Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

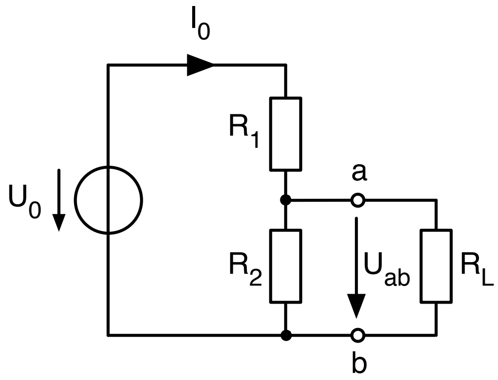
Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Tutorium Nr. 1: Netzwerkanalyse

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben benötigen Sie den Stoff der ersten vier Vorlesungen, d.h. die Kapitel 1 und 2.

Aufgabe 1

Der Spannungsteiler in der Abbildung sei gegeben. Bei Belastung nimmt die Spannung U_{ab} ab.

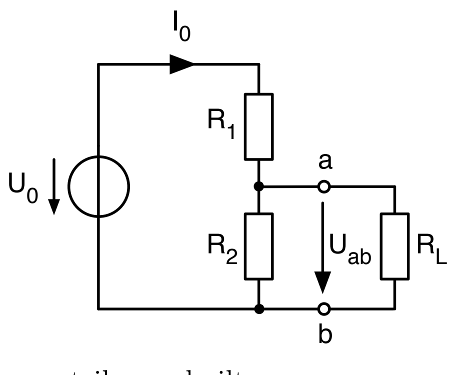


(a) Wie groß ist die Spannung U_{ab} an den Klemmen A und B, wenn der Spannungsteiler nicht belastet wird, d.h. R_L nicht angeschlossen ist? In der Gleichung dürfen nur die Widerstände R_1 und R_2 so wie die Spannungsquelle U_0 vorkommen.

(b) Nun, wird der Spannungsteiler mit R_L belastet. Berechnen Sie die neue Spannung U'_{ab} für diesen Fall. In der Gleichung dürfen nur die Widerstände und die Spannungsquelle U_0 vorkommen.

(c) Wie groß ist der Strom I_0 im belasteten Fall?

Lösung:



(a) Nach der Spannungsteilerregel gilt

$$U_{ab} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0$$

(b) Im Lastfall wird daraus

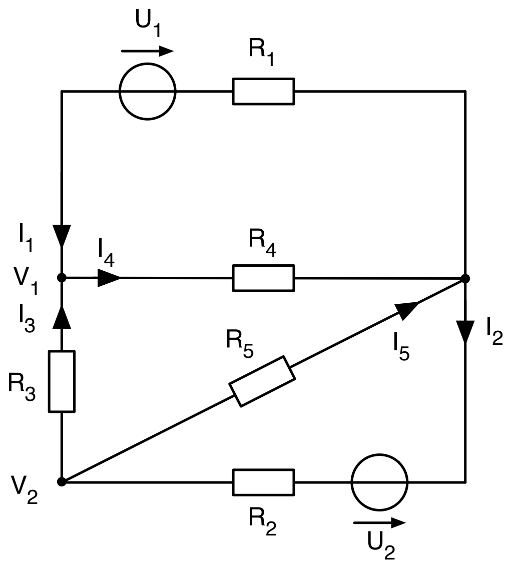
$$U'_{ab} = \frac{R_2 \| R_L}{(R_2 \| R_L) + R_1} U_0 = \frac{\frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}}{\frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} + R_1} U_0 = \frac{R_2 R_L}{R_2 R_L + R_1 (R_2 + R_L)} U_0$$

(c) Mit der Lösung aus b) kann auch der Strom I_0 bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
I_0 = \frac{U_0}{R_{ges}} &= \frac{U_0}{R_1 + (R_2 \| R_L)} = \frac{U_0}{\frac{R_1(R_2+R_L)+R_2R_L}{R_2+R_L}} \\
&= \frac{R_2 + R_L}{R_1(R_2 + R_L) + R_2R_L} U_0
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Die folgende Schaltung mit den Spannungen $U_1 = 9V$ und $U_2 = 12V$ enthält die Widerstände $R_1 = 2.4\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 3\Omega$ und $R_5 = 5\Omega$.



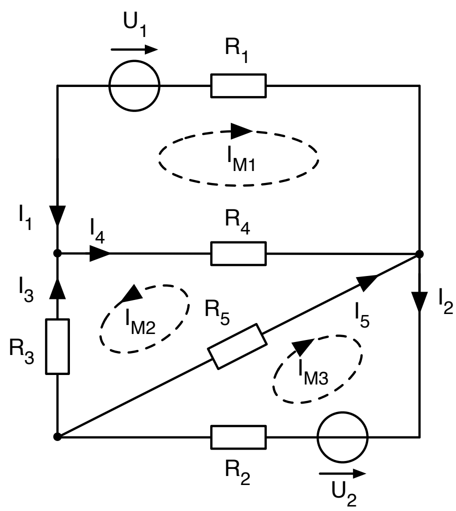
Berechnen Sie mit Hilfe

(a) des formalisierten Maschenstromverfahrens alle Teilströme.

(b) des Knotenpunktpotentialverfahrens die Potentiale V_1 und V_2 und den Strom I_3.

Lösung:

(a)



$$
\begin{aligned}
I_1 &= -I_{M1} \\
I_2 &= I_{M3} \\
I_3 &= -I_{M2} \\
I_4 &= -(I_{M1} + I_{M2}) \\
I_5 &= I_{M2} + I_{M3}
\end{aligned}
$$

Formalisiertes Maschenverfahren:

$$\begin{pmatrix} (2.4+3)\Omega & 3\Omega & 0 \\ 3\Omega & (2+3+5)\Omega & 5\Omega \\ 0 & 5\Omega & (1+5)\Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9V \\ 0 \\ 12V \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel:

$$I_{M1} = \frac{\begin{vmatrix} -9 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \\ 12 & 5 & 6 \end{vmatrix} \Omega^2 \cdot V}{\begin{vmatrix} 5.4 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \Omega^3} = \frac{[-9(60-25)+12(15)]V}{[5.4(60-25)-3(18)]\Omega} = \frac{-135V}{135\Omega} = -1A$$

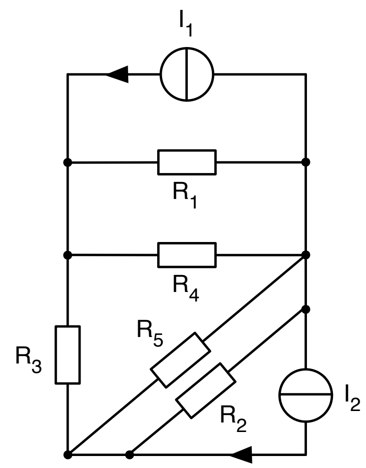
$$I_{M2} = \frac{\begin{vmatrix} 5.4 & -9 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 12 & 6 \end{vmatrix} \Omega^2 \cdot V}{\begin{vmatrix} 5.4 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \Omega^3} = \frac{[5.4(-60)-3(-54)]V}{135\Omega} = \frac{-162V}{135\Omega} = -1.2A$$

$$I_{M3} = \frac{\begin{vmatrix} 5.4 & 3 & -9 \\ 3 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 12 \end{vmatrix} \Omega^2 \cdot V}{\begin{vmatrix} 5.4 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \Omega^3} = \frac{[5.4(120)-3(36+45)]V}{135\Omega} = \frac{405V}{135\Omega} = 3A$$

Und damit:

$$\begin{aligned} I_1 &= 1A \\ I_2 &= 3A \\ I_3 &= 1.2A \\ I_4 &= 2.2A \\ I_5 &= 1.8A \end{aligned}$$

(b) Für das Knotenpunktpotentialverfahren müssen als erster Schritt alle Spannungsquellen in ihre äquivalenten Stromquellen umgewandelt werden.
Dadurch erhält man folgendes Netz:



Diese Stromquellen haben folgende Daten:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{9V}{2.4\Omega} = 9V \cdot \frac{10}{24\Omega} = \frac{30}{8}A = \frac{15}{4}A$$

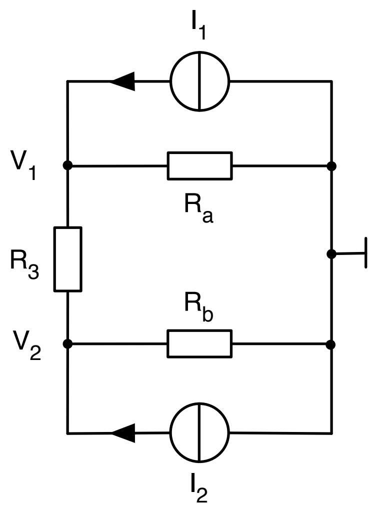
bzw.

$$I_2 = \frac{12V}{1\Omega} = 12A$$

Die Widerstände R_1 und R_4 bzw. und R_2 bzw. R_5 sind jeweils parallel und sollten zusammengefasst werden.

$$\begin{aligned} R_a &= R_1 \| R_4 = 2.4\Omega \| 3\Omega = \frac{1}{\frac{10}{24} + \frac{1}{3}}\Omega = \frac{1}{\frac{18}{24}}\Omega = \frac{24}{18}\Omega = \frac{4}{3}\Omega \\ R_b &= R_2 \| R_5 = 5\Omega \| 1\Omega = \frac{1}{\frac{1}{5} + 1}\Omega = \frac{1}{\frac{6}{5}}\Omega = \frac{5}{6}\Omega \end{aligned}$$

Somit folgt als vereinfachte Schaltung:



Die Matrixgleichung dieses Systems ist

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{6}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ 12 \end{pmatrix}$$

Erwitert man sie mit 20 und fasst die Summen zusammen, wird sie zu

$$\begin{pmatrix} 25 & -10 \\ -10 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 240 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem kann mittels der Cramerschen Regel gelöst werden. Dafür benötigt man die Determinante der linken Matrix

$$\begin{vmatrix} 25 & -10 \\ -10 & 34 \end{vmatrix} = 25 \cdot 34 - (-10) \cdot (-10) = 850 - 100 = 750$$

sowie die Determinanten der linke Matrix, nachdem erst ihre linke und dann ihre rechte Spalte mit dem Vektor auf der rechten Seite ersetzt wurden.

$$\begin{vmatrix} 75 & -10 \\ 240 & 34 \end{vmatrix} = 75 \cdot 34 - (-10) \cdot 240 = 4950$$

$$\begin{vmatrix} 25 & 75 \\ -10 & 240 \end{vmatrix} = 25 \cdot 240 - (-10) \cdot 75 = 6750$$

Nun stehen alle nötigen Werte zur Verfügung, um die gesuchten Potentiale V_1 und V_2 zu berechnen

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{4950}{750} V = 6.6V \\ V_2 &= \frac{6750}{750} V = 9V \end{aligned}$$

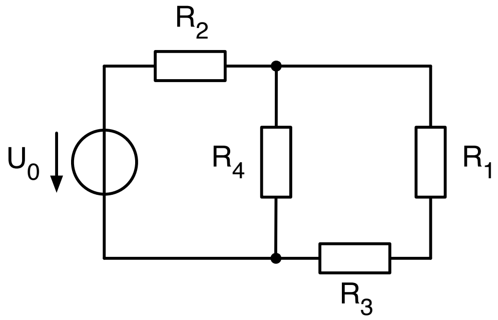
I_3 wiederum kann daraus durch

$$I_3 = (V_2 - V_1) \cdot G_3 = (V_2 - V_1) \cdot \frac{1}{R_3} = (9V - 6.6V) \cdot \frac{1}{2\Omega} = 1.2A$$

gewonnen werden.

Aufgabe 3

Gegeben sei folgende Abbildung mit $U_0 = 100V$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 30\Omega$ und $R_4 = 20\Omega$



(a) Berechnen Sie die Ströme in allen Zweigen der Schaltung aus der Abbildung (allgemeine Rechnung)

(b) Bestimmen Sie nun die Ströme als Zahlenwerte.

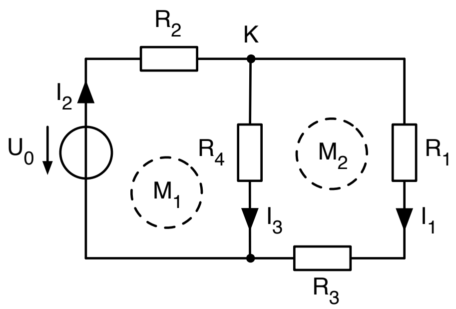
(c) Wie groß ist die in R_3 verbrauchte Leistung?

(d) Berechnen Sie die Gesamtleistung P, die die Spannungsquelle abgeben muss.

(e) Bilden Sie den Ersatzwiderstand für die Widerstände R_1 bis R_4.

Lösung:

(a)



Zur Lösung kann der folgende Ansatz verwendet werden:

Knoten K: $I_2 = I_1 + I_3$ Masche M_1: $U_0 = R_2 I_2 + R_4 I_3$ Masche M_2: $R_4 I_3 = R_1 I_1 + R_3 I_1$

Aus M_2 folgt

$$R_4 I_3 = (R_1 + R_3) I_1 \longleftrightarrow I_3 = \frac{R_1 + R_3}{R_4} I_1$$

Setzt man dies in die Knotengleichung für K ein, ergibt sich

$$I_2 = I_1 + I_3 = I_1\left(1 + \frac{R_1 + R_3}{R_4}\right) = I_1\frac{R_1 + R_3 + R_4}{R_4}$$

Durch substituieren von I_2 und I_3 in der Gleichung von M_1 erhält man

$$\begin{aligned} U_0 &= R_2\frac{R_1 + R_3 + R_4}{R_4}I_1 + R_4\frac{R_1 + R_3}{R_4}I_1 \\ &= \left(R_2\frac{R_1 + R_3 + R_4}{R_4} + R_1 + R_3\right)I_1 \end{aligned}$$

Ein Auflösen dieses Terms nach I_1 liefert schliesslich den gesuchten Strom

$$I_1 = \frac{U}{R_2\frac{R_1+R_3+R_4}{R_4} + R_1 + R_3}$$

(b) Die gesuchten Werte können durch einsetzen der gegebenen Werte für U_0 und R_1 bis R_4 berechnet werden:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{100V}{20\Omega\frac{20+10+30}{20\Omega}\Omega + 10\Omega + 30\Omega} = 1A \\ I_2 &= 1A\frac{20 + 10 + 30}{20\Omega}\Omega = 3A \\ I_3 &= \frac{10 + 30}{20\Omega}\Omega \cdot 1A = 2A \end{aligned}$$

(c) Die Leistung in R_3 ist

$$P = I_1U_3 = I_1I_1R_3 = I_1^2R_3 = (1A)^2 \cdot 30\Omega = 30W$$

(d) Die Gesamtleistung kann auf drei verschiedene Arten bestimmt werden:

- Leistungen in allen Bauteilen einzeln bestimmen und summieren
- Gesamtwiderstand für R_1 bis R_4 berechnen und mit dem Gesamtstrom die Leistung berechnen
- aus dem Produkt von Gesamtspannung und Gesamtstrom ($P_{ges} = U_0 \cdot I_2$)

Wir wählen hier den letzten Weg, d.h.

$$\begin{aligned} Pges &= U_{ges} \cdot I_{ges} = U_0 \cdot I_2 \\ &= 100V \cdot 3A = 300W \end{aligned}$$

(e) Gesamtwiderstand:

$$\begin{aligned} R_{ges} &= (R_1 + R_3)\|R_4 + R_2 \\ &= \frac{(R_1 + R_3)R_4}{R_1 + R_3 + R_4} + R_2 = \frac{(10\Omega + 30\Omega) \cdot 20\Omega}{(10 + 30 + 20)\Omega} + 20\Omega \\ &= \frac{800}{60}\Omega + 20\Omega = \frac{100}{3}\Omega \end{aligned}$$

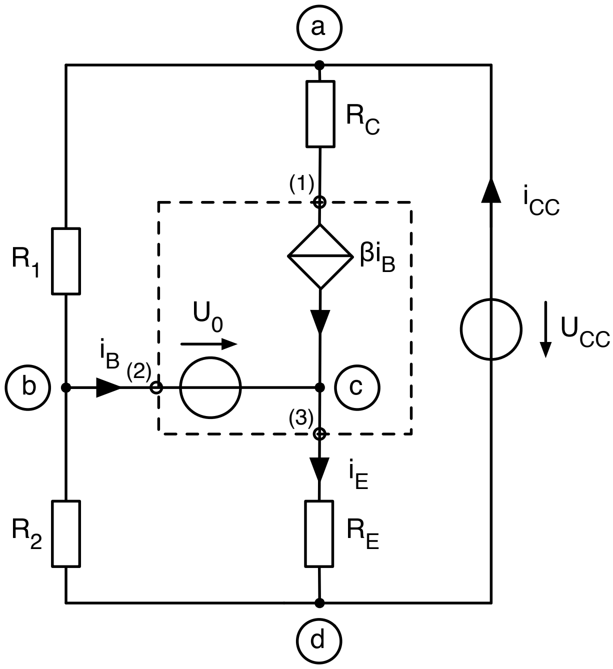
Als Kontrolle für R_{ges} kann mit dem eben berechneten Wert noch einmal die Gesamtleistung bestimmt und mit dem Wert aus d) verglichen werden.

$$\begin{aligned} P_{ges} &= U_{ges} \cdot I_2 = I_2^2 \cdot R_{ges} \\ &= 9A^2 \cdot \frac{100}{3}\Omega = 300W \end{aligned}$$

Hinweis: Wie in d) angedeutet, lässt sich die Aufgabe auch durch eine Vereinfachung des Netzwerks auf ein R_{ges} mit anschließender Berechnung von I_{ges} lösen. Anschließend können die Einzelströme I_1 und I_3 mit Hilfe eines Knotens ermittelt werden.

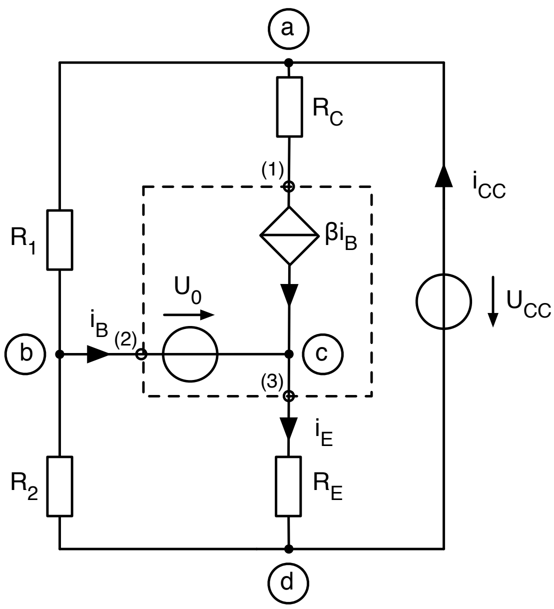
Aufgabe 4

Gegeben sei die Schaltung in der Abbildung bestehend aus 2 Spannungsquellen V_0, V_{CC}, einer stromgesteuerten Stromquelle βi_B und den Widerständen R_1, R_2, R_C, R_E. Die Strom- und Spannungsquellen zwischen den Klemmen 1 (Kollektor), 2 (Basis) und 3 (Emitter) stellen eine Modellierung eines Transistors dar. Berechnen Sie den Basisstrom i_B.



