

Formelsammlung

Lineare Elektrische Netze

Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel

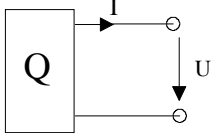
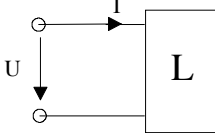
Stand 2009

Diese Formelsammlung darf NICHT in der Klausur verwendet werden!

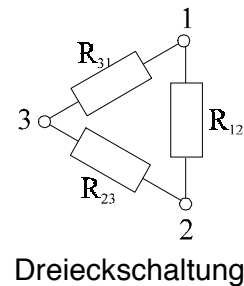
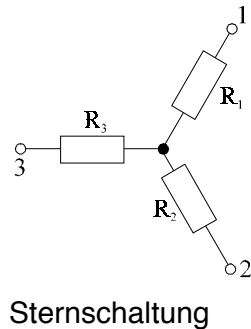
Teil I: Netzwerktheorie

1. Gleichstromschaltungen

Gleichstrom-Leistung an Zweipolen

Quelle	Last
$P = U I = U^2/R = I^2 R$	
$P > 0$ heißt Leistungsabgabe (Generator-Zählpfeilvereinbarung)	$P > 0$ heißt Leistungsaufnahme (Verbraucher-Zählpfeilvereinbarung)
	

2. Netzumwandlung:



$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$	$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$	$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$
$R_{12} = R_1 + R_2 + R_1 \frac{R_2}{R_3}$	$R_{23} = R_2 + R_3 + R_2 \frac{R_3}{R_1}$	$R_{31} = R_3 + R_1 + R_3 \frac{R_1}{R_2}$
bzw. mit den Leitwerten ausgedrückt:		
$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$	$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$	$G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}$

3. Formalisierte Verfahren

Maschenstromverfahren:

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdot & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & \cdot & R_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{m1} & R_{m2} & \cdot & R_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum U_{01} \\ \sum U_{02} \\ \cdot \\ \sum U_{0m} \end{pmatrix}$$

m : $z-(k-1)$ Maschenströme in $i=1 \dots m$ Maschen.

R_{ii} : Summe aller Widerstände in der Masche i ($R_{ii} > 0$).

$R_{ik} = R_{ki}$: Summe aller Widerstände im Koppelzweig zwischen Masche i und Masche k ($i \neq k$). $R_{ik} > 0$, wenn I_i und I_k gleichsinnig sind, sonst ist $R_{ik} < 0$.

$\sum U_{0i}$: Summe aller Quellen-Spannungen in der Masche i .
 $U_{0i} < 0$, wenn in der Masche i die Zählpfeile von Maschenstrom und Spannung gleichsinnig sind, sonst $U_{0i} > 0$.

Knotenpotentialverfahren:

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdot & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdot & G_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdot & G_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ V_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum I_{01} \\ \sum I_{02} \\ \cdot \\ \sum I_{0n} \end{pmatrix}$$

n: (n-1) unabhängige Knotengleichungen an n Knoten.

G_{ii} : Summe aller Leitwerte aller vom Knoten i ausgehender Zweige ($G_{ii} > 0$).

$G_{ik} = G_{ki}$: Summe aller Leitwerte im Zweig zwischen Knoten i und Knoten k ($G_{ik} < 0$).

$\sum I_{0i}$: Summe aller Quellenströme am Knoten i. (Ströme, die zum Knoten hin gerichtet sind, werden hierbei positiv gezählt)

4. Zeitlich veränderliche Ströme und Spannungen:

Kapazität C: $C = \frac{Q}{U}$ $i(t) = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$

Induktivität L: $L = \frac{N \cdot \phi}{I}$ $u(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$

5. Komplexe Wechselstromrechnung:

Bauelement:	Impedanz:	Admittanz:
-------------	-----------	------------

Widerstand	$Z_R = R$	$Y_R = 1/R$
------------	-----------	-------------

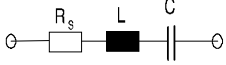
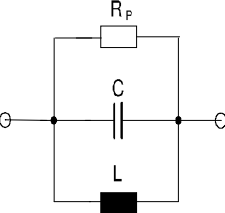
Induktivität	$Z_L = j\omega L$	$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L}$
--------------	-------------------	---

Kapazität	$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$	$Y_C = j\omega C$
-----------	---	-------------------

$$\underline{Z} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{\hat{U} \cdot e^{j\varphi_u}}{\hat{I} \cdot e^{j\varphi_i}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z \cdot e^{j\varphi_{ui}}$$

$$\underline{Y} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} = \frac{\hat{I} \cdot e^{j\varphi_i}}{\hat{U} \cdot e^{j\varphi_u}} = \frac{\hat{I}}{\hat{U}} \cdot e^{j(\varphi_i - \varphi_u)} = Y \cdot e^{j\varphi_{iu}}$$

6. Schwingkreise:

Serienkreis 	Dualität bzw. Gemeinsamkeiten $\underline{U} \leftrightarrow \underline{I}$ $\underline{Z}_S \leftrightarrow \underline{Y}_P$ $R_S \leftrightarrow \frac{1}{R_P}$ $X_S \leftrightarrow B_P$	Parallelkreis 
$\underline{Z}_S = R_S + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ $= R_S(1 + jQ_S v)$	$v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$	$\underline{Y}_P = \frac{1}{R_P} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$ $= \frac{1}{R_P}(1 + jQ_P v)$
$Q_S = \frac{ X_{Res} }{R_S}$ $= \frac{1}{R_S} \sqrt{\frac{L}{C}}$	$Q = \frac{\text{Blindleistung an L oder C}}{\text{Wirkleistung}} \Big _{\omega=\omega_0}$	$Q_P = \frac{ B_{Res} }{\frac{1}{R_P}}$ $= R_P \sqrt{\frac{C}{L}}$
Die Güte ist groß , wenn R_S klein ist, d. h. bei wenig ohmschen Verlusten		Die Güte ist groß , wenn R_P groß ist, d. h. bei wenig ohmschen Verlusten

	Resonanz: $\varphi_Y = -\varphi_Z = 0$ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = 0$ (Blindleistung) $v = 0$	
$R_S \underline{Y}_S = \frac{1}{1 + jQ_S v}$	Maximum bei $v=0$, d. h. $\omega = \omega_0$, $v_H = \pm 1/Q$	$\frac{1}{R_P} \underline{Z}_P = \frac{1}{1 + jQ_P v}$
$\omega > \omega_0 \quad (v > 0)$: induktiv		$\omega > \omega_0 \quad (v > 0)$: kapazitiv
$\omega \rightarrow \infty$: Unterbrechung durch L		$\omega \rightarrow \infty$: Kurzschluß durch C
$\omega \rightarrow 0$: Unterbrechung durch C		$\omega \rightarrow 0$: Kurzschluß durch L
$\omega < \omega_0 \quad (v < 0)$: kapazitiv		$\omega < \omega_0 \quad (v < 0)$: induktiv
	$\varphi_Z \leftrightarrow \varphi_Y$ $\varphi_Y \leftrightarrow \varphi_Z$	

7. Leistungsberechnung:

Effektivwerte

a) $u(t)$ und $i(t)$ sind beliebige, aber periodische Zeitfunktionen

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt \quad U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt$$

b) $u(t)$, $i(t)$ sind sinusförmig:

$$I_{\text{eff}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}} \quad U_{\text{eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

Der komplexe Leistungszeiger:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \frac{1}{2} \hat{\underline{U}} \cdot \hat{\underline{I}}^*$$

Wirkleistung: $P = \text{Re}\{\underline{S}\}$ [W]

Blindleistung: $Q = \text{Im}\{\underline{S}\}$ [var]

Scheinleistung: $S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}$ [VA]

Außerdem gilt: $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$

$$= \underline{I} \underline{I}^* \underline{Z} = I^2 \underline{Z} = I^2 (R + jX)$$

$$= \underline{U} \underline{U}^* \underline{Y}^* = U^2 \underline{Y}^* = U^2 (G - jB)$$

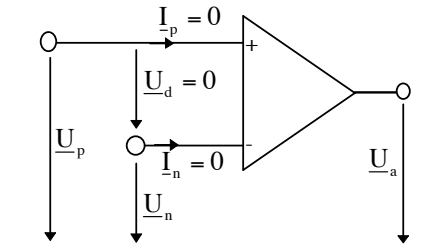
Somit gilt:

$$P = I^2 R = U^2 G = I^2 Z \cos \varphi_{ui} = U^2 Y \cos \varphi_{ui}$$

$$Q = I^2 X = U^2 B = I^2 Z \sin \varphi_{ui} = U^2 Y \sin \varphi_{ui}$$

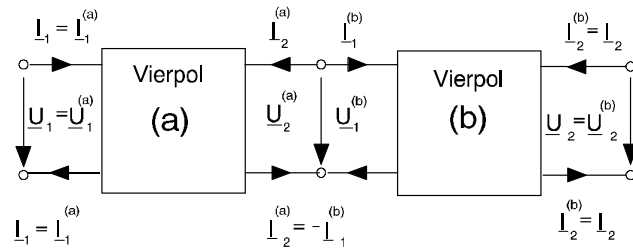
$$S = I^2 Z = I^2 \sqrt{R^2 + X^2} \\ = U^2 Y = U^2 \sqrt{G^2 + B^2}$$

8. Der ideale Operationsverstärker:



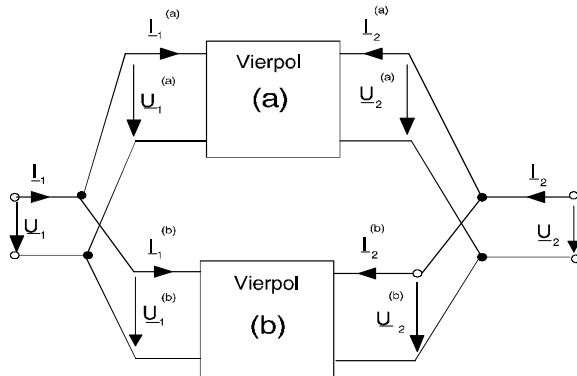
9. Lineare Vierpole

I. Kettenschaltung von 4-Polen



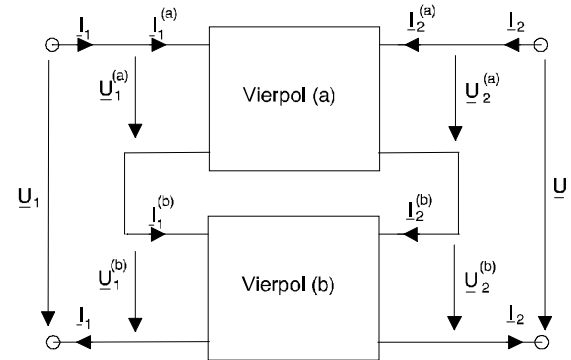
$$[\underline{A}] = [\underline{A}^{(a)}] \cdot [\underline{A}^{(b)}]$$

II. Parallelschaltung von 4-Polen



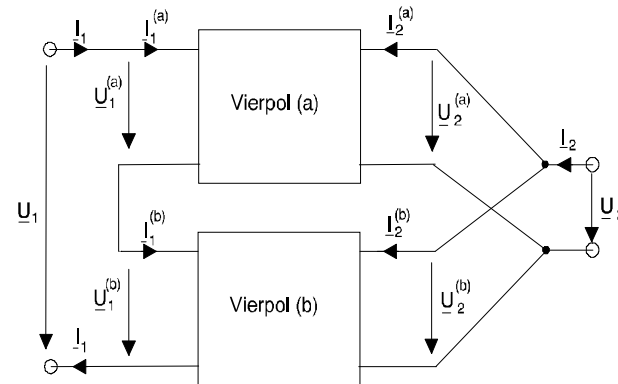
$$[\underline{Y}] = [\underline{Y}^{(a)}] + [\underline{Y}^{(b)}]$$

III. Serienschaltung von 4-Polen



$$[\underline{Z}] = [\underline{Z}^{(a)}] + [\underline{Z}^{(b)}]$$

IV. Reihen-Parallel-Schaltung von 4-Polen



$$[\underline{H}] = [\underline{H}^{(a)}] + [\underline{H}^{(b)}]$$

10. Vierpol-Matrizen und Parameterumrechnung

$[Z]$	$\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{Y_{22}}{\det[Y]} & \frac{-Y_{12}}{\det[Y]} \\ \frac{-Y_{21}}{\det[Y]} & \frac{Y_{11}}{\det[Y]} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\det[A]}{A_{21}} \\ \frac{1}{A_{21}} & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{\det[H]}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ \frac{-H_{21}}{H_{22}} & \frac{1}{H_{22}} \end{matrix}$
$[Y]$	$\begin{matrix} \frac{Z_{22}}{\det[Z]} & \frac{-Z_{12}}{\det[Z]} \\ \frac{-Z_{21}}{\det[Z]} & \frac{Z_{11}}{\det[Z]} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & \frac{-\det[A]}{A_{12}} \\ \frac{-1}{A_{12}} & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{H_{11}} & \frac{-H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{-H_{21}}{H_{11}} & \frac{\det[H]}{H_{11}} \end{matrix}$
$[A]$	$\begin{matrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\det[Z]}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{-1}{Y_{21}} \\ \frac{-\det[Y]}{Y_{21}} & \frac{-Y_{11}}{Y_{21}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{-\det[H]}{H_{21}} & \frac{-H_{11}}{H_{21}} \\ \frac{-H_{22}}{H_{21}} & \frac{-1}{H_{21}} \end{matrix}$
$[H]$	$\begin{matrix} \frac{\det[Z]}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ \frac{-Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{1}{Y_{11}} & \frac{-Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\det[Y]}{Y_{11}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \frac{A_{12}}{A_{22}} & \frac{\det[A]}{A_{22}} \\ \frac{-1}{A_{22}} & \frac{A_{21}}{A_{22}} \end{matrix}$	$\begin{matrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{matrix}$

11. Ortskurven, Netzwerke bei veränderlicher Frequenz

variable komplexe Größe $\underline{F}(p)$:	Ortskurve der komplexen Größe $\underline{F}(p)$ bei Variation des reellen Parameters p :
$a + j b \ f(p)$	Gerade parallel zur Im-Achse im Abstand a
$a \ f(p) + j b$	Gerade parallel zur Re-Achse im Abstand b
$\frac{1}{a + j b \ f(p)}$	Kreis durch Ursprung, Mittelpunkt auf der Re-Achse, Durchmesser $1/a$ (*)
$\frac{1}{b \ f(p) + j a}$	Kreis durch Ursprung, Mittelpunkt auf der Im-Achse, Durchmesser $1/a$ (*)
Operationen	Ortskurve
$\underline{A}(p) + \underline{B}$	Parallelverschiebung von $\underline{A}(p)$ um $\underline{B}$
$\underline{A}(p) \exp(jh)$	Drehung von $\underline{A}(p)$ um Ursprung um Winkel h
$\underline{A}(p) \underline{C}$	Streckung
$\underline{A}(p) \underline{C}$	Drehstreckung
$(\underline{A}(p) \underline{C}) + \underline{B}$	Drehstreckung und Parallelverschiebung
	(*): falls $f(p) \rightarrow \infty$ möglich

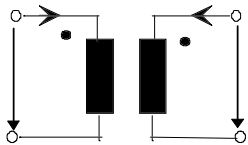
12. Logarithmische Größenverhältnisse, Pegel

Definition: $a_p = 10 \log\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \text{ dB}$

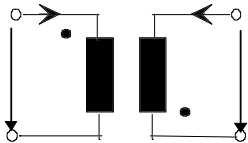
Definition: $a_u = 20 \log\left(\frac{U_1}{U_2}\right) \text{ dB}$

Definition: $a_i = 20 \log\left(\frac{I_2}{I_1}\right) \text{ dB}$

13. Transformatoren ("Trafos"), Übertrager



Bei gleichsinnigen Wicklungen(••) erzeugen Ströme in den gezeichneten Richtungen im Kern gleichsinnige magnetische Flüsse.



Bei gegensinnigen Wicklungen(••) erzeugen Ströme in den gezeichneten Richtungen im Kern gegensinnige magnetische Flüsse.

Kopplungskonstante k : $k^2 = \frac{M_{12}M_{21}}{L_1L_2} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} \cdot \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}}$

Φ_{21} : Anteil des von i_1 erzeugten Flusses in Spule 2

Φ_{12} : Anteil des von i_2 erzeugten Flusses in Spule 1

Für $k=1$ gilt: $\Phi_{21} = \Phi_{11}$ und $\Phi_{12} = \Phi_{22}$

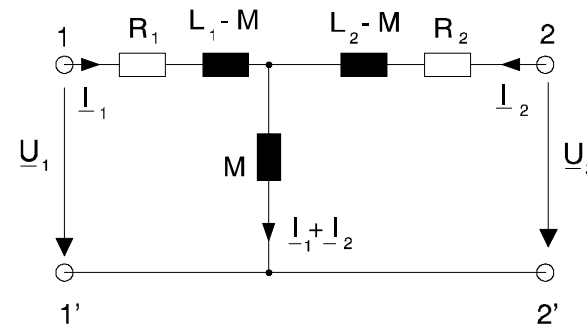
Streifaktor: $\sigma = 1 - k^2$

Übersetzungsverhältnis: $\ddot{u}^2 = \frac{L_1}{L_2}$, $\ddot{u} = \frac{w_1}{w_2}$

Transformator / Übertrager bei Betrieb an sinusförmiger Wechselspannung

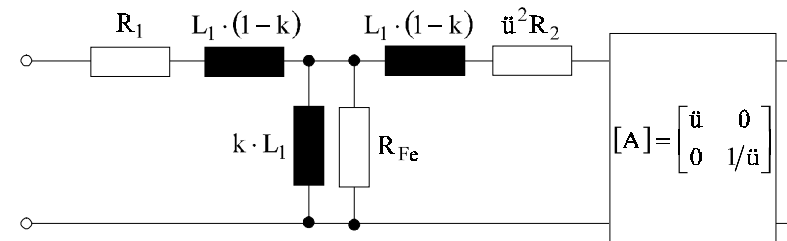
$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= j\omega M \underline{I}_1 + (R_2 + j\omega L_2) \underline{I}_2 \end{aligned}$$

Das Vierpol-T-Ersatzschaltbild:



$$[Z_{\text{Trafo}}] = \begin{pmatrix} (R_1 + j\omega L_1) & j\omega M \\ j\omega M & (R_2 + j\omega L_2) \end{pmatrix}$$

Ersatzschaltbild mit Wicklungs- und Kernverlusten:



	„real“	verlustlos $R_1=0, R_2=0$	verlust- & streulos $R_i=0; k=1$	ideal $R_i=0; k=1$ $\left \frac{Z_v}{j\omega L_2} \right \ll 1$
$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}$	$-\frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_v}$	$-\frac{k \cdot \ddot{u}}{\left(1 + \frac{\underline{Z}_v}{j\omega L_2}\right)}$	$-\frac{\ddot{u}}{\left(1 + \frac{\underline{Z}_v}{j\omega L_2}\right)}$ lastabhängig!	$-\ddot{u}$ last <u>un</u> abhängig!
$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \Big _{U_2=0}$ Kurzschluss	$-\frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2}$	$-k \cdot \ddot{u}$	$-\ddot{u}$	$-\ddot{u}$
$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$	$\frac{j\omega M \underline{Z}_v}{(R_1 + j\omega L_1) \cdot (R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_v) + \omega^2 M^2}$	$\frac{k}{\ddot{u}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega L_2 Y_v (1 - k^2)}$	$\frac{1}{\ddot{u}}$ last <u>un</u> abhängig!	$\frac{1}{\ddot{u}}$
$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \Big _{I_2=0}$ Leerlauf	$\frac{j\omega M}{R_1 + j\omega L_1}$	$\frac{k}{\ddot{u}}$	$\frac{1}{\ddot{u}}$	$\frac{1}{\ddot{u}}$
$\underline{Z}_e$	$\frac{(R_1 + j\omega L_1) + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2 + \underline{Z}_v}}{\omega^2 M^2}$	$j\omega L_1 \cdot \frac{(1 - k^2) + \frac{\underline{Z}_v}{j\omega L_2}}{1 + \frac{\underline{Z}_v}{j\omega L_2}}$	$\frac{\ddot{u}^2 \cdot \underline{Z}_v}{1 + \frac{\underline{Z}_v}{j\omega L_2}}$	$\ddot{u}^2 \cdot \underline{Z}_v$ Impedanzanpassung!
$\underline{Z}_e \Big _{\underline{Z}_v=0}$ Kurzschluss	$\frac{(R_1 + j\omega L_1) + \frac{\omega^2 M^2}{(R_2 + j\omega L_2)}}{\omega^2 M^2}$	$j\omega L_1 (1 - k^2)$	0	0
$\underline{Z}_e \Big _{\underline{Z}_v=\infty}$ Leerlauf	$R_1 + j\omega L_1$	$j\omega L_1$	$j\omega L_1$	$j\omega L_1$
Kettenmatrix $[A]$				$\begin{bmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & 1/\ddot{u} \end{bmatrix}$

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \sim -\frac{w_2}{w_1}$$

gegenphasig!

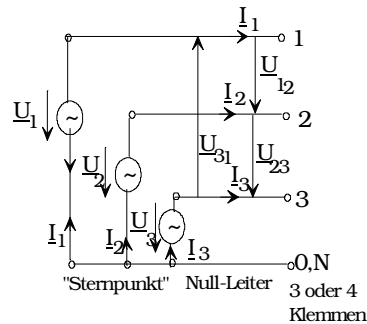
$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \sim \frac{w_1}{w_2}$$

in Phase!

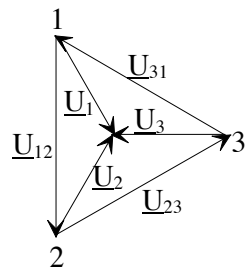
$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = [A] \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ -\underline{I}_2 \end{pmatrix}$$

$$[A^{\text{Kette}}] = [A^1] \cdot [A^2]$$

14. Drehstrom-Netzwerke



Strangspannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ sind die Spannungen zwischen Leiter und "Sternpunkt" (Null-Leiter).



Die Spannungen zwischen den einzelnen Leitern werden mit "Leiterspannungen" oder "verkettete Spannungen" ($\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$) bezeichnet.

$$\begin{aligned}\underline{U}_{12} &= \underline{U}_1 - \underline{U}_2 \\ \underline{U}_{23} &= \underline{U}_2 - \underline{U}_3 \\ \underline{U}_{31} &= \underline{U}_3 - \underline{U}_1 \\ \underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} &= 0\end{aligned}$$

I_1 , I_2 , I_3 heißen Leiterströme. In der Stern-Schaltung sind die Leiterströme identisch mit den Strangströmen.

Leistungsvergleich bei identischen Lastimpedanzen

$$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi_z}$$

Schaltung:	Spannung	Scheinleistung	Verhältnis der Scheinleistungen
Stern-Generator, Stern-Verbraucher	$U = \sqrt{3} U_{\text{Gen}}$	$S_{YY} = 3 U_{\text{Gen}}^2 \frac{1}{Z}$	
Stern-Generator, Dreieck-Verbraucher	$U = \sqrt{3} U_{\text{Gen}}$	$S_{YD} = 9 U_{\text{Gen}}^2 \frac{1}{Z}$	$S_{YD}/S_{YY} = 3$