Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Vorlesung: Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel   Übungsleiter: M.Sc. Jochen Brenneisen

Klausur

16. März 2022
Beginn: 11:00 Uhr

Nachname: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikel-Nr.: ____________________

Nummer der Mappe: __________ (=OZ)

Angaben zur Klausur:

Die Arbeitszeit beträgt 2 Stunden; Hilfsmittel sind nicht erlaubt, außer einem nicht programmierbaren Taschenrechner.

Der Lösungsweg muss vollständig angegeben und nachvollziehbar sein!
Dokumentieren Sie Ihre Überlegungen, geben Sie erläuternde Kommentare!
Verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug!

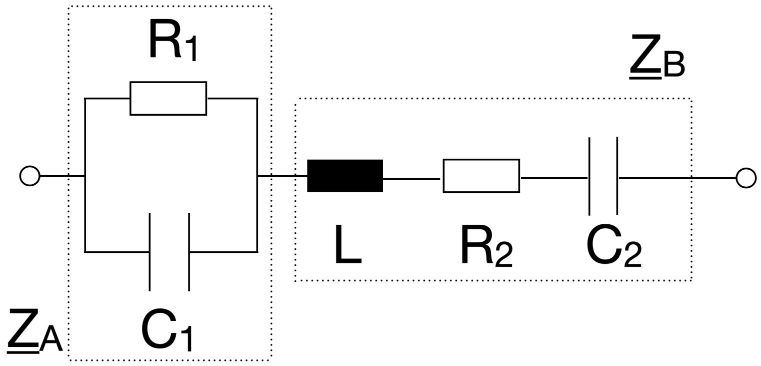
Die maximal erreichbaren Punkte pro Aufgabe sind der Tabelle zu entnehmen.

Aufgabe	max. Punkte	erreichte Punkte
1	21	
2	16	
3	20	
4	22	
5	15	
Gesamt:	94	

Aufgabe 1 **(21 Punkte)**

Ortskurve

Gegeben sei die folgende Schaltung:



(a) Berechnen Sie Impedanzen $\underline{Z}_A(R_1, C_1)$ und $\underline{Z}_B(R_2, C_2, L)$. (2 Punkte)

(b) Berechnen Sie Admittanz $\underline{Y}_A(R_1, C_1)$ und geben Sie diese getrennt nach Real- und Imaginärteil an. (1 Punkt)

(c) Zeichnen Sie die Ortskurven der Impedanz und der Admittanz für $\underline{Z}_A(R_1, C_1)$, $\underline{Z}_B(R_2, C_2, L)$, $\underline{Y}_A(R_1, C_1)$ und $\underline{Y}_B(R_2, C_2, L)$ in die Diagramme 1.1 bis 1.4. Zeichnen Sie jeweils die Grenzwerte für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ ein und beschriften Sie den Schnittpunkt mit der x-Achse. (8 Punkte)

(d) Berechnen Sie die Resonanzkreisfrequenz des Schaltungsteils mit der Impedanz $\underline{Z}_B$. Geben Sie außerdem die Bandbreite b_w dieser Teilschaltung an. *Hinweis: Die Bandbreite b_w ist definiert als der Bereich zwischen den beiden Frequenzen ω_1 und ω_2, bei denen die Phasenverschiebung gerade $\pm 45°$ beträgt.* (4 Punkte)

(e) Zeichnen Sie eine möglichst einfache Schaltung für die Ortskurve in Abbildung 1. Ordnen Sie die beiden Punkte (a und b) den beiden Endpunkten $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ zu. (3 Punkte)

(f) Zeichnen Sie eine möglichst einfache Schaltung für die Ortskurve in Abbildung 2. Ordnen Sie die beiden Punkte (a und b) den beiden Endpunkten $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ zu. (3 Punkte)

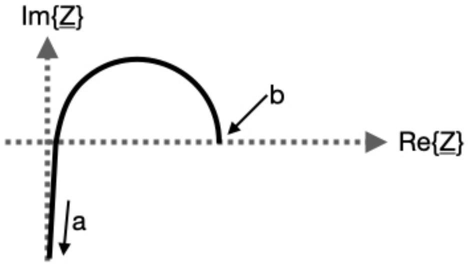


Abbildung 1: Ortskurve 1 (Aufgabenteil e))

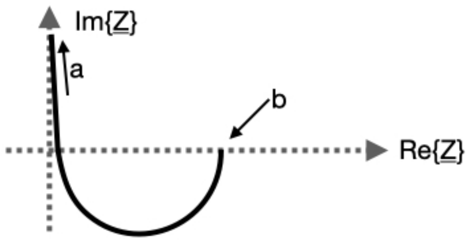


Abbildung 2: Ortskurve 2 (Aufgabenteil f))

Lösung:

(a)

$$\underline{Z}_A = \frac{R_1 \cdot \frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}}$$

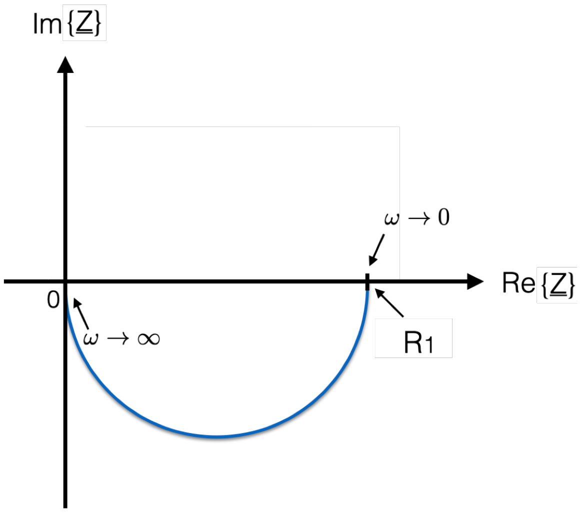
$$\underline{Z}_A = \frac{R_1}{1 + j\omega C_1 R_1}$$

$$\underline{Z}_B = R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C_2} = R_2 + j\frac{\omega^2 L C_2 - 1}{\omega C_2} = R_2 + j(\omega L - \frac{1}{\omega C_2})$$

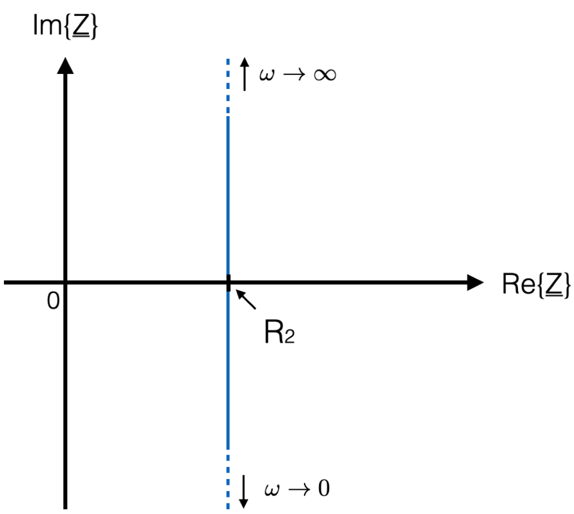
(b)

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1 + j\omega C_1 R_1}{R_1} = \frac{1}{R_1} + j\omega C_1$$

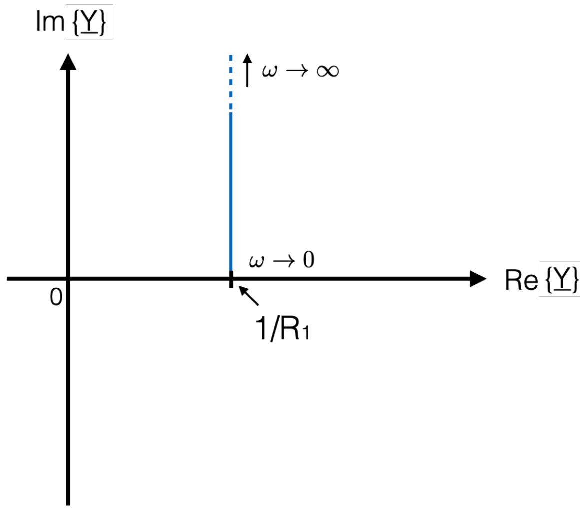
(c) Die Ortskurve für $\underline{Z}_A$ ergibt sich zu:



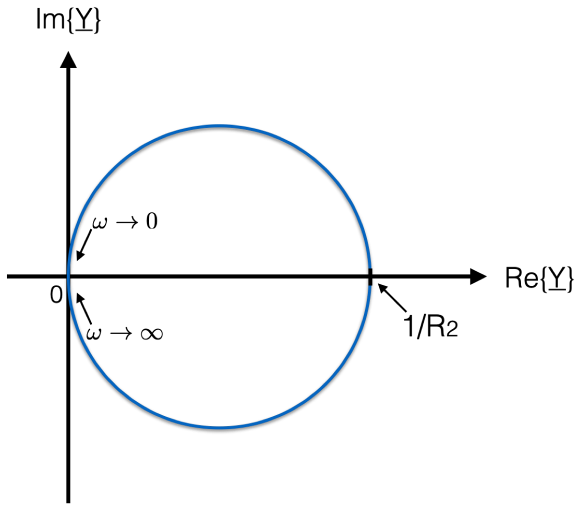
Die Ortskurve für $\underline{Z}_B$ ergibt sich zu:



Die Ortskurve für $\underline{Y}_A$ ergibt sich zu:



Die Ortskurve für $\underline{Y}_B$ ergibt sich zu:



(d) Es gilt

$$\underline{Z}_B = R_2 + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

Für die Resonanzkreisfrequenz ω_0 gilt:

$$Im(\underline{Z}_B) = 0$$

Daraus folgt:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} <> \omega_0^2 = \frac{1}{LC} <> \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Für die Berechnung der Bandbreite werden zunächst die beiden Frequenzen ω_1 und ω_2 berechnet. Bei einer Phasenverschiebung von 45° gilt $Re\{Z\} = Im\{Z\}$, bei −45° gilt $Re\{Z\} = -Im\{Z\}$ und somit:

$$R_2 = \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}$$
$$0 = w_1^2 L - \omega_1 R - \frac{1}{C}$$
$$0 = w_1^2 - \frac{\omega_1 R}{L} - \frac{1}{LC}$$
$$w_1 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

Und analog

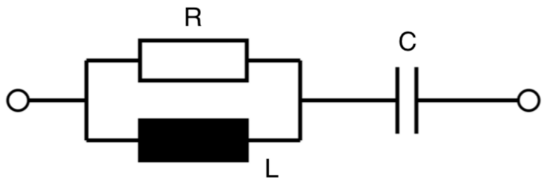
$$R_2 = -(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C})$$
$$0 = w_2^2 L + \omega_2 R - \frac{1}{C}$$
$$0 = w_2^2 + \frac{\omega_2 R}{L} - \frac{1}{LC}$$
$$w_2 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}}$$

Schließlich ist die Bandbreite

$$b = \omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{...} - (-\frac{R}{2L} + \sqrt{...}) = \frac{R}{L}$$

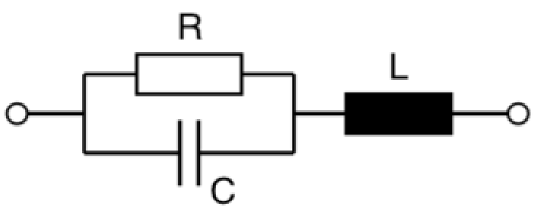
(e)

$$a : \omega \to 0$$
$$b : \omega \to \infty$$



(f)

$$a : \omega \to \infty$$
$$b : \omega \to 0$$



Aufgabe 2 **(16 Punkte)**

Netzwerk

Die in Abbildung 3 dargestellte Schaltung enthält bekannte und unbekannte Widerstände, sowie Spannungs- und Stromquellen.

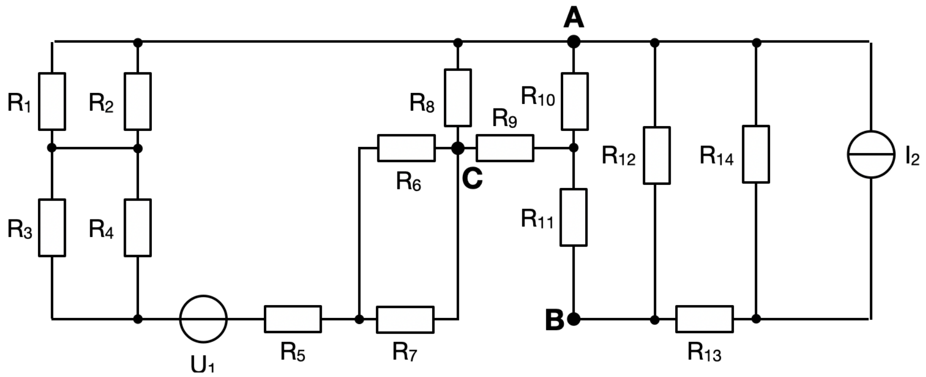


Abbildung 3

$$R_1 = R_2 = R_8 = 6\,k\Omega,\ R_3 = R_{13} = 4\,k\Omega,\ R_4 = ?$$
$$R_5 = 3\,k\Omega,\ R_6 = 2\,k\Omega,\ R_7 = 2\,k\Omega$$
$$R_{10} = R_{11} = 3/2\,k\Omega,\ R_9 = \tfrac{9}{4}\,k\Omega$$
$$R_{12} = 12\,k\Omega,\ R_{14} = 5\,k\Omega$$
$$U_1 = 21\,\mathrm{V},\ I_2 = ?$$

(a) Wandeln Sie die obige Schaltung (Abbildung 3) in folgende Form (Schaltung in Abbildung 4) um und bestimmen Sie dabei die Werte für I_2, R_4, R_b, R_d und R_f. Die Knoten A-C sind in beiden Schaltungen identisch. (6 Punkte)

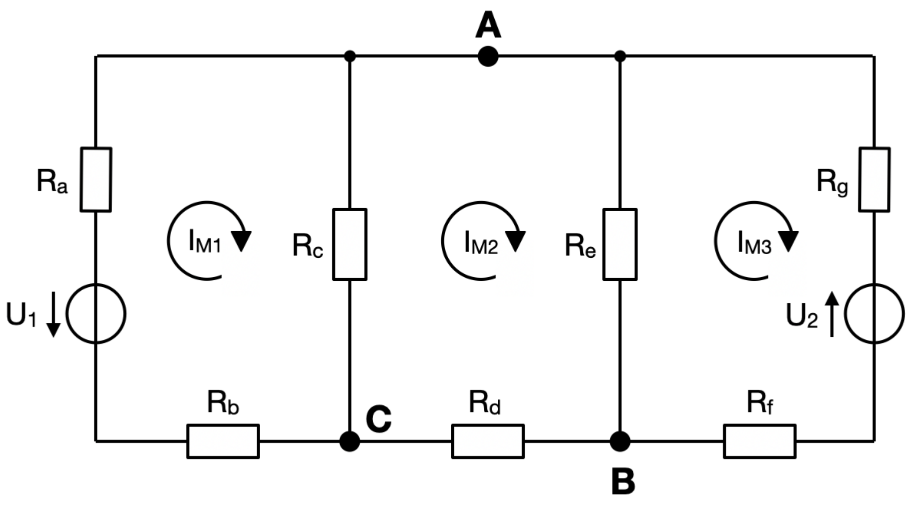
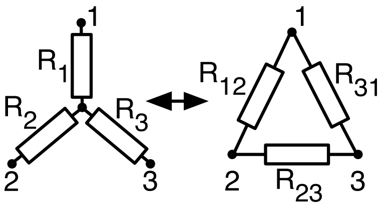


Abbildung 4

$$R_a = R_g = 5\,k\Omega,\ R_b = ?$$
$$R_c = R_e = 3\,k\Omega,\ R_d = ?,\ R_f = ?$$
$$U_1 = U_2 = 21\,\mathrm{V}$$

Hinweis: Stern-Dreiecks-Transformation



$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{12} = R_1 + R_2 + R_1\frac{R_2}{R_3}$$

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{23} = R_2 + R_3 + R_2\frac{R_3}{R_1}$$

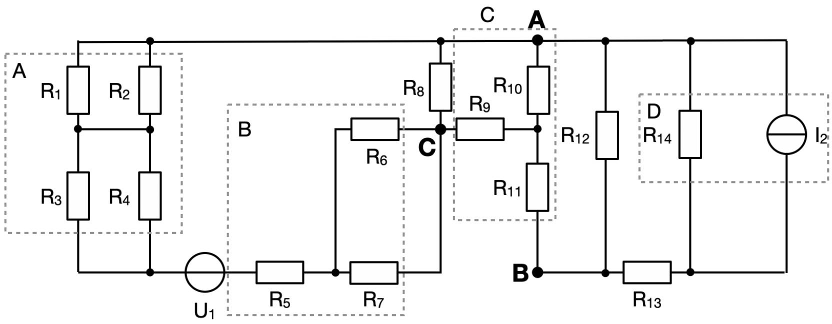
$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}} \qquad R_{31} = R_3 + R_1 + R_3\frac{R_1}{R_2}$$

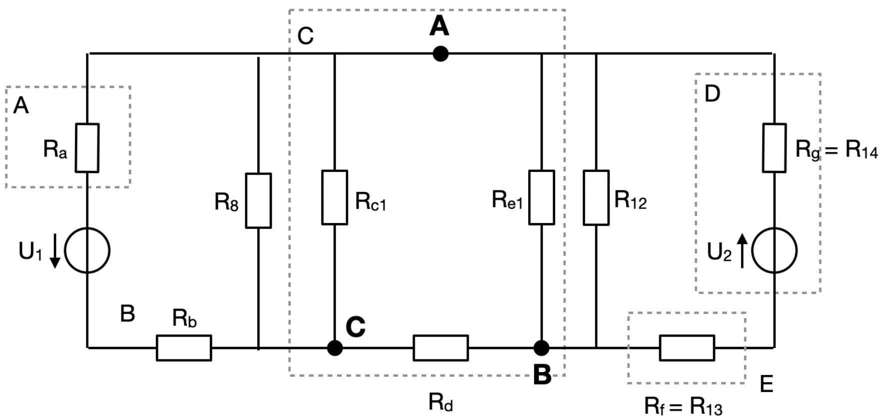
(b) Bestimmen Sie mit dem formalisierten Maschenstromverfahren das Gleichungssystem für die Maschenströme I_{M1}, I_{M2} und I_{M3} (Schaltung in Abbildung 4). (8 Punkte)
Lösen Sie das Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel und berechnen Sie mindestens eine Determinante von Hand.
Hinweis 1: Geben Sie Zwischenschritte an und achten Sie auf eine verständliche Beschriftung.
Hinweis 2: Sollten Sie Aufgabenteil a) nicht gelöst haben, nehmen Sie an, dass $R_d = 6\,k\Omega$ gilt.

(c) Welche Leistung geben die beiden Quellen in der Schaltung aus Abbildung 4 ab? (2 Punkte)

Lösung:

(a) **Umwandlungen:**





A.) Parallelschaltung + Reihenschaltung

$(6\,k\Omega \parallel 6\,k\Omega)+(4\,k\Omega \parallel R_4) = 5\,k\Omega$

$R_4=4\,k\Omega$

B.) Parallelschaltung + Reihenschaltung

$(2\,k\Omega \parallel 2\,k\Omega\ )+(3\,k\Omega)= 4\,k\Omega$

$R_b = 4\,k\Omega$

C.) Stern-Dreieck-Umwandlung

$R_d=R_{BC}=R_9+R_{11}+\frac{R_9\cdot R_{11}}{R_{10}} =3/2k\Omega+\frac{9}{4}k\Omega+\frac{\frac{9}{4}k\Omega\cdot 3/2k\Omega}{3/2k\Omega} = 6k\Omega.$

D.) Stromquelle in Spannungsquelle

$21\text{V} = I_2 \cdot 5\,k\Omega$
$I_2=\frac{21}{5}\,\text{A}=4{,}2\,\text{mA}$

E.) $R_f = R_{13} = 4\,k\Omega$

(b) **Formalisiertes Maschenstromverfahren:**

$$\begin{bmatrix} R_a+R_b+R_c & -R_c & 0 \\ -R_c & R_c+R_d+R_e & -R_e \\ 0 & -R_e & R_e+R_f+R_g \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ 0 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & -3 \\ 0 & -3 & 12 \end{bmatrix} k\Omega \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 0 \\ 21 \end{bmatrix} \text{ V.}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} k\Omega \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ V.}$$

Zunächst wird die Determinante der Matrix $\underline{R}$ bestimmt.

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} k\Omega^3$$
$$= ((4)(4)(4) - (4)(-1)(-1) - (-1)(-1)(4)) \ k\Omega^3$$
$$= 56 \, k\Omega^3$$

Mit der Cramerschen Regel werden folgende LGS gelöst.

$$I_{M1} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 7 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{D} \text{A} = \frac{(7)(4)(4)-(7)(-1)(-1)-(-1)(-1)(7)}{D} \text{ A} = \frac{112}{56} \text{ A} = 2 \text{ mA},$$

$$I_{M2} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix}}{D} \text{A} = \frac{56}{56} \text{ A} = 1 \text{ mA},$$

$$I_{M3} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 7 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}}{D} \text{A} = \frac{112}{56} \text{ A} = 2 \text{ mA}$$

Die Lösungen lauten I_{M1}=2 mA, I_{M2}=1 mA und I_{M3}=2 mA.

(c) **Leistung**

Allgemein gilt: P=U·I.

Im Falle einer Quelle ist die abgegebene Leistung positiv, wenn Strom und Spannung in entgegengesetzte Richtung zeigen. Dadurch ergibt sich:

P_1=21 V·2 mA=42 mW
P_2=21 V·2 mA=42 mW

Aufgabe 3 **(20 Punkte)**

Komplexe Wechselstromlehre

In zwei Blackboxen A und B befinden zwei verschiedene Schaltungen. Sie haben bereits die zugehörigen Zeigerdiagramme (Abbildung 5) gemessen und möchten nun mehr über die Schaltungen herausfinden.

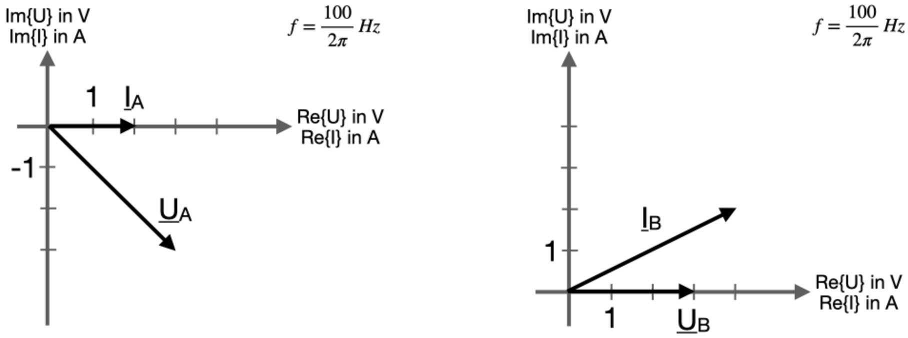


Abbildung 5: Zeigerdiagramme der Schaltung aus Blackbox A (links) und B (rechts)

Der Strom $\underline{I}_A$ fließt durch die Schaltung A. Dadurch fällt über der Schaltung die Spannung $\underline{U}_A$ ab. Außerdem fällt die Spannung $\underline{U}_B$ über der Schaltung B ab. Dabei soll der Strom $\underline{I}_B$ durch die Schaltung B fließen.

(a) Geben Sie die Impedanz der Schaltung A und die Admittanz der Schaltung B an. (2 Punkte)

(b) Wie verhält sich Schaltung B? Rein ohmsch, rein induktiv, rein kapazitiv oder gemischt? Falls gemischt, wie? Begründen Sie. (2 Punkte)

(c) Zeichnen Sie für Schaltung A und Schaltung B jeweils ein möglichst einfaches Schaltbild und berechnen Sie alle Bauteilwerte. Nutzen Sie dazu die Ergebnisse aus Aufgabenteil a) (4 Punkte)

Hinweis: Für die folgenden Teilaufgaben müssen Sie die vorhergehenden Teilaufgaben nicht zwingend bearbeitet haben.

Die Schaltung aus der Blackbox A soll nun als Verbraucher in der folgenden Schaltung (Abbildung 6) eingesetzt werden. Es gilt also $\underline{Z}_V = \underline{Z}_A$.

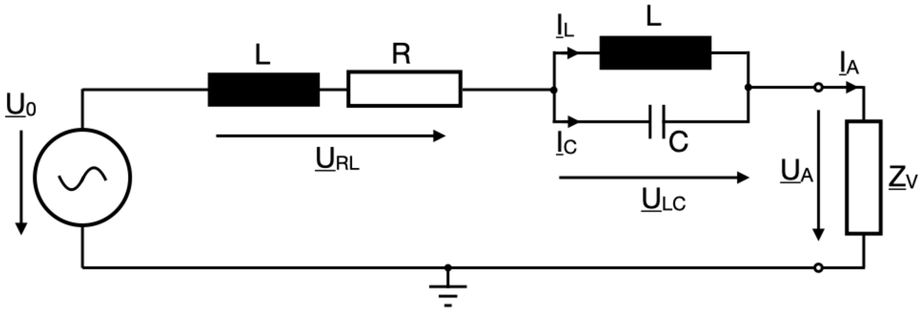


Abbildung 6: Aufbau der Schaltung. Es gilt $R = 1\,\Omega$, $L = 10\,mH$, $C = 5\,mF$ und $\underline{I}_A = (2 + j)\,A$. Die Schaltung wird mit einer Frequenz von $f = \frac{100}{2\pi}\,Hz$ betrieben.

(d) Welche Spannung $\underline{U}_A$ fällt über dem Verbraucher ab? (1 Punkt)

(e) Berechnen Sie die Teilspannungen $\underline{U}_{RL}$ und $\underline{U}_{LC}$. (4 Punkte)
Berechnen Sie anschließend auch den Strom $\underline{I}_L$.

(f) Zeichnen Sie alle bekannten Spannungen in das Zeigerdiagramm 3.1. (4 Punkte)
Beschriften Sie die Achsen. Bestimmen Sie die Spannung $\underline{U}_0$ graphisch.

(g) Zeichnen Sie alle bekannten Ströme in das Zeigerdiagramm 3.2. (3 Punkte)
Beschriften Sie die Achsen. Bestimmen Sie den Strom $\underline{I}_C$ graphisch.

Lösung:

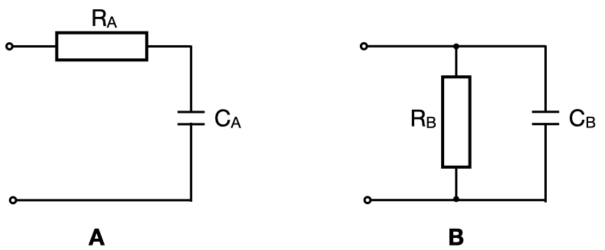
(a)

$$\underline{U}_A = \underline{Z}_A \cdot \underline{I}_A <> \underline{Z}_A = \frac{\underline{U}_A}{\underline{I}_A} = \frac{(3-j3)V}{2A} = (1,5-j1,5)\,\Omega = (\frac{3}{2} - j\frac{3}{2})\,\Omega$$

$$\underline{I}_B = \underline{Y}_B \cdot \underline{U}_B <> \underline{Y}_B = \frac{\underline{I}_B}{\underline{U}_B} = \frac{(4+j2)A}{3V} = (4/3 + j2/3)\,S$$

(b) Die Schaltung verhält sich ohmsch-kapazitiv.
Begründung: „Am Kondensator geht der Strom vor“ (kapazitiv), da gilt $\phi_{ui} \neq 90°$ ist auch ein ohmscher Anteil vorhanden.
Alternative Begründung: Impedanz Z_B hat reellen (ohmschen) und imaginären Anteil, das Vorzeichen des Imaginärteils ist negativ (kapazitiv).

(c) Es ergeben sich die beiden Schaltungen nach folgender Abbildung:



Für die Bauteilwerte folgt aus Koeffizientenvergleich: Für R_a folgt aus dem reellen Anteil von $\underline{Z}_A = (1,5-j1,5)\,\Omega$ direkt $R_a = 1,5\,\Omega$.
Mit $\frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = -j1,5\,\Omega$ und $f = \frac{100}{2\pi\,Hz}$ gilt außerdem:
$C_a = \frac{1}{1,5\,\Omega\cdot\omega} = \frac{1}{1,5\,\Omega\cdot 2\pi\cdot\frac{100}{2\pi}\,Hz} = \frac{1}{150}\,F.$

Nach gleichem Schema folgt für $\underline{Y}_B = (4/3 + j2/3)\,S$ auch
$R_b = \frac{1}{4/3}\,\Omega = 0,75\,\Omega$ und $\omega C = 2/3\,S$ und somit $C_b = \frac{2}{3\omega}\,S = \frac{1}{150}\,F.$

Alternative Lösung: Für Schaltung B kann auch mittels $\underline{Z}_B = \frac{\underline{U}_B}{\underline{I}_B} = (\frac{3}{5} - j\frac{3}{10})\,\Omega$ eine Reihenschaltung der Elemente entstehen. Ersatzschaltbild wie in Schaltungsteil A. Bauteilwerte $R'_B = 0,6\,\Omega$ und $C'_B = 33\,mF$. Auch eine Parallelschaltung für Schaltungsteil A wäre denkbar. Berechnung der Bauteilwerte analog.

(d)

$$\underline{U}_A = \underline{Z}_A \cdot \underline{I}_A = (1,5-j1,5)\,\Omega \cdot (2+j)\,A = (4,5-j1,5)\,V$$

(e)

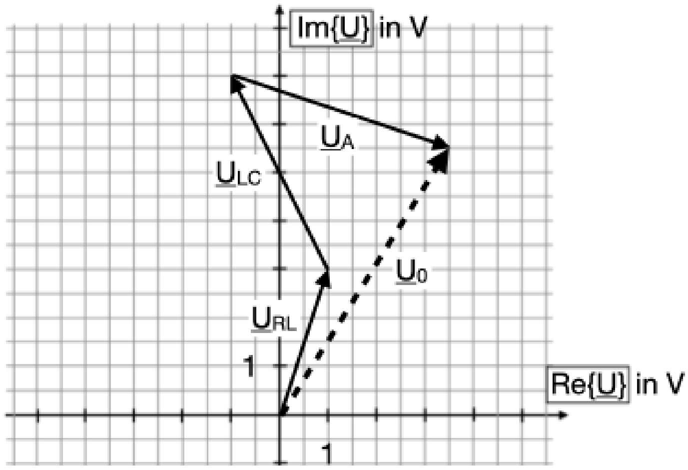
$$\underline{U}_{RL} = (R + j\omega L) \cdot \underline{I}_A = (1 + j \cdot 100 \cdot 10E-3)\,\Omega \cdot (2+j)A = (1+j3)\,V$$
$$\underline{U}_{LC} = \underline{Z}_{LC} \cdot \underline{I}_A$$

mit $\underline{Z}_{LC} = \frac{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{C/L(j\omega L + \frac{1}{j\omega C})} = 2j\,\Omega$.
Daraus folgt:

$$\underline{U}_{LC} = 2j\,\Omega \cdot (2+j)\,A = (-2+j4)\,V$$

Für den Strom $\underline{I}_L$ muss gelten $\underline{U}_{LC} = j\omega L \cdot \underline{I}_L$
und damit $\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_{LC}}{j\omega L} = \frac{-2+j4}{j \cdot 100 \cdot 10\,mH} = (4+2j)\,A$.

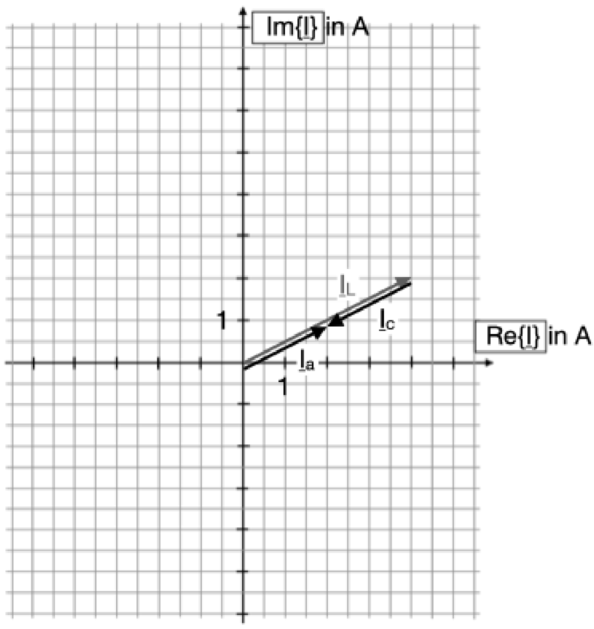
(f) Für die Spannung ergibt sich das folgende Zeigerdiagramm:



Daraus lässt sich ablesen:

$$\underline{U}_0 = (3,5 + j5,5)\,V$$

(g) Für die Ströme ergibt sich das folgende Zeigerdiagramm:



Daraus lässt sich ablesen:

$$\underline{I}_C = (-2-j)\,A$$

Aufgabe 4 (22 Punkte)
Bodediagramm

Gegeben seien die Bodediagramme A-D und die Schaltbilder 1-4 in der folgenden Abbildung 7.

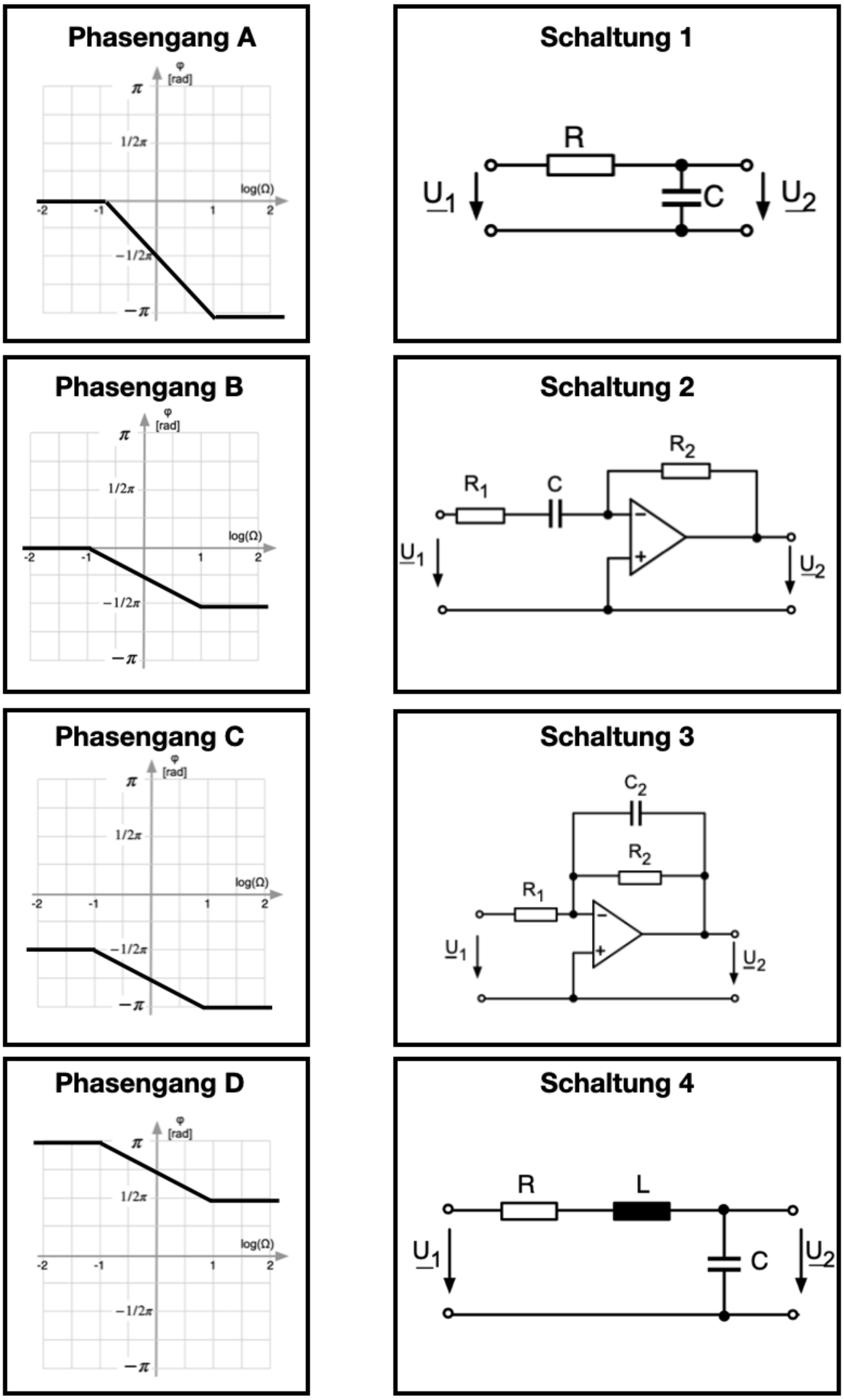


Abbildung 7: Bodediagramme (Phasengang) und Schaltbilder

(a) Ordnen Sie die Phasengänge A-D den Schaltungen 1-4 in Abbildung 7 zu. Geben Sie zusätzlich für jede Schaltung eine korrekte Bezeichnung an. Geben Sie außerdem an, ob es sich um eine aktive oder passive Schaltung handelt und welche Ordnung sie besitzt. (8 Punkte)

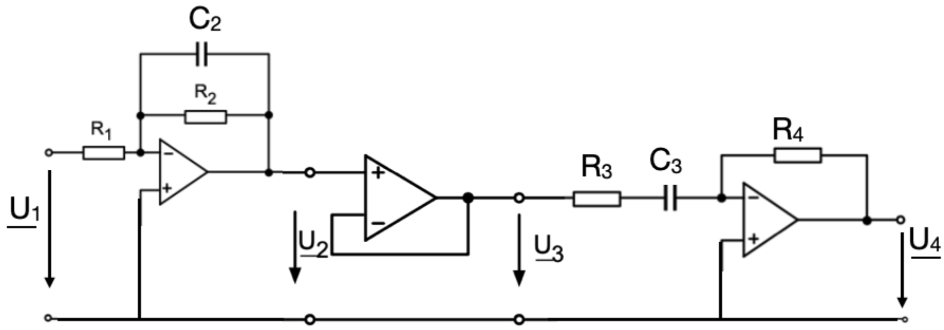


Abbildung 8: Schaltbild

Betrachten Sie nun die Schaltung in Abbildung 8.

(b) Wozu dient der Operationsverstärker in der Mitte der Gesamtschaltung? Was gilt somit für das Spannungsverhältnis $\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2}$? (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion der Schaltung in Abbildung 8 die folgende Form besitzt: (2 Punkte)

$$\frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1} = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \cdot \frac{j\omega R_3 C_3}{(1 + j\omega R_2 C_2) \cdot (1 + j\omega R_3 C_3)}$$

(d) Was muss für das Widerstandsverhältnis $\frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}$ gelten, damit sich im Durchlassbereich eine Verstärkung von 20 dB einstellt? (1 Punkt)

(e) Im Folgenden gilt $C_3 R_3 = 100 \cdot C_2 R_2$. Wählen Sie die Normierungsfrequenz $\Omega_G = \omega C_2 R_2$ und geben Sie die Gleichungen für Amplituden- und Phasengang an. Die Angabe aus Aufgabenteil d) gilt weiterhin. (2 Punkte)

(f) Skizzieren Sie Amplituden- und Phasengang der Schaltung aus Abbildung 8 in Diagramm 4.1 (Amplitudengang) und Diagramm 4.2 (Phasengang). Beschriften Sie alle Achsen! (6 Punkte)

(g) Wie nennt man die Schaltung aus Abbildung 8? (1 Punkt)

Lösung:

(a) Schaltung 1: Phasengang B, passiver Tiefpass 1. Ordnung
Schaltung 2: Phasengang C, aktiver invertierende Hochpass 1. Ordnung
Schaltung 3: Phasengang D, aktiver invertierender Tiefpass 1. Ordnung
Schaltung 4: Phasengang A, passiver Tiefpass 2. Ordnung

(b) Der Spannungsfolger wird eingesetzt um beide Teilschaltungen voneinander zu entkoppeln. Für $\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2}$ gilt somit $\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} = 1$.

(c)

$$\frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_3} \cdot \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$$
$$= \frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_3} \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$$
$$= -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} \cdot \left(-\frac{R_4}{R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}}\right)$$
$$= \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \cdot \frac{j\omega R_3 C_3}{(1 + j\omega R_2 C_2) \cdot (1 + j\omega R_3 C_3)}$$

(d) Damit sich im Durchlassbereich eine Verstärkung von 20 dB einstellt, muss $20 \cdot \log(\frac{R_2 R_4}{R_1 R_3}) = 20dB$ gelten und somit $R_2 R_4 = 10 R_1 R_3$.

(e) Für die Übertragungsfunktion gilt:

$$\frac{\underline{U}_4}{\underline{U}_1} = 10 \cdot \frac{j10^2\Omega_G}{(1 + j\Omega_G) \cdot (1 + j10^2\Omega_G)}$$

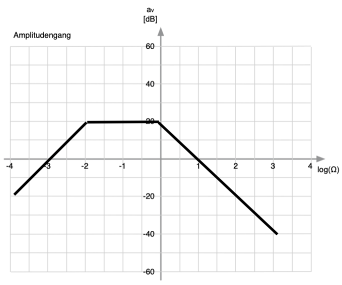
Für den Amplitudengang gilt:

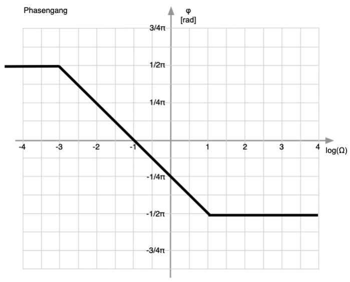
$$a_v = 20dB + 20\log(10^2\Omega_G) - 20\log|1 + j10^2\Omega_G| - 20\log|1 + j\Omega_G|$$

Für den Phasengang gilt:

$$\varphi = \arg(j10^2\Omega_G) - \arg(1 + j10^2\Omega_G) - \arg(1 + \Omega_G) = \frac{\pi}{2} - arctan(10^2\Omega_G) - arctan(\Omega_G)$$

(f) Amplituden- und Phasengang sehen wie folgt aus:

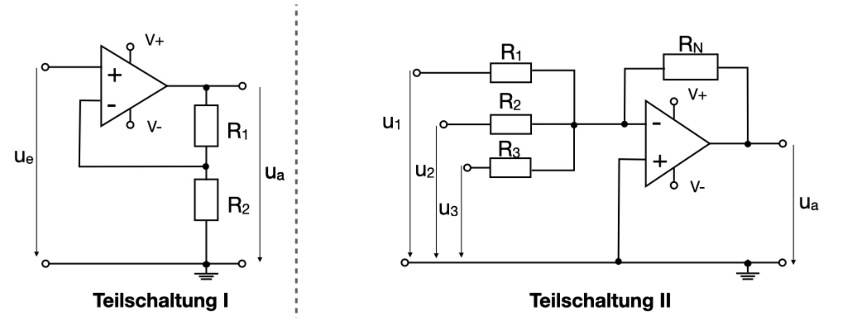


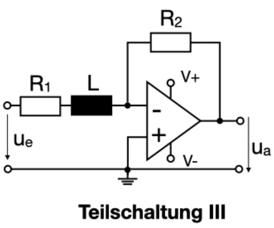


(g) Bandpass

Aufgabe 5 **(15 Punkte)**
Operationsverstärker

Geben sind die drei Teilschaltungen I bis III.





a) $\frac{U_a}{U_e} = \frac{R_2 + R_1}{R_1}$

b) $-U_a = \frac{R_N}{R_1} \cdot U_1 + \frac{R_N}{R_2} \cdot U_2 + \frac{R_N}{R_3} \cdot U_3$

c) $\frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R_1}}$

d) $\frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{j\omega \frac{L}{R_1}}{1 + j\omega \frac{L}{R_1}}$

e) $U_a = -\frac{R_1 \cdot U_1 + R_2 \cdot U_2 + R_3 \cdot U_3}{R_N}$

f) $\frac{U_a}{U_e} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$

(a) Ordnen Sie den drei Teilschaltungen I bis III die korrekte Übertragungsfunktion a) bis f) zu. Begründen Sie. (3 Punkte)

Die nachfolgend abgebildete Operationsverstärkerschaltung setzt sich aus einem idealen Operationsverstärker sowie den Widerständen R_1 bis R_6, der Induktivität L und der variablen Kapazität C zusammen. Der ideale Operationsverstärker ist an die Versorgungsspannungen $V+ = 5\,\mathrm{V}$ und $V- = -5\,\mathrm{V}$ angeschlossen:

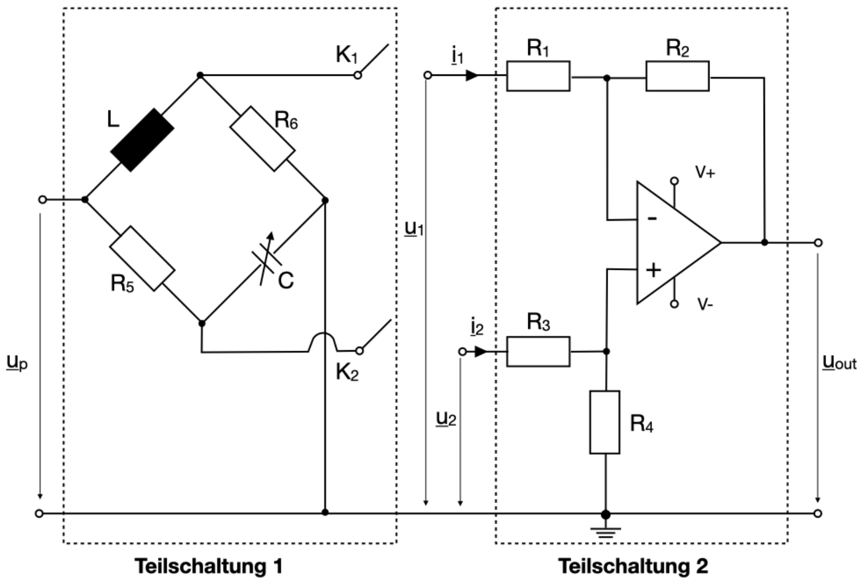


Abbildung 9: Operationsverstärkerschaltung

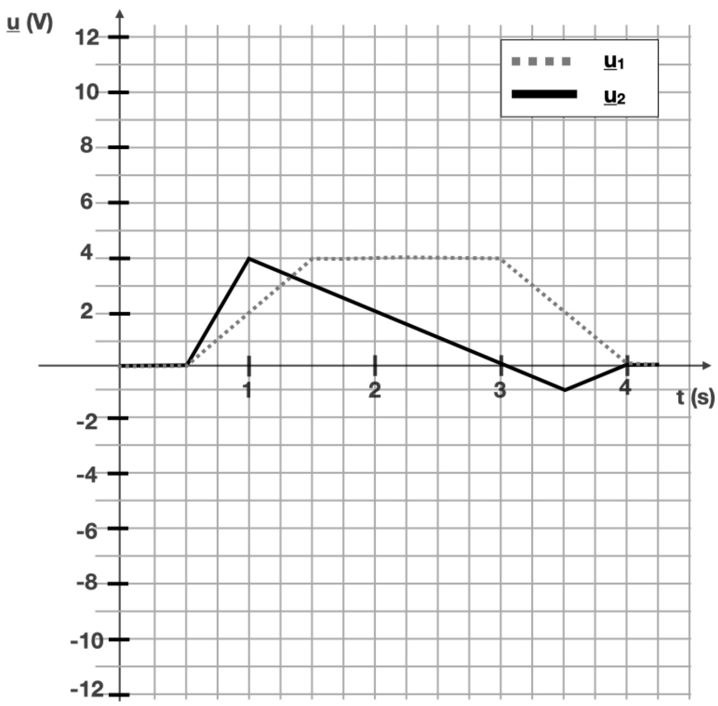
Die Schaltung besteht aus Teilschaltung 1 und Teilschaltung 2, welche durch zwei Schalter verbunden sind. Alle nachfolgenden Aufgabenteile beziehen sich auf die in Abbildung 9 abgebildete Schaltung.

(b) Zeigen Sie, dass für die Übertragungsfunktion von Teilschaltung 2 gilt: (4 Punkte)

$$\underline{u}_{out} = \frac{R_4}{R_1} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} \cdot \underline{u}_2 - \frac{R_2}{R_1} \cdot \underline{u}_1$$

(c) Aus dem Datenblatt von Teilschaltung 2 kann entnommen werden, dass es sich bei R_1 und R_3 um Widerstände von $40\,\mathrm{k\Omega}$ handelt. Außerdem sei bekannt, dass sich $\underline{u}_{out}$ aus der Subtraktion der doppelten Eingangsspannung $\underline{u}_1$ von der doppelten Eingangsspannung $\underline{u}_2$ ergibt. Bestimmen Sie die Bauteilwerte von R_2 und R_4. (3 Punkte)
Hinweis: Nutzen Sie die im vorangegangenen Aufgabenteil hergeleitete Übertragungsfunktion.

Gegeben seien nun die Eingangsspannungen $\underline{u}_1$ und $\underline{u}_2$ durch die folgende Abbildung:



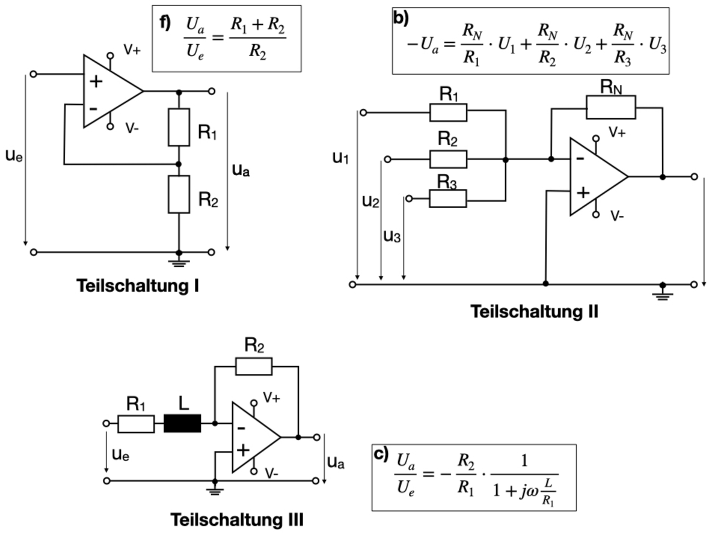
Es gelten weiterhin die Angaben aus den vorangegangenen Aufgabenteilen.

(d) Zeichen Sie die zugehörige Ausgangsspannung $\underline{u}_{out}$ in Diagramm 5.1 ein. (3 Punkte)

(e) Zur Betrachtung von Teilschaltung 1 bleiben die beiden Schalter zunächst geöffnet. Die Potentialdifferenz zwischen den beiden Klemmen K1 und K2 betrage 0 V, d.h. die Brücke sei abgeglichen. Es gelte $R_5 = R_6 = 200\,\Omega$ sowie $C = 100\,\mathrm{nF}$. Bestimmen Sie L. (2 Punkte)

Lösung:

(a) Es ergibt sich die folgende Zuordnung:

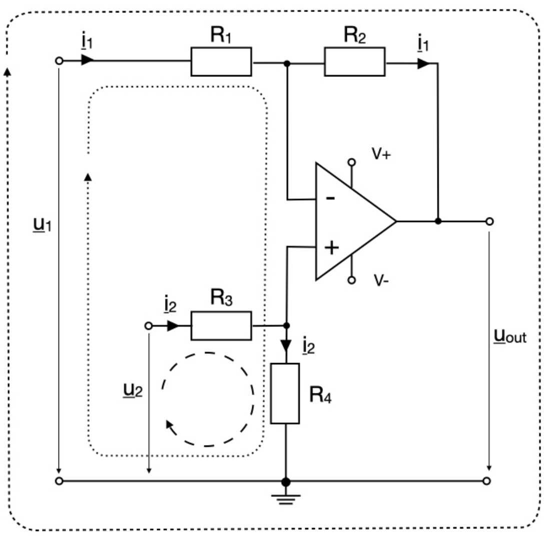


Für Teilschaltung I gilt:

$M1 : -U_e + U_d + R_2 \cdot I_2 = 0$ und $M2 : U_a - (R_2 + R_1) \cdot I_2 = 0$
Also: $\frac{U_a}{U_e} = \frac{R_1+R_2}{R_2}$
Für Teilschaltung II gilt: $\frac{U_1-U_n}{R_1} + \frac{U_2-U_n}{R_2} + \frac{U_3-U_n}{R_3} - \frac{U_a}{R_N} = 0$
mit $U_n = 0$ folgt $\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} + \frac{U_3}{R_3} + \frac{U_a}{R_N} = 0$
Nach U_a aufgelöst ergibt sich $-U_a = \frac{R_N}{R_1} \cdot U_1 + \frac{R_N}{R_2} \cdot U_2 + \frac{R_N}{R_3} \cdot U_3$
Für Teilschaltung III gilt:

$Z_1 = R_1 + j\omega L$ und $Z_2 = R_2$. Somit:
$\underline{u}_a = -\frac{Z_2}{Z_1} \cdot \underline{u}_e = -\frac{R_2}{R_1+j\omega L} \cdot \underline{u}_e = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1+j\omega \frac{L}{R_1}} \cdot \underline{u}_e$

(b) Zur Herleitung der Übertragungsfunktion werden drei Maschengleichungen aufgestellt:



Teilschaltung 2

$$
\begin{aligned}
M1: &\quad \underline{u}_1 = R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_1 + \underline{u}_{out} \\
M2: &\quad \underline{u}_2 = R_3 \cdot I_2 + R_4 \cdot I_2 \\
M3: &\quad \underline{u}_1 = R_1 \cdot I_1 + R_4 \cdot I_2
\end{aligned}
$$

Umordnen der Variablen ergibt:

$$
\begin{aligned}
M1: &\quad \underline{u}_1 - \underline{u}_{out} = (R_1 + R_2) \cdot I_1 \\
M2: &\quad \underline{u}_2 = (R_3 + R_4) \cdot I_2 \\
M3: &\quad \underline{u}_1 = R_1 \cdot I_1 + R_4 \cdot I_2
\end{aligned}
$$

Aus M1 folgt:

$$I_1 = \frac{\underline{u}_1 - \underline{u}_{out}}{R_1 + R_2} \tag{*}$$

Aus M2 folgt:

$$I_2 = \frac{\underline{u}_2}{R_3 + R_4} \tag{**}$$

(*) und (**) in M3 einsetzen:

$$
\begin{aligned}
\underline{u}_1 &= R_1 \cdot \frac{\underline{u}_1 - \underline{u}_{out}}{R_1 + R_2} + R_4 \cdot \frac{\underline{u}_2}{R_3 + R_4} \\
\underline{u}_1 &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \underline{u}_1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \underline{u}_{out} + \frac{R_4}{R_3 + R_4}\underline{u}_2 \\
\frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \underline{u}_{out} &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \underline{u}_1 - \underline{u}_1 + \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \underline{u}_2 \\
\frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \underline{u}_{out} &= \frac{R_1 - R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \cdot \underline{u}_1 + \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \underline{u}_2 \\
\underline{u}_{out} &= \frac{-R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1}\underline{u}_1 + \frac{R_4}{R_1} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} \cdot \underline{u}_2 \\
\underline{u}_{out} &= \frac{R_4}{R_1} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} \cdot \underline{u}_2 - \frac{R_2}{R_1} \cdot \underline{u}_1
\end{aligned}
$$

(c) Aus dem Aufgabentext entnimmt man: $\underline{u}_{out} = 2 \cdot \underline{u}_2 - 2 \cdot \underline{u}_1$.
Durch Koeffizientenvergleich mit der im vorangegangenen Aufgabenteil hergeleiteten Übertragungsfunktion erhält man die folgenden beiden Gleichungen:

$$\frac{R_4}{R_1} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} = 2 \tag{\#}$$

und

$$\frac{R_2}{R_1} = 2 \tag{\#\#}$$

Aus Gleichung (##) und $R_1 = 40\,\mathrm{k\Omega}$ folgt:

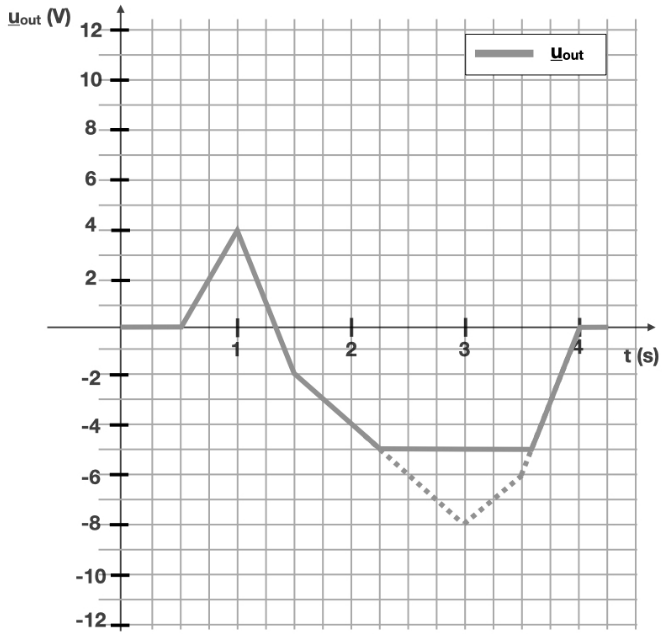
$$\frac{R_2}{40\,\mathrm{k\Omega}} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad R_2 = 80\,\mathrm{k\Omega}$$

Einsetzen in (#) ergibt:

$$
\begin{aligned}
\frac{R_4}{40\,\mathrm{k\Omega}} \cdot \frac{40\,\mathrm{k\Omega} + 80\,\mathrm{k\Omega}}{40\,\mathrm{k\Omega} + R_4} &= 2 \\
\frac{R_4}{40\,\mathrm{k\Omega} + R_4} = \frac{2}{3} &<> \frac{40\,\mathrm{k\Omega} + R_4}{R_4} = \frac{3}{2} \\
\frac{40\,\mathrm{k\Omega}}{R_4} = \frac{1}{2} &<> R_4 = 80\,\mathrm{k\Omega}
\end{aligned}
$$

Alternative Lösung:
Bei der Teilschaltung 2 handelt es sich um einen Differenzverstärker. Dabei gilt: $U_{out} = \frac{R_2}{R_1}(\underline{u}_2 - \underline{u}_1)$, falls die Bedingung $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ erfüllt ist. Da in der Vorfaktor $\frac{R_2}{R_1}$ für beide Spannungen gleich gewählt ist, kann die Formel angewendet werden.
Es gilt: $\frac{R_2}{R_1} = 2$ und somit $R_2 = 80\,k\Omega$. Außerdem $R_4 = R_3 \cdot \frac{R_2}{R_1} = 80\,k\Omega$.

(d) Die resultierende Ausgangsspannung ist in der folgenden Abbildung dargestellt. Diese kann nicht kleiner als -5V werden (gestrichelter Bereich abgeschnitten).



(e) Die Spannungsteilerregel liefert:
$\underline{u}_{K1} = \frac{R_6}{R_6 + j\omega L} \cdot \underline{u}_p$ und $\underline{u}_{K2} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_5 + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \underline{u}_p$
Bei erfüllter Abgleichbedingung folgt mit $\underline{u}_{K1} = \underline{u}_{K2}$

$$\frac{R_6}{R_6 + j\omega L} \cdot \underline{u}_p = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_5 + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \underline{u}_p$$
$$\frac{R_6}{R_6 + j\omega L} \cdot \underline{u}_p = \frac{1}{1 + j\omega C R_5} \cdot \underline{u}_p$$
$$\frac{R_6}{R_6 + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega C R_5}$$
$$\frac{R_6 + j\omega L}{R_6} = \frac{1 + j\omega C R_5}{1}$$
$$1 + \frac{j\omega L}{R_6} = 1 + j\omega C R_5$$
$$L = C R_5 R_6$$
$$L = 100\,\mathrm{nF} \cdot 200\,\Omega \cdot 200\,\Omega = 4\,\mathrm{mH}.$$

Alternative Lösung mit der Abgleichbedingung:
Aus $\frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}} = \frac{\underline{Z_3}}{\underline{Z_4}}$ folgt $\frac{j\omega L}{R_6} = R_5 \cdot j\omega C$ bzw. $L = R_5 R_6 C = 4\,mH$.