Hinweis: Betrachten Sie hierzu die Stöme in den Knoten a, b und d sowie die Maschen *bcdb* und *badb*.

Lösung:



Berechnung der einzelnen Ströme:

Knotengleichungen für a,b und d:

$$\text{a:} \quad i_{CC} - i_1 - \beta i_B = 0 \tag{1}$$

$$\text{b:} \quad i_1 - i_B - i_2 = 0 \tag{2}$$

$$\text{d:} \quad i_E + i_2 - i_{CC} = 0 \tag{3}$$

Maschengleichungen:

$$\text{bcdb:} \quad V_0 + i_E R_E = i_2 R_2 \tag{4}$$

$$\text{badb:} \quad V_{CC} = i_1 R_1 + i_2 R_2 \tag{5}$$

aus (1) folgt $i_1 = i_{CC} - \beta i_B$,
aus (2) $i_2 = i_1 - i_B = i_{CC} - \beta i_B - i_B = i_{CC} - i_B(1+\beta)$

i_1, i_2 und i_E werden in (4) und (5) eingesetzt.

$$\begin{aligned}
V_0 + i_E R_E - i_2 R_2 &= 0 \\
V_0 + i_B(1+\beta)R_E - [i_{CC} - i_B(1+\beta)]R_2 &= 0 \\
V_0 + i_B(1+\beta)R_E - i_{CC}R_2 + i_B(1+\beta)R_2 &= 0 \\
V_0 - i_{CC}R_2 + i_B(1+\beta)(R_E + R_2) &= 0 \quad \text{(a)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{CC} - i_1 R_1 - i_2 R_2 &= 0 \\
V_{CC} - (i_{CC} - \beta i_B)R_1 - [i_{CC} - i_B(1+\beta)]R_2 &= 0 \\
V_{CC} - i_{CC}R_1 + \beta i_B R_1 - i_{CC}R_2 + i_B(1+\beta)R_2 &= 0 \\
V_{CC} - i_{CC}(R_1 + R_2) + i_B(R_2 + \beta R_2 + \beta R_1) &= 0 \\
V_{CC} - i_{CC}(R_1 + R_2) + i_B[R_2 + \beta(R_1 + R_2)] &= 0 \quad \text{(b)}
\end{aligned}$$

Nun werden die Gleichungen (a) und (b) in Matrixschreibweise umgewandelt:

$$\begin{pmatrix} (1+\beta)(R_E + R_2) & -R_2 \\ R_2 + \beta(R_1 + R_2) & -R_1 - R_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_B \\ i_{CC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_0 \\ -V_{CC} \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Cramerschen Regel aus dem Skript (Kapitel 2.5) kann man nun daraus i_B berechnen.

$$\begin{aligned}
i_B &= \frac{\begin{vmatrix} -V_0 & -R_2 \\ -V_{CC} & -R1 - R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+\beta)(R_E + R_2) & -R_2 \\ R_2 + \beta(R_1 + R_2) & -R_1 - R_2 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{(-V_0)[-R_1 - R_2] - (-V_{CC})(-R_2)}{[(1+\beta)(R_E + R_2)][-R_1 - R_2] - [R_2 + \beta(R_1 + R_2)](-R_2)} \\
&= \ldots \\
&= \frac{V_{CC}R_2 - V_0(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + (1+\beta)R_E(R_1 + R_2)}
\end{aligned}$$