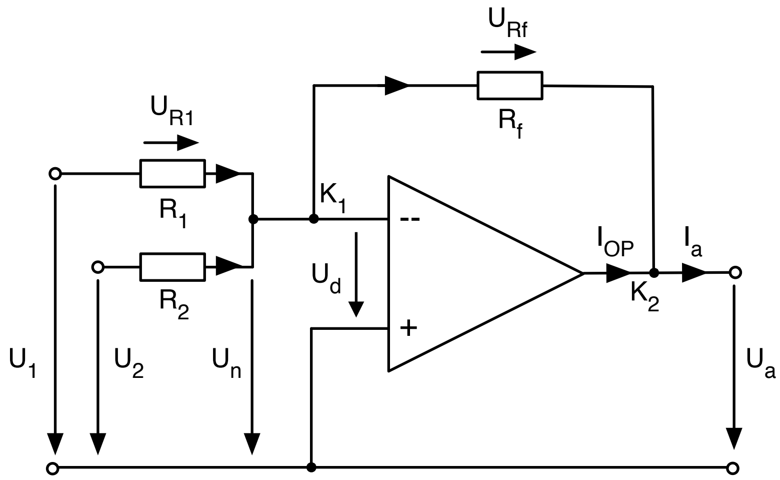
Lösung Aufgabe 1:

a) Bei einem idealen OP sind folgende Dinge zu beachten:
- $U_d = 0$, d.h. $U_p = U_n$
- es fliesst keine Strom in den OP
- es dürfen keine Maschen durch den OP gelegt werden

b) Hier kommt das Knotenpunktpotentialverfahren zum Einsatz.

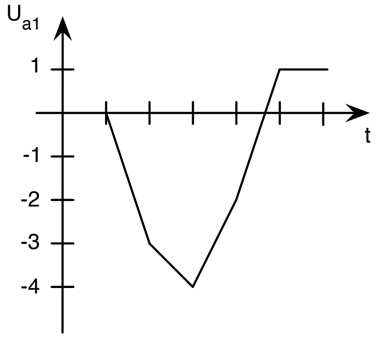


$$
\begin{aligned}
K_1: \quad & (U_1 - U_n)\tfrac{1}{R_1} + (U_2 - U_n)\tfrac{1}{R_2} - (U_n - U_a)\tfrac{1}{R_f} &= 0 \\
K_2: \quad & I_{OP} + (U_n - U_a)\tfrac{1}{R_f} - I_a &= 0
\end{aligned}
$$

In diesem Fall ist nur Knoten K_1 notwendig. U_n ist wegen $U_d = 0$ ebenfalls gleich Null Umstellen nach U_a liefert:

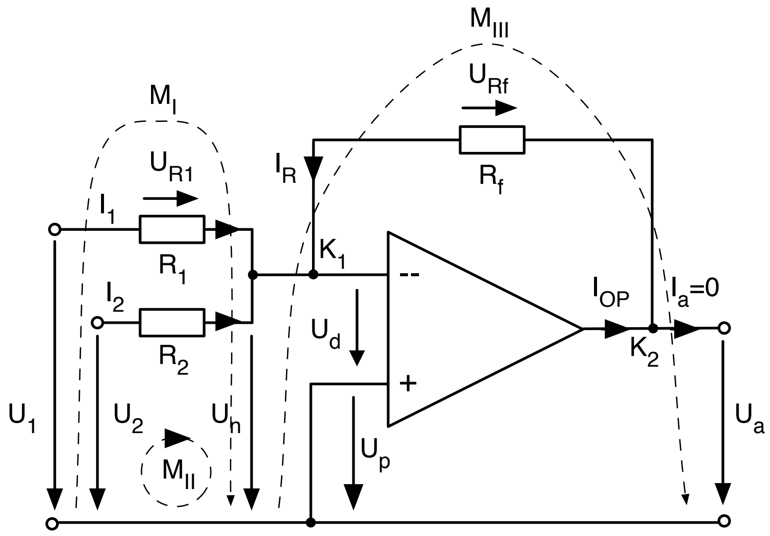
$$
\begin{aligned}
U_1\frac{1}{R_1} + U_2\frac{1}{R_2} + U_a\frac{1}{R_f} &= 0 \\
U_a &= -R_f\left(\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}\right)
\end{aligned}
$$

c) Mit der gegebenen Bedingung erhält man einen invertierenden Addierer:



$$
\begin{aligned}
R_f &= R_1 = R_2 \\
U_a &= -(U_1 + U_2)
\end{aligned}
$$

d)



idealer OP: $U_n = U_p + U_d = 0$

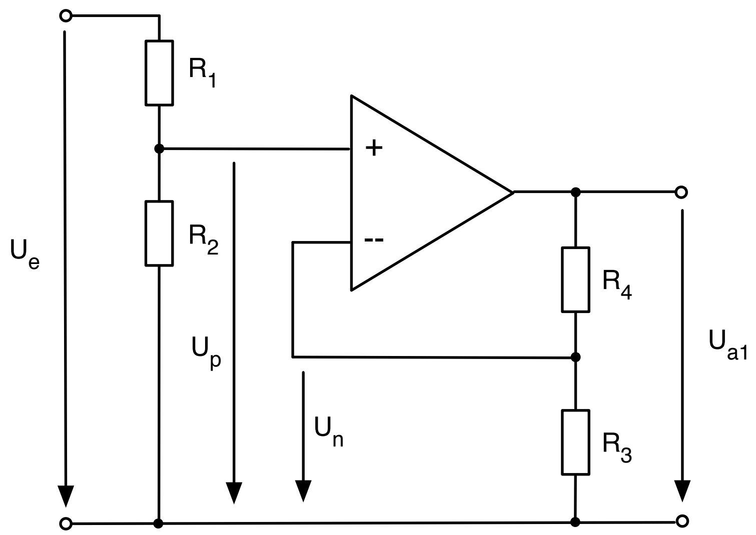
$$
\begin{aligned}
M_I:&\quad & -U_1 + I_1R_1 + U_n &= 0 \\
& & U_1 &= I_1R_1 \\
M_{II}&\quad & -U_2 + I_2R_2 + U_n &= 0 \\
& & U_2 &= I_2R_2 \\
K_1:&\quad & I_1 + I_2 + I_R - I_n &= 0 \\
& & I_R &= -I_1 - I_2 \\
M_{III}:&\quad & -U_p - U_d - I_RR_f + U_a &= 0 \\
& & U_a &= I_RR_f \\
K_1 \text{ in } M_{III}:&\quad & U_a &= -R_f(I_1 + I_2) \\
& & U_a &= -R_f\left(\tfrac{U_1}{R_1} + \tfrac{U_2}{R_2}\right)
\end{aligned}
$$

Diese Formel beschreibt einen invertierenden Addierer.

Hinweis: Maschen sind bei der Berechnung von OP-Schaltungen nicht immer vorteilhaft, da nicht unbedingt gewährleistet ist, dass die Maschen linear unabhängig sind. Besser ist dann das Knotenpunktpotentialverfahren.

Lösung Aufgabe 2:

a)



Hier können zwei Spannungsteiler verwendet werden.

Der erste schließt die Eingangsspannung mit ein: $U_p = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_e$,

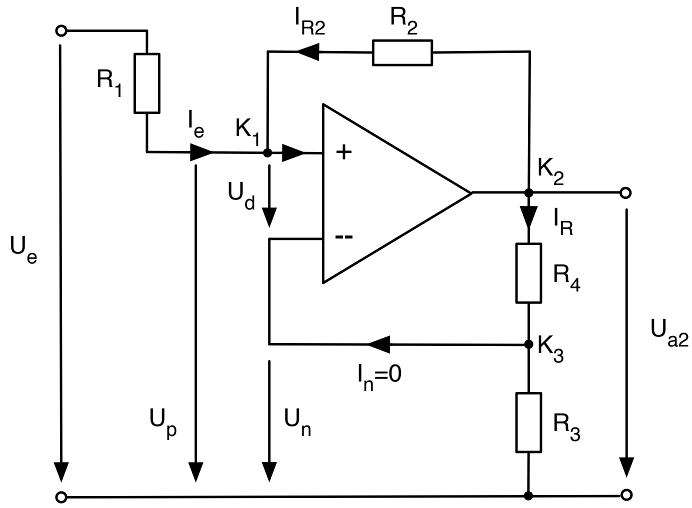
der zweite die Ausgangsspannung: $U_n = \frac{R_3}{R_3 + R_4} U_{a1}$

Da sich um einen idealen OP handelt, gilt U_n=U_p

Somit kann man die ersten beiden Terme gleichsetzen und erhält schliesslich das gesuchte Verhältnis von Eingangs- und Ausgangsspannung.

$$
\begin{aligned}
U_p &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_e = U_n = \frac{R_3}{R_3 + R_4} U_{a1} \\
V_{u1} &= \frac{U_{a1}}{U_e} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_3 + R_4}{R_3} \\
&= \frac{50k\Omega}{55k\Omega} \cdot \frac{440k\Omega}{50k\Omega} = 8
\end{aligned}
$$

b) Für die Lösung dieses Aufgabenteils verwenden wir das Knotenpunktpotentialverfahren.



auch hier gilt wegen des idealen OPs wieder U_n=U_p, d.h. U_d=0.

$$
\begin{aligned}
K_1: &\quad \tfrac{U_e - U_p}{R_1} + \tfrac{U_{a2} - U_p}{R_2} = 0 \\
K_3: &\quad \tfrac{U_{a2} - U_p}{R_4} - \tfrac{U_p}{R_3} = 0
\end{aligned}
$$

Die Knotengleichung für K_3 umformen:

$$
\begin{aligned}
(U_{a2} - U_p)R_3 - U_p R_4 &= 0 \\
-U_p R_3 - U_p R_4 &= -U_{a2} R_3 \\
U_p(-R_3 - R_4) &= -U_{a2} R_3 \\
U_p &= \frac{U_{a2} R_3}{R_3 + R_4}
\end{aligned}
$$

Die Knotengleichung für K_1 umformen:

$$
\begin{aligned}
\frac{U_e}{R_1} - \frac{U_p}{R_1} + \frac{U_{a2}}{R_2} - \frac{U_p}{R_2} &= 0 \\
\frac{U_e}{R_1} + \frac{U_{a2}}{R_2} &= U_p \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)
\end{aligned}
$$

Hier den für U_p aus K_3 gewonnenen Ausdruck einsetzen

$$\begin{aligned}
\frac{U_e}{R_1}+\frac{U_{a2}}{R_2} &= U_{a2}\frac{R_3}{R_3+R_4}\left(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}\right)\\
\frac{U_e}{U_{a2}}+\frac{R_1}{R_2} &= \frac{R_1R_3}{R_3+R_4}\left(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}\right)\\
\frac{U_e}{U_{a2}} &= \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_2(R_3+R_4)}-\frac{R_1}{R_2}\\
&= \frac{R_3(R_1+R_2)-R_1(R_3+R_4)}{R_2(R_3+R_4)}
\end{aligned}$$

Die gesuchte Verstärkung ist der Kehrwert des letzten Terms:

$$\begin{aligned}
V_{u2}:\frac{U_{a2}}{U_e} &= \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_3(R_1+R_2)-R_1(R_3+R_4)}\\
&= \frac{50k\Omega(50k\Omega+390k\Omega)}{50k\Omega(5k\Omega+50k\Omega)-5k\Omega(50k\Omega+390k\Omega)}\\
&= \frac{22000k\Omega}{(2750-2200)k\Omega}=40
\end{aligned}$$

c) Die Aufgabenstellung ausgedrückt als Gleichung

$$V_{u1}=\frac{R_2(R_3'+R_4)}{R_2R_3'-R_1R_4}\overset{!}{=}V_{u2}$$

Auflösen nach R_3‘ liefert den gesuchten Wert

$$\begin{aligned}
R_2R_3'+R_2R_4 &= V_{u1}\cdot R_2R_3'-V_{u1}\cdot R_1R_4\\
(R_2+V_{u1}R_1)R_4 &= (V_{u1}-1)R_2R_3'\\
R_3' &= \frac{(R_2+V_{u1}R_1)R_4}{(V_{u1}-1)R_2}\approx 100k\Omega\\
V_{u2} &= \frac{24500}{5500-2450}\approx 8
\end{aligned}$$

d) Vergleich der Eingangswiderstände der beiden Schaltungsvarianten:

Schaltung 1:

$$\begin{aligned}
I_e &= \frac{U_e}{R_1+R_2}\\
R_e &= \frac{U_e}{I_e}=R_1+R_2=55k\Omega
\end{aligned}$$

Schaltung 2:

$$I_e = \frac{U_e-U_{a2}}{R_1+R_2}$$ (Aufgabenteil b)

da in den OP kein Strom fließt.

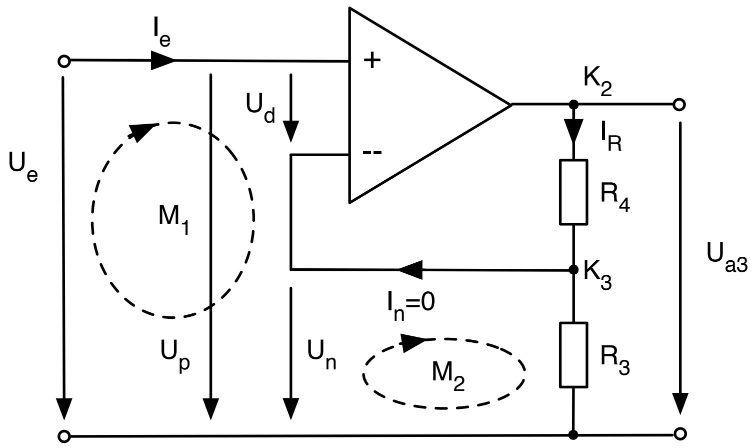
$V_{u1}=V_{u2}=8$ (aus Aufgabenteil b)

$$\begin{aligned} I_e &= \frac{U_e - 8U_e}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{-7U_e}{R_1 + R_2} \\ R_{e2} &= \frac{U_e}{I_e} = -\frac{1}{7}(R_1 + R_2) \\ &\approx -7,86k\Omega \end{aligned}$$

Der Eingangswiderstand R_{e2} ist negativ, da bei angelegter positiver Eingangsspannung die Ausgangsspannung größer als die angelegte Spannung ist. Folglich fließt ein Strom vom Ausgang zum Eingang der Schaltung!

Man kann durch eine geeignete Wahl R_3 die Verstärkung der zweiten Schaltung zwar korrigieren, aber nicht jedes Bauelement am Eingang des Verstärkers „verträgt" einen zurückfließenden Strom. Deshalb soll in d) ein weiterer Versuch aufgezeigt werden, den Layoutfehler so zu korrigieren, dass die Schaltung dennoch verwendet werden kann.

e)

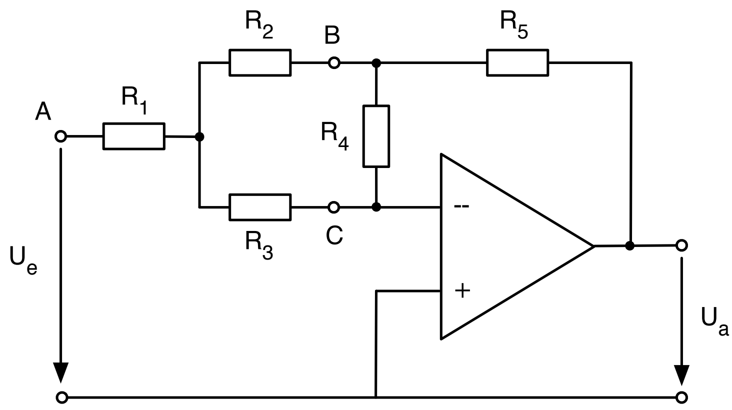


$$\begin{aligned} U_p &= U_n \quad \text{(idealer OP)} \\ U_p &= U_e \\ U_n &= \frac{R_3}{R_3 + R_4} U_{a3} \\ &= U_e \\ V_{u3} &= \frac{U_{a3}}{U_e} = \frac{R_3 + R_4}{R_3} \stackrel{!}{=} V_{u1} \\ R_3 &= \frac{R_4}{V_{u1} - 1} = 55,7k\Omega \end{aligned}$$

f) Der Eingangswiderstand R_{e3} ist unendlich groß, da wegen $I_e = I_p = 0$ kein Strom in der Eingang der Schaltung fließt.

Lösung Aufgabe 3:

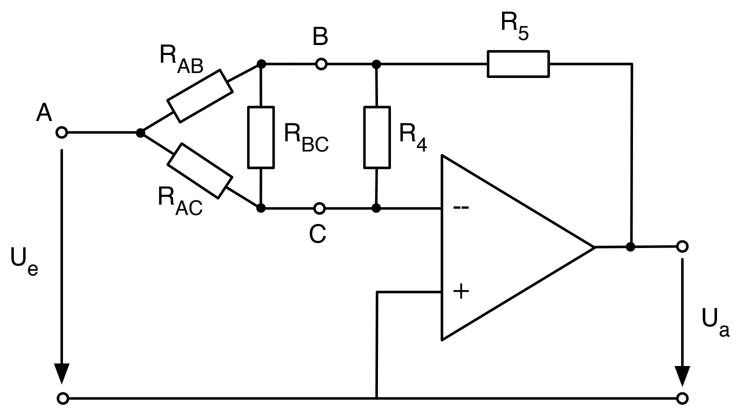
a)



Zunächst wird das Netzwerk A,B,C in eine Dreieckschaltung umgewandelt. Aufgrund der Symmetrie (R_1 = R_2 = R_3) sind die Zweigwiderstände auch gleich groß (R_{AB} = R_{AC} = R_{BC}).

$$R_{AC} = R + R + \frac{R \cdot R}{R} = 3R = 3k\Omega$$

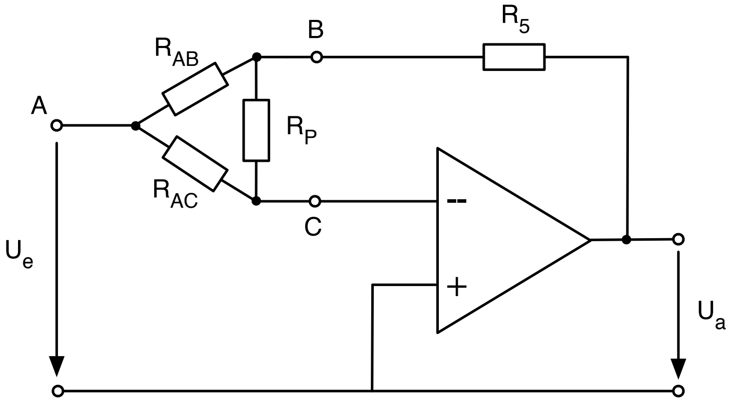
Damit ergibt sich folgendes neues Layout



Hierin lassen sich die parallelen R_{BC} und R_4 zusammenfassen.

$$\begin{aligned} R_P &= R_{BC} \parallel R_4 = 3k\Omega \parallel 6k\Omega \\ &= \frac{3k\Omega \cdot 6k\Omega}{9k\Omega} = 2k\Omega \end{aligned}$$

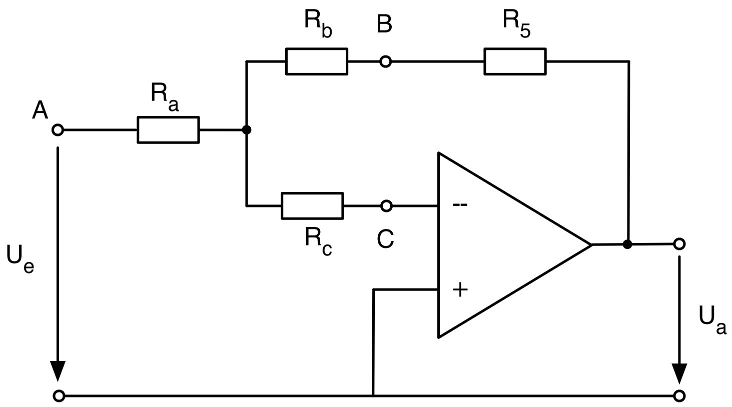
Es folgt also



Eine erneute Dreieck-Stern-Transformation

$$
\begin{aligned}
R_a &= \frac{R_{AB} \cdot R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_P} = \frac{3k\Omega \cdot 3k\Omega}{3k\Omega + 3k\Omega + 2k\Omega} = \frac{9000}{8}\Omega \\
R_b &= \frac{R_{AB} \cdot R_P}{R_{AB} + R_{AC} + R_P} = \frac{3k\Omega \cdot 2k\Omega}{3k\Omega + 3k\Omega + 2k\Omega} = \frac{6000}{8}\Omega \\
R_c &= R_b = \frac{6000}{8}\Omega
\end{aligned}
$$

Die Schaltung wird so zu



Die beiden Widerstände R_b und R_5 im Rückkopplungszweig liegen in Serie und können leicht zusammengefasst werden.

$$R_f = \frac{6k\Omega}{8} + 375\Omega = 1125\Omega$$

b) Da der Eingangsstrom des Operationsverstärkers vernachlässigt werden kann ($I_P = 0$), fällt an R_c keine Spannung ab. Der Widerstand hat somit keine funktionelle Bedeutung für die Schaltung.

Die gesamte Verstärkung berechnet sich damit wie diejenige eines invertierenden Verstärkers:

$$V = \frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_f}{R_a} = -\frac{1125\Omega}{\frac{9000}{8}\Omega} = -1$$