Lösung Aufgabe 1

a) Zuerst wird der Gesamtstrom bestimmt:

$$\underline{I}' = \frac{\underline{U}_0'}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1\mathrm{V}}{(1-j1)\Omega} = \frac{1\mathrm{V}(1+j1)\Omega}{(1-j1)\Omega(1+j1)\Omega} = \frac{1}{2}(1+j1)\mathrm{A}$$

Daraus lassen sich die Teilspannungen berechnen:

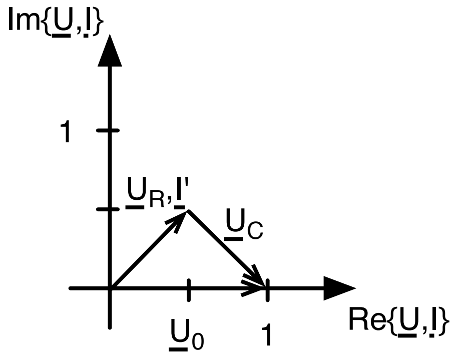
$$\underline{U}_R = \underline{I}'R = \frac{1}{2}(1+j1)\mathrm{A}\cdot 1\Omega = \frac{1}{2}(1+j1)\mathrm{V}$$

$$\underline{U}_C = \underline{I}'\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{2}(1+j1)\mathrm{A}\cdot(-j1)\Omega = \frac{1}{2}(1-j1)\mathrm{V}$$

Zur Kontrolle können die Einzelspannungen addiert werden:

$$\underline{U}_0' = \underline{U}_R + \underline{U}_C = \frac{1}{2}(1+j1)V + \frac{1}{2}(1-j1)V = 1V$$

b) Zeigerdiagramm:



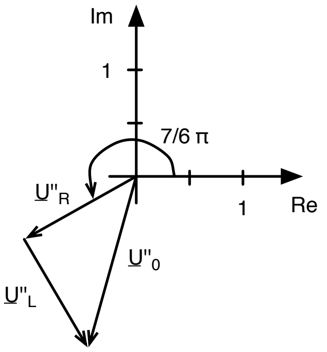
c)

$$\begin{aligned}\underline{U}_0'' &= \underline{Z}\underline{I}'' = (R + j\omega L)\underline{I}'' \\ &= (1+j1)e^{j\frac{7}{6}\pi}\mathrm{V} = \sqrt{2}e^{j\frac{1}{4}\pi}e^{j\frac{7}{6}\pi}\mathrm{V} = \sqrt{2}e^{j\frac{17}{12}\pi}\mathrm{V}\end{aligned}$$

$$\underline{U}_R'' = \underline{I}''R = 1e^{j\frac{7\pi}{6}}A\cdot 1\Omega = 1e^{j\frac{7\pi}{6}}V$$

$$\underline{U}_L'' = \underline{I}''j\omega L = e^{j\frac{7\pi}{6}}A\cdot j1\Omega = 1e^{\frac{7\pi}{6}}\cdot 1e^{j\frac{\pi}{2}}V = 1e^{j\frac{5\pi}{3}}V$$

d)



e) Über die Knotenregel folgt:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

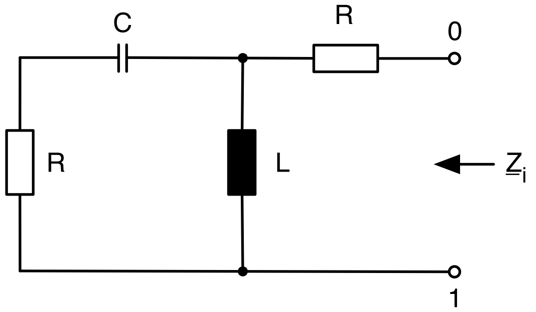
$\underline{I_2}$ ist bereits aus Teil c) bekannt.

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_C + R} = \frac{\sqrt{2}e^{j\frac{17}{12}\pi}}{\frac{1}{j1}+1}\mathrm{A} = \frac{\sqrt{2}e^{j\frac{17}{12}\pi}}{1-j1}\mathrm{A} = \frac{\sqrt{2}e^{j\frac{17}{12}\pi}}{\sqrt{2}e^{-j\frac{1}{4}\pi}}\mathrm{A} = 1e^{j\frac{5}{3}\pi}\mathrm{A}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 1e^{j\frac{5}{3}\pi}\mathrm{A} + 1e^{j\frac{7}{6}\pi}\mathrm{A} = 1\left(e^{j\frac{5}{3}\pi} + e^{j\frac{7}{6}\pi}\right)\mathrm{A} = \sqrt{2}e^{j\frac{17}{12}\pi}\mathrm{A}$$

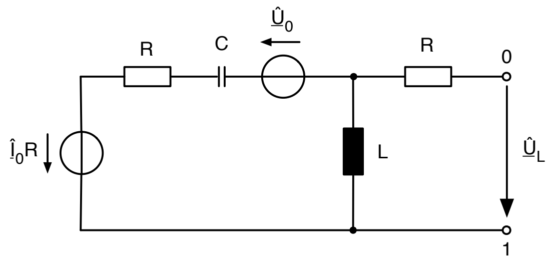
Lösung Aufgabe 2

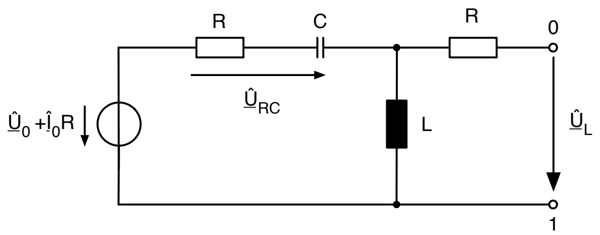
a) Bestimmung von $\underline{Z}_i$:
- Stromquelle durch Leerlauf ersetzen
- Spannungsquelle durch Kurzschluss ersetzen



$$\begin{aligned}
\underline{Z}_i &= R + \underline{Z}_L \parallel (R + \underline{Z}_C) = R + \frac{\underline{Z}_L(R+\underline{Z}_C)}{\underline{Z}_L + R + \underline{Z}_C} = R + \frac{j\omega L\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}} \\
&= R + \frac{j\omega L(1 + j\omega RC)}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} = R + \frac{j\omega L - \omega^2 CRL}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} \\
&= R + \frac{(j\omega L - \omega^2 LRC)(1 - \omega^2 LC - j\omega RC)}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \\
&= R + \frac{j\omega L - \omega^2 LRC - j\omega^3 L^2 C + \omega^4 L^2 RC^2 + \omega^2 LRC + j\omega^3 LR^2 C^2}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \\
&= R + \frac{\omega^4 L^2 RC^2}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} + j\frac{\omega L + \omega^3(LR^2C^2 - L^2 C)}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}
\end{aligned}$$

b) Vorgehen:
- Stromquelle in Spannungsquelle umwandeln
- Zusammenfassen von mehreren Spannungsquellen in einer Masche





Im Leerlauffall fließt durch den rechten Widerstand R kein Strom, d.h. es fällt auch keine Spannung ab. Die Leerlaufspannung liegt somit an der Spule an.

$$\underline{Z}_L = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

$$\underline{\hat{I}}_L = \frac{\underline{\hat{U}}_0 + \underline{\hat{I}}_0 R}{\underline{Z}_L}$$

Mit Hilfe der Spannungsteilerregel:

$$\begin{aligned}
\frac{\underline{\hat{U}}_L}{\underline{\hat{U}}_0 + \underline{\hat{I}}_0 R} &= \frac{j\omega L}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \\
\underline{\hat{U}}_L &= (\underline{\hat{U}}_0 + \underline{\hat{I}}_0 R)\frac{j\omega L}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \\
&= [7\mathrm{V} + (-3 + j4)\mathrm{V}] \cdot \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \\
&= 4 \cdot \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \mathrm{V}
\end{aligned}$$

Die dazugehörige Zeitfunktion ist damit:

$$\underline{u}(t) = \underline{\hat{U}}_L \cdot e^{j\omega t}$$

c) Im Resonanzfall wird $\underline{Z}_i$ rein reell, d. h. der Imaginärteil verschwindet.

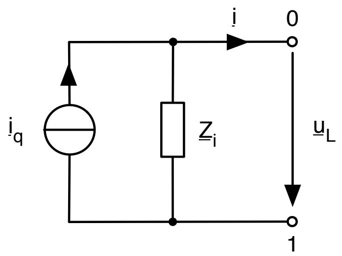
$$\mathrm{Im}\{\underline{Z}_i\} = 0$$

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\omega_0 L + \omega_0^3 (LR^2C^2 - L^2C)}{(1 - \omega_0^2 LC)^2 + \omega_0^2 R^2 C^2} \\
&= \omega_0 L + \omega_0^3 (LR^2C^2 - L^2C) \\
&= L - \omega_0^2 (L^2C - LR^2C^2) \\
\Leftrightarrow \omega_0^2 &= \frac{-L}{LR^2C^2 - L^2C} = \frac{1}{LC - R^2C^2} \\
\Leftrightarrow \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC - R^2C^2}} = \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{-9} s^2 - 10000 \cdot 100 \cdot 10^{-18} s^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 10^{-14} s^2 - 100 \cdot 10^{-14} s^2}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-12} s^2}} = 10^6 s^{-1}
\end{aligned}$$

Für $\omega = \omega_0$ wird $\underline{Z}_i$ zu:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_i(\omega_0) &= R + \frac{\omega_0^4 L^2 RC^2}{(1-\omega_0^2 LC)^2 + \omega_0^2 R^2 C^2} \\
&= 100\Omega + \frac{10^{24}\cdot 40000\cdot 10^{-12}\cdot 100\cdot 100\cdot 10^{-18}}{(1-10^{12}\cdot 200\cdot 10^{-6}\cdot 10\cdot 10^{-9})^2 + 10^{12}\cdot 10000\cdot 100\cdot 10^{-18}}\Omega \\
&= 100\Omega + \frac{400}{1+1}\Omega = 300\Omega
\end{aligned}$$

d) Norton-Ersatzschaltbild: Stromquelle



$$\underline{Z}_i(\omega) = R + \frac{j\omega L - \omega^2 LRC}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}$$

$$\hat{\underline{I}}_q = \frac{\hat{\underline{U}}_L}{\underline{Z}_i} = \frac{4\sqrt{2}\mathrm{V}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}{\underline{Z}_i}\cdot\frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Für $\omega = \omega_0$ folgt als Leerlaufspannung:

$$\begin{aligned}
\hat{\underline{U}}_L(\omega_0) &= \frac{(4+j4)j10^6\cdot 200\cdot 10^{-6}}{100 + j\left(10^6\cdot 200\cdot 10^{-6} - \frac{1}{10^6\cdot 10\cdot 10^{-9}}\right)} = \frac{(-1+j1)800}{100+j100}V \\
&= 8\frac{(-1+j1)(1-j1)}{2} = 4(-1+j1+j1+1)V = j8V
\end{aligned}$$

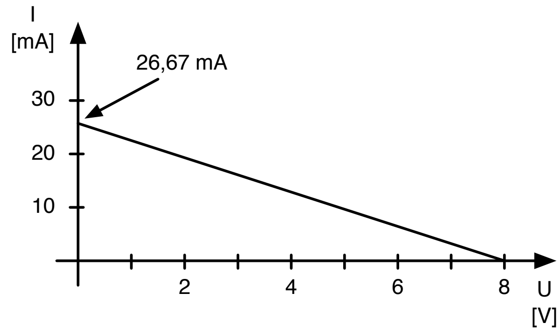
Der Kurzschlussstrom:

$$\hat{\underline{I}}_K = \frac{\hat{\underline{U}}_L(\omega_0)}{\underline{Z}_i(\omega_0)} = j\frac{8}{300}A = j\frac{2}{75}A$$

e) I-U-Kennlinie:
Die Quelle aus c) wird mit einem Lastwiderstand R_L belastet. Dabei sind zwei Grenzwerte zu
betrachten: $R_L \to 0$ (Kurzschluss) und $R_L \to \infty$ (offene Klemmen)

Kurzschluss: $\underline{u} = 0, \quad \underline{i} = j\frac{2}{75}\mathrm{A} \quad \Rightarrow |\underline{i}| = \frac{2}{75}\mathrm{A}$

Offene Klemmen: $\underline{i} = 0, \quad \underline{u} = j8\mathrm{V} \quad \Rightarrow |\underline{u}| = 8\mathrm{V}$



I-U-Kennlinie für ohmsche Belastung

Lösung Aufgabe 3

a) Berechnung der Brückenspannung $\underline{U}_{23}$:
aus einem Maschenumlauf folgt:

$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{24} - \underline{U}_{34}$ mit

$$\underline{U}_{24} = \underline{U}_{14} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L}$$

$$\underline{U}_{34} = \underline{U}_{14} \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_{14} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} - \underline{U}_{14} \frac{R_3}{R_2 + R_3} = \underline{U}_{14} \left(\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right)$$

Nun muss noch $\underline{U}_{14}$ durch vorgegebene Größen substituiert werden.

$$\underline{U}_{14} = \underline{U}_0 - \underline{I}R_1 \quad \text{mit} \quad \underline{I} = \underline{I}_{12} + \underline{I}_{13} = \frac{\underline{U}_{14}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} + \frac{\underline{U}_{14}}{R_2 + R_3}$$

Daraus folgt

$$\underline{U}_{14} = \underline{U}_0 - \underline{I}R_1 = \underline{U}_0 - R_1 \left(\frac{\underline{U}_{14}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} + \frac{\underline{U}_{14}}{R_2 + R_3} \right)$$

Auflösen nach $\underline{U}_{14}$

$$\underline{U}_{14} = \frac{\underline{U}_0}{\left\{ 1 + \frac{R_1}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} + \frac{R_1}{R_2 + R_3} \right\}}$$

und einsetzen liefert

$$\underline{U}_{23} = \left\{ \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right\} \frac{\underline{U}_0}{\left\{ 1 + \frac{R_1}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} + \frac{R_1}{R_2 + R_3} \right\}}$$

b) Brückenspannung für $\omega^2 LC = 1$
Zunächst wird die Gleichung für die Brückenspannung umgeformt, so dass sich die Bedingung $\omega^2 LC = 1$ einsetzen lässt, ohne eine Division durch Null zu erhalten.

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_0 \cdot \left(\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{R_1}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} + \frac{R_1}{R_2 + R_3}} \right)$$
$$= \underline{U}_0 \left(\frac{1}{1 - \omega^2 LC} - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right) \left(\frac{1}{1 + \frac{j\omega C R_1}{1 - \omega^2 LC} + \frac{R_1}{R_2 + R_3}} \right)$$
$$= \underline{U}_0 \left(\frac{R_2 + R_3 - R_3 + R_3 \omega^2 LC}{(1 - \omega^2 LC)(R_2 + R_3)} \right) \left(\frac{1}{\frac{(R_2+R_3)(1-\omega^2 LC) + (j\omega C R_1)(R_2+R_3) + (R_1)(1-\omega^2 LC)}{(1-\omega^2 LC)(R_2+R_3)}} \right)$$
$$= \underline{U}_0 \left(\frac{R_2 + R_3 \omega^2 LC}{(R_2 + R_3)(1 - \omega^2 LC) + (j\omega C R_1)(R_2 + R_3) + R_1(1 - \omega^2 LC)} \right)$$

Nun wird $\omega^2 LC = 1$ eingesetzt:

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_0 \cdot \left(\frac{R_2 + R_3 \cdot (1)}{(R_2 + R_3) \cdot (0) + (j\omega C R_1)(R_2 + R_3) + R_1 \cdot (0)} \right)$$
$$= \underline{U}_0 \cdot \frac{1}{j\omega C R_1}$$

Interpretation:
In diesem Betriebsfall (Serienresonanz) wird die Quelle mit der Serienschaltung von R_1 und einem Kurzschluss belastet. Daher fließt über den Widerstandszweig mit den beiden Widerständen R_2 und R_3 kein Strom. $\underline{U}_0$ fällt somit vollständig an R_1 ab. Der Gesamtstrom der sich einstellt, beträgt demnach:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{R_1}$$

Da im Zweig R_2/R_3 kein Strom fließt, ist an allen Stellen in diesem Zweig gleiches Potential vorhanden, nämlich das an den Punkten 1 & 4. Diese Punkte besitzen Bezugspotential und somit auch der Punkt 3. Die Brückenspannung $\underline{U}_{23}$ ist demnach gleich dem Spannungsabfall über dem Kondensator und ungleich Null. Die Spannung über dem Kondensator ergibt sich aus dem Produkt des (Kurzschluss-)Stromes mit der Impedanz des Kondensators:

$$\underline{U}_C = \underline{I} \frac{1}{j\omega C} = \frac{\underline{U}_0}{R_1} \cdot \frac{1}{j\omega C} \stackrel{!}{=} \underline{U}_{23}$$

c) Brückenabgleich möglich?
Die Brücke ist genau dann abgeglichen, wenn die Differenz der Spannungen $\underline{U}_{24}$ und $\underline{U}_{34}$ zu Null wird. Oder mit anderen Worten, wenn die Spannungen $\underline{U}_{24}$ und $\underline{U}_{34}$ gleich gross sind (Re{} und Im{}).
Interpretiert man die Gleichung für die Brückenspannung aus b), dann erkennt man, dass der Zähler nicht Null werden kann für alle positiven Kreisfrequenzen ω (in dem Falle, in dem Zähler Null wird, müsste auch der Nenner für die gefundene Kreisfrequenz ω überprüft werden!):

$$\begin{aligned} 0 &= \underline{U}_0 \frac{R_2 + \omega^2 LCR_3}{(R_2 + R_3)(1 - \omega^2 LC) + R_1(1 - \omega^2 LC) + j\omega R_1 C(R_2 + R_3)} \\ &= R_2 + \omega^2 LCR_3 \\ \Leftrightarrow \omega^2 &= -\frac{R_2}{LCR_3} \end{aligned}$$

Setzen wir beide Spannungen gleich, resultiert die Bedingung für den

Brückenabgleich $\underline{U}_{24}$=$\underline{U}_{34}$:

$$\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C}+j\omega L}=\frac{R_3}{R_2+R_3}$$

bzw. wenn der Kehrwert davon ausgewertet wird:

$$\begin{aligned}\frac{R_2}{R_3} &= \frac{j\omega L}{\frac{1}{j\omega C}}\\ -jR_2\frac{1}{\omega C} &= j\omega L R_3\end{aligned}$$

Da diese Produkte in unterschiedlichen Quadranten der komplexen Ebene liegen, kann für alle Kreisfrequenzen ω kein Abgleich erfolgen!

Merkregel:

Die Brücke ist abgeglichen, wenn das Produkt der „Diagonalimpedanzen“ gleich ist.

Lösung Aufgabe 4

a) Berechnen der Ersatzimpedanz:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_e &= j\omega L+\frac{R\cdot\frac{1}{i\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=j\omega L+\frac{R}{1+j\omega CR}\\ &= j\omega L+\frac{R(1-j\omega CR)}{(1+j\omega CR)(1-j\omega CR)}=j\omega L+\frac{R-j\omega CR^2}{1+(\omega CR)^2}\\ &= \frac{R}{1+(\omega CR)^2}+j\omega L-j\frac{\omega CR^2}{1+(\omega CR)^2}\end{aligned}$$

In diesem Ausdruck können der erste Term als *R‘*, der zweite als *L‘* und der dritte als *C‘* eines äquivalenten Serienschwingkreises interpretiert werden.

Die Resonanzfrequenz tritt auf für den Fall Im{$\underline{Z}_e(\omega_0)$} = 0.

$$\begin{aligned}Im\{\underline{Z}_e(\omega_0)\} &= \omega_0 L-\frac{\omega_0 CR^2}{1+(\omega_0 CR)^2}\overset{!}{=}0\\ \omega_0 L(1+\omega_0^2C^2R^2) &= \omega_0 CR^2\\ 1+\omega_0^2C^2R^2 &= \frac{CR^2}{L}\\ \omega_0^2C^2R^2 &= \frac{CR^2}{L}-1\\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{C^2R^2}}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{CR} &= \frac{\underline{Z}_{CR}}{j\omega L + \underline{Z}_{CR}} \cdot \underline{U}_0 = \frac{1}{1 + j\omega L \underline{Y}_{CR}} \underline{U}_0 \\
&= \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}} \underline{U}_0 \\
\underline{I}_R \cdot R &= \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}} \underline{U}_0 \\
\underline{I}_R &= \frac{1}{R - \omega^2 LCR + j\omega L} \underline{U}_0 \\
\underline{I}_R &= \frac{1}{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L} \underline{U}_0
\end{aligned}$$

damit $\underline{I}_R$ unabhängig von R wird:

$$\begin{aligned}
1 - \omega_1^2 LC &\overset{!}{=} 0 \\
1 &= \omega_1^2 LC \\
\omega_1^2 &= \frac{1}{LC} \\
\omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}
\end{aligned}$$

c) Zuerst die Werte für $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000\mathrm{s}^{-1}$ berechnen:

$$\hat{\underline{I}}_R = \frac{1}{jwL} \hat{\underline{U}}_0 = \frac{10\mathrm{V}}{j10\Omega} = -j1\mathrm{A}$$
$$\hat{\underline{U}}_{CR} = R \cdot \hat{\underline{I}}_R = -j10\mathrm{V}$$
$$\hat{\underline{I}}_C = j\omega C \cdot \hat{\underline{U}}_{CR} = 1\mathrm{A}$$

$$\hat{\underline{U}}_L = \hat{\underline{U}}_0 - \hat{\underline{U}}_{CR} = 10\mathrm{V} + j10\mathrm{V}$$
$$\hat{\underline{I}}_L = \frac{\hat{\underline{U}}_L}{j\omega L} = 1\mathrm{A} - j1\mathrm{A}$$

Übertragen der Werte in das Zeigerdiagramm: