C_1 R_1 + C_2 R_2) - \omega^2 C_1 C_2 R_1 R_2}
\end{aligned}$$

(d) Für die Übertragungsfunktion gilt:

$$\frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1} = \frac{j\Omega_G}{(1 + j\Omega_G) \cdot (1 + 10^{-1} j\Omega_G)}$$

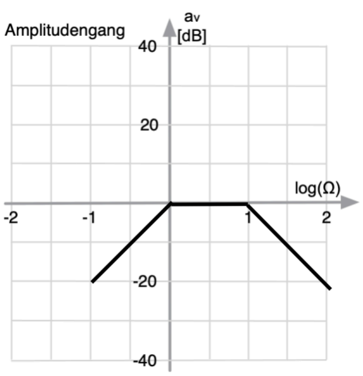
Für den Amplitudengang gilt:

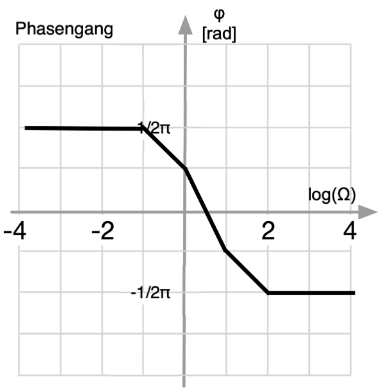
$$a_v = 20\log(j\Omega_G) - 20\log(1 + j\Omega_G) - 20\log(1 + j10^{-1}\Omega_G)$$

Für den Phasengang gilt:

$$\varphi = \arg(j\Omega_G) - \arg(1 + j\Omega_G) - \arg(1 + j10^{-1}\Omega_G)$$

(e) Amplituden- und Phasengang sehen wie folgt aus:

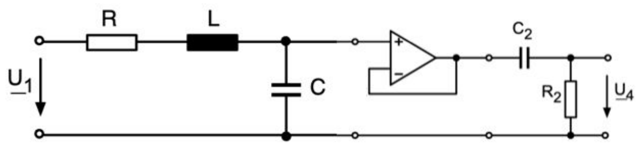




(f) Bandpass

(g) Die zusätzliche Spule muss dem Tiefpass zugeordnet werden, damit ein Abfall des Amplitudengangs um 40dB/Dekade erreicht werden kann.

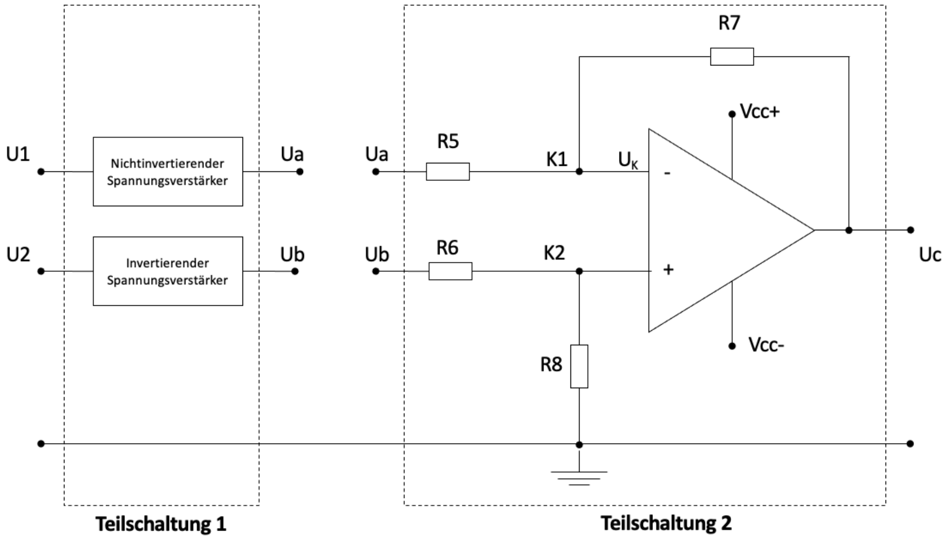
Die Schaltung ergibt sich zu:



Aufgabe 5 (14 Punkte)

Operationsverstärker

Die unten gezeigte Operationsverstärkerschaltung besteht aus drei idealen Operationsverstärkern und den Widerständen R_1 bis R_8. Die idealen Operationsverstärker sind an eine Spannungsversorgung von $V_{CC+} = 5V$ und $V_{CC-} = -5V$ angeschlossen. Die Schaltung besteht aus Teilschaltung 1 und Teilschaltung 2.



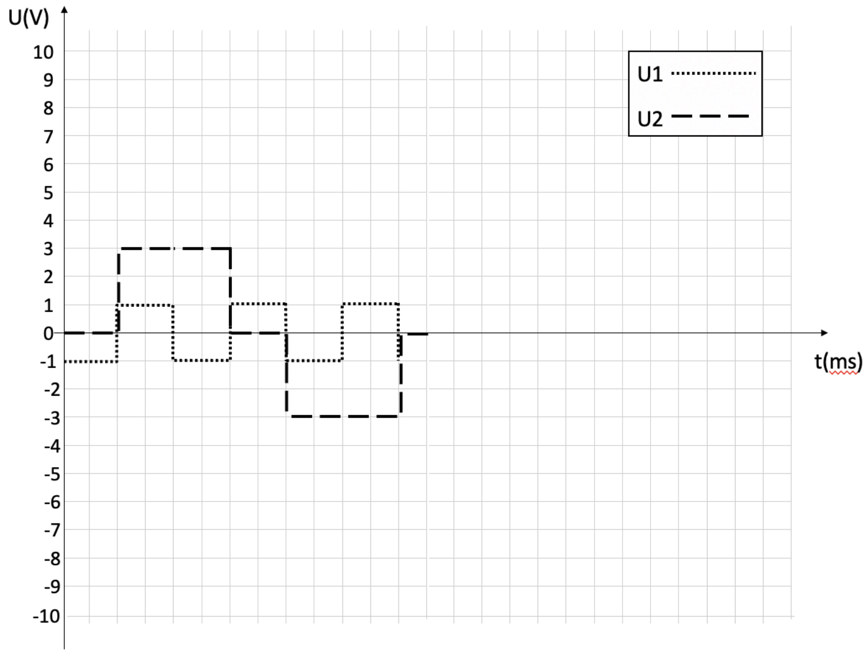
(a) Was gilt für den Eingangswiderstand eines idealen Operationsverstärkers? (1 Punkt)

(b) Geben Sie den Namen der Teilschaltung 2 an. Leiten Sie die Übertragungsfunktion von Teilschaltung 2 mit Hilfe der Knotengleichnungen für K_1 und K_2 her. Geben Sie die Übertragungsfunktion in der Form $\underline{U}_c = f(\underline{U}_a, \underline{U}_b, R_5, R_6, R_7, R_8)$ an. (3 Punkte)

(c) Entwerfen Sie den nichtinvertierenden Verstärker für Teilschaltung 1. Die Eingangsspannung $\underline{U}_1$ soll mit einer Spannungsverstärkung von $V_a = 6$ verstärkt werden. Für Widerstand R_1 im Gegenkopplungszweig soll gelten $R_1 = 1\,k\Omega$. Leiten Sie die Übertragungsfunktion $\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_1} = 1 + \frac{R_1}{R_2}$ mit Hilfe von zwei Maschen her und zeichnen Sie die Schaltung. Berechnen Sie den zweiten Widerstandswert R_2. (3 Punkte)

(d) Entwerfen Sie den invertierenden Verstärker für Teilschaltung 1. Die Eingangsspannung $\underline{U}_2$ soll mit einer Verstärkung V_b von 12 dB verstärkt werden. Verwenden Sie einen Eingangswiderstand $R_3 = 10\,k\Omega$. Leiten Sie die Übertragungsfunktion $\frac{\underline{U}_b}{\underline{U}_2} = -\frac{R_4}{R_3}$ mit Hilfe von zwei Maschen her. Zeichnen Sie die Schaltung und berechnen Sie den zweiten Widerstandswert R_4. (3 Punkte)

(e) Geben sind nun $R_5 = R_7 = 1\,k\Omega, R_6 = 3,5\,k\Omega$ und $R_8 = 500\,\Omega$. Verwenden Sie die vollständige Schaltung bestehend aus Teilschaltung 1 <u>und</u> Teilschaltung 2. Zeichnen Sie die Ausgangsspannung $\underline{U}_o$ in Diagramm 5.1 ein, die sich für die Eingangsspannungen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ in der folgenden Abbildung ergeben. (4 Punkte)
Hinweis: $\underline{U}_1 \neq \underline{U}_a$ *und* $\underline{U}_2 \neq \underline{U}_b$.
Die Versorgungsspannung aller Operationsverstärker beträgt $\pm 5\ V$.

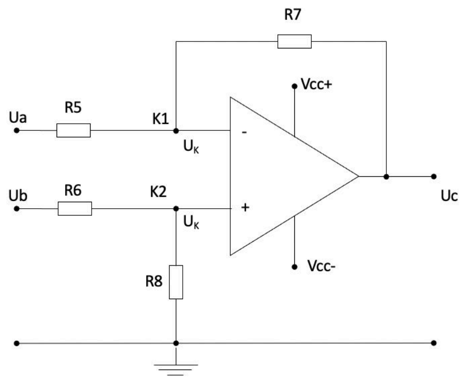


Lösung:

(a) Für den Eingangswiderstand eines idealen Operationsverstärkers gilt $R_{ein} \to \infty$ (d.h. groß im Vergleich zu den anderen Widerständen in der Schaltung).

(b) Bei Teilschaltung 2 handelt es sich (bei passender Wahl der Widerstände) um einen Differenzverstärker.

Zur Herleitung der Übertragungsfunktion werden die Knotengleichungen für K1 und K2 aufgestellt:



$$K1: \quad \frac{\underline{U}_K - \underline{U}_a}{R_5} - \frac{\underline{U}_c - \underline{U}_K}{R_7} = 0$$

$$K2: \quad \frac{\underline{U}_K - \underline{U}_b}{R_6} - \frac{0 - \underline{U}_K}{R_8} = 0$$

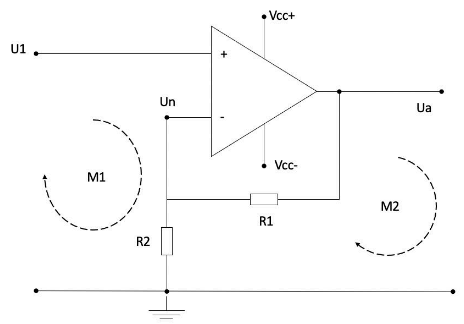
Aus K2 folgt:

$$\underline{U}_K = \frac{R_8}{R_8 + R_6} \cdot \underline{U}_b$$

Aus K1 folgt:

$$\underline{U}_K = \underline{U}_c \cdot \frac{R_5}{R_5 + R_7} + \underline{U}_a \cdot \frac{R_7}{R_5 + R_7}$$
$$\underline{U}_c = -\frac{R_7}{R_5} \cdot \underline{U}_a + \frac{R_8}{R_8 + R_6} \frac{R_5 + R_7}{R_5} \cdot \underline{U}_b$$

(c) Zur Herleitung der Übertragungsfunktion wird das Maschenstromverfahren eingesetzt:



$$M1: \quad -\underline{U}_1 + \underline{U}_d + R_2 \cdot \underline{I}_2 = 0$$
$$M2: \quad \underline{U}_a - R_2 \cdot \underline{I}_2 - R_1 \cdot \underline{I}_1 = 0$$

Da kein Strom in den Operationsverstärker fließt, gilt $\underline{I}_1 = \underline{I}_2$. Aufgrund des idealen Operationsverstärkers gilt $\underline{U}_d = 0$. Aus M1 folgt:

$$\underline{U}_1 = R_2 \cdot \underline{I}_2$$

Aus M2 folgt:

$$\underline{U}_a = (R_2 + R_1) \cdot \underline{I}_2$$

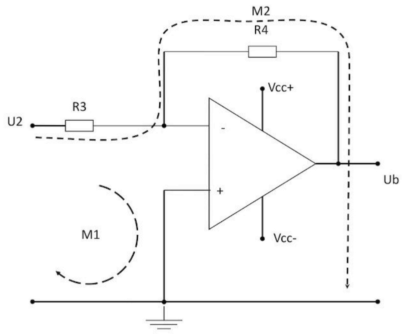
Somit gilt für den Quotienten:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_1} = \frac{R_2 + R_1}{R_2} = (1 + \frac{R_1}{R_2})$$

Mit $R_1 = 1\,k\Omega$ folgt für R_2:

$$6 = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$
$$R_2 = 200\,\Omega$$

(d) Zur Herleitung der Übertragungsfunktion wird das Maschenstromverfahren eingesetzt:



$$\begin{aligned} M1: \quad & -\underline{U}_2 + R_3 \cdot \underline{I}_3 = 0 \\ M2: \quad & -\underline{U}_2 + R_3 \cdot \underline{I}_3 + R_4 \cdot \underline{I}_4 + \underline{U}_b = 0 \end{aligned}$$

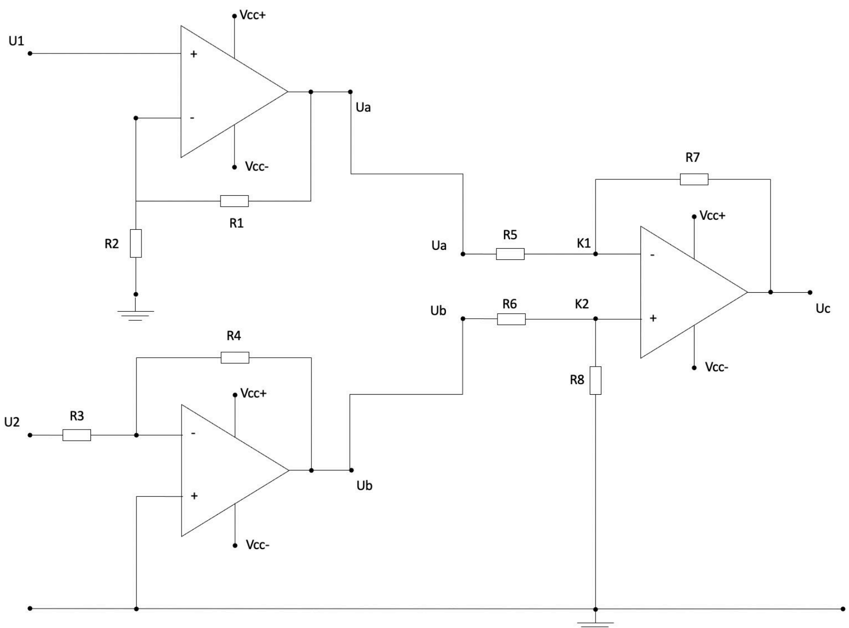
Da kein Strom in den Operationsverstärker fließt, gilt $\underline{I}_3 = \underline{I}_4$. Daraus folgt für M2:

$$\begin{aligned} -\underline{U}_2 + (R_3 + R_4) \cdot \underline{I}_4 + \underline{U}_b &= 0 \\ \underline{U}_2 \cdot \frac{R_4}{R_3} + \underline{U}_b &= 0 \\ \underline{U}_b = -\frac{R_4}{R_3} \cdot \underline{U}_2 \end{aligned}$$

Mit $R_3 = 10\,k\Omega$ folgt für R_4 nach Umrechnung aus db:

$$\begin{aligned} 12 &= 20log_{10}(G) \\ G &= 3.99 \approx 4 \\ 4 &= \frac{R_4}{10\,k\Omega} \\ R_4 &= 40\,k\Omega \end{aligned}$$

(e) Das vollständige Schaltbild ergibt sich zu:



Um $\underline{U}_c$ zu zeichnen, setzten wir die gegebenen Widerstandswerte in die Gleichung aus Aufgabe b) ein.

$$\underline{U}_c = \qquad -\frac{R_7}{R_5} \cdot \underline{U}_a + \frac{R_8}{R_8 + R_6} \frac{R_5 + R_7}{R_5} \cdot \underline{U}_b$$

Damit ergibt sich:

$$\underline{U}_c = -\underline{U}_a + 0,25 \cdot \underline{U}_b$$

Um $\underline{U}_a$ und $\underline{U}_b$ zu erhalten, verwenden wir die Vorgaben aus Aufgabenstellung c) und d). Es gilt: $V_a = 6, V_b = -4$ (negatives Vorzeichen durch invertierenden Verstärker!) und somit:

$$\underline{U}_a = 6 \cdot \underline{U}_1$$
$$\underline{U}_b = -4 \cdot \underline{U}_2$$

Spannungen außerhalb der Versorgungsspannung der Operationsverstärker werden abgeschnitten. Damit ergeben sich die Spannungskurven für $\underline{U}_a, \underline{U}_b$ und $\underline{U}_c$ in der folgenden Abbildung: