Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

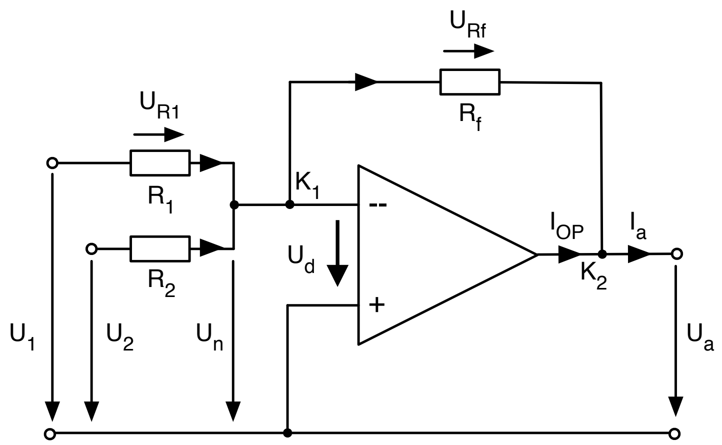
Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Tutorium Nr. 2: Operationsverstärker

Aufgabe 1

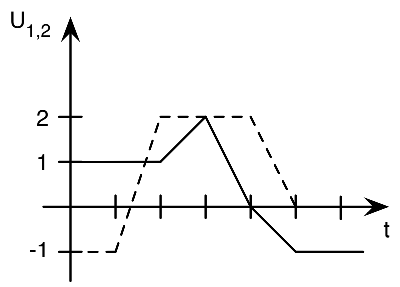
Gegeben sei folgende Operationsverstärkerschaltung aus der Abbildung. Hierbei handelt es sich um einen idealen OP.



(a) Welche Auswirkung hat die Bemerkung "idealer OP"?

(b) Welche Funktion $U_a = f(U_1, U_2)$ lässt sich mit Hilfe dieser Schaltung realisieren?
Rechnen Sie mit dem Knotenpunktpotentialverfahren.

(c) Nun sei $R_1 = R_2 = R_f$. Skizzieren Sie den Verlauf $U_a(t)$, wenn folgende Eingangsspannungen anliegen.



(d) Berechnen Sie die Funktion $U_a = f(U_1, U_2)$ mittels Maschen.

Hinweise:

- Lesen Sie die Kapitel 2.4 und 3.4
- Wie viele Maschen benötigt man?
- Stellen Sie die nötigen Maschengleichungen auf
- Sind zur Kopplung Knotengleichungen notwendig?

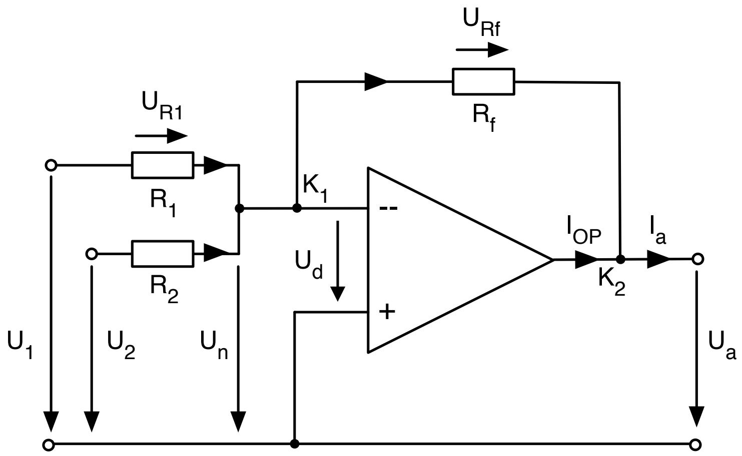
Lösung:

(a) Bei einem idealen OP sind folgende Dinge zu beachten:

- $U_d = 0$, d.h. $U_p = U_n$

- es fliesst keine Strom in den OP
- es dürfen keine Maschen durch den OP gelegt werden

(b) Hier kommt das Knotenpunktpotentialverfahren zum Einsatz.

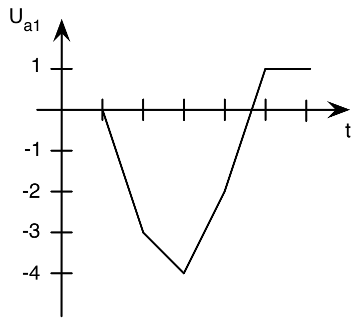


$$K_1 : (U_1 - U_n)\frac{1}{R_1} + (U_2 - U_n)\frac{1}{R_2} - (U_n - U_a)\frac{1}{R_f} = 0$$
$$K_2 : I_{OP} + (U_n - U_a)\frac{1}{R_f} - I_a = 0$$

In diesem Fall ist nur Knoten K_1 notwendig. U_n ist wegen $U_d = 0$ ebenfalls gleich Null Umstellen nach U_a liefert:

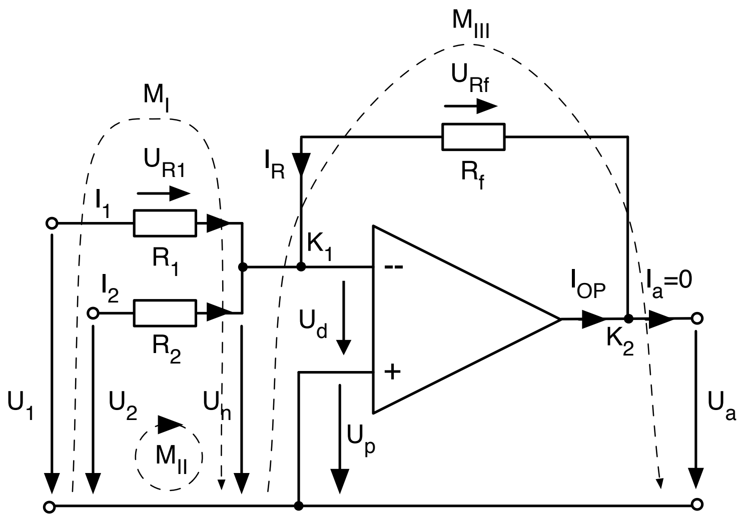
$$U_1\frac{1}{R_1} + U_2\frac{1}{R_2} + U_a\frac{1}{R_f} = 0$$
$$U_a = -R_f\left(\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}\right)$$

(c) Mit der gegebenen Bedingungen erhält man einen invertierenden Addierer:



$$R_f = R_1 = R_2$$
$$U_a = -(U_1 + U_2)$$

(d)



idealer OP: $U_n = U_p + U_d = 0$

$$\begin{aligned}
M_I : -U_1 + I_1 R_1 + U_n &= 0 \\
U_1 &= I_1 R_1 \\
M_{II} : -U_2 + I_2 R_2 + U_n &= 0 \\
U_2 &= I_2 R_2 \\
K_1 : I_1 + I_2 + I_R - I_n &= 0 \\
I_R &= -I_1 - I_2 \\
M_{III} : -U_p - U_d - I_R R_f + U_a &= 0 \\
U_a &= I_R R_f \\
K_1 \text{ in } M_{III}\text{:}\; U_a &= -R_f(I_1 + I_2) \\
U_a &= -R_f \left(\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} \right)
\end{aligned}$$

Diese Formel beschreibt einen invertierenden Addierer.

Hinwies: Maschen sind bei der Berechnung von OP-Schaltungen nicht immer vorteilhaft, da nicht unbedingt gewährleistet ist, dass die Maschen linear unabhängig sind. Besser ist dann das Knotenpunktpotentialverfahren.

Aufgabe 2

Gegeben sei die in Abb. 2a gegebene Verstärkerschaltung mit $R_1 = 5k\Omega$, $R_2 = 50k\Omega$, $R_3 = 50k\Omega$ und $R_4 = 390k\Omega$.

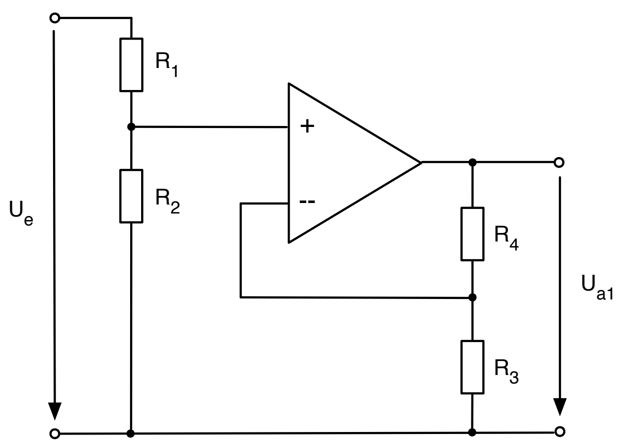


Figure 1: Abb 2.a

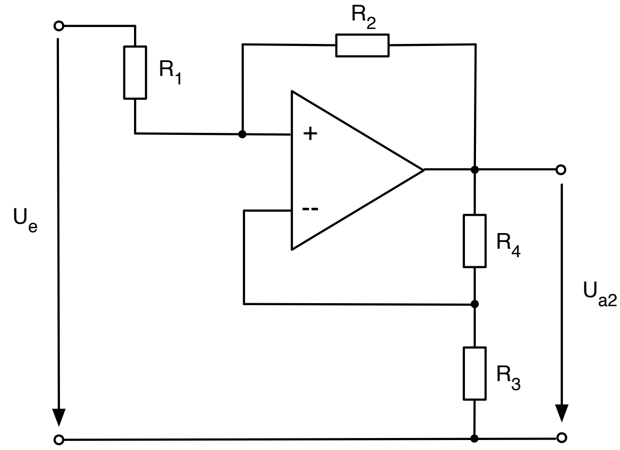


Figure 2: Abb 2.b

(a) Bestimmen Sie die Spannungsstärkung $V_{u1} = \frac{U_{a1}}{U_e}$ der Schaltung in Abb 2.a

Aufgrund eines Layoutfehlers wurde bei der Leiterplattenherstellung der Widerstand R_2 versehentlich mit dem Ausgang des OPs statt mit dem Bezugspotential verbunden.

(b) Wie groß ist der Verstärkungsfaktor $V_{u2} = \frac{U_{a2}}{U_e}$ dieser Schaltung?

(c) Wie groß muss in der Schaltung aus Abb 2.b der Widerstand R_3 gewählt werden damit $V_{u2} = V_{u1}$ [Zahlenwerte aus Aufgabenteil a)] wird?

(d) Sind dann beide Schaltungen bezüglich ihres Eingangs äquivalent?

(e) Berechnen Sie hierzu die Eingangswiderstände $R_e = \frac{U_e}{I_e}$.

Nun wird R_1 in Abb 2.b durch eine Drahtbrücke ($R_1 = 0\Omega$) ersetzt. R_2 wird nicht bestückt ($R_2 = \infty$).

(f) Wie groß muss nun R_3 gewählt werden, um die gleiche Spannungsverstärkung wie die Schaltung nach Abb. 2a zu erhalten.

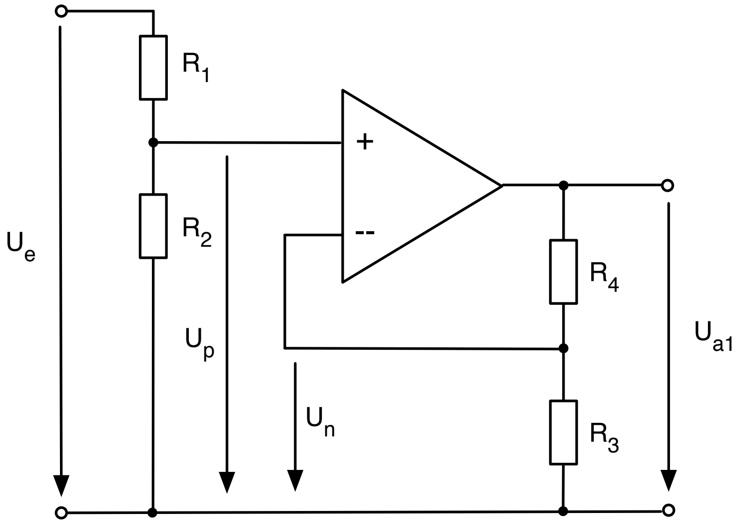
(g) Wie groß ist der Eingangswiderstand dieser Schaltung?

Hinweise:

- Lesen Sie die Kapitel 1.5, 2.4 und 3.4

Lösung:

(a)

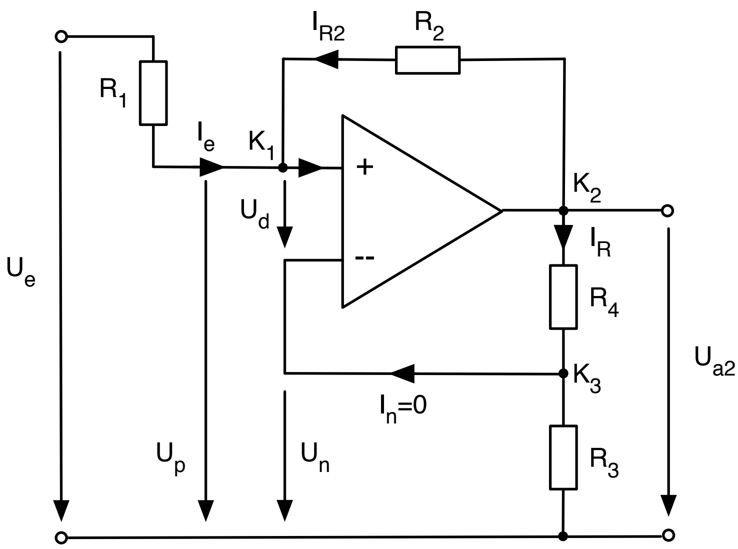


Hier können zwei Spannungsteiler verwendet werden.
Der erste schliesst die Eingangsspannung mit ein: $U_p = \frac{R_2}{R_1+R_2} U_e$,
der zweite die Ausgangsspannung: $U_n = \frac{R_3}{R_3+R_4} U_{a1}$
Da sich um einen idealen OP handelt, gilt $U_n = U_p$

Somit kann man die ersten beiden Terme gleichsetzen und erhält schließlich das gesuchte Verhältnis von Eingangs- und Ausgangsspannung.

$$\begin{aligned} U_p &= \frac{R_2}{R_1+R_2} U_e = U_n = \frac{R_3}{R_3+R_4} U_{a1} \\ V_{u1} &= \frac{U_{a1}}{U_e} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{R_3+R_4}{R_3} \\ &= \frac{50k\Omega}{55k\Omega} \cdot \frac{440k\Omega}{50k\Omega} = 8 \end{aligned}$$

(b) Für die Lösung dieses Aufgabenteils verwenden wir das Knotenpunktpotentialverfahren.



auch hier gilt wegen des idealen OPs wieder $U_n = U_p$ d.h. $U_d = 0$

$$\begin{aligned} K_1 : \frac{U_e - U_p}{R_1} + \frac{U_{a2} - U_p}{R_2} &= 0 \\ K_3 : \frac{U_{a2} - U_p}{R_4} - \frac{U_p}{R_3} &= 0 \end{aligned}$$

Die Knotengleichung für K_3 umformen:

$$\begin{aligned} (U_{a2} - U_p)R_3 - U_pR_4 &= 0 \\ -U_pR_3 - U_pR_4 &= -U_{a2}R_3 \\ U_p(-R_3 - R_4) &= -U_{a2}R_3 \\ U_p &= \frac{U_{a2}R_3}{R_3 + R_4} \end{aligned}$$

Die Knotengleichung für K_1 umformen:

$$\begin{aligned} \frac{U_e}{R_1} - \frac{U_p}{R_1} + \frac{U_{a2}}{R_2} - \frac{U_p}{R_2} &= 0 \\ \frac{U_e}{R_1} + \frac{U_{a2}}{R_2} &= U_p\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \end{aligned}$$

Hier den für U_p aus K_3 gewonnenen Ausdruck einsetzen

$$\begin{aligned} \frac{U_e}{R_1} + \frac{U_{a2}}{R_2} &= U_{a2}\frac{R_3}{R_3 + R_4}\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}\right) \\ \frac{U_e}{U_{a2}} + \frac{R_1}{R_2} &= \frac{R_1R_3}{R_3 + R_4}\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2}\right) \\ \frac{U_e}{U_{a2}} &= \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_2(R_3 + R_4)} - \frac{R_1}{R_2} \\ &= \frac{R_3(R_1 + R_2) - R_1(R_3 + R_4)}{R_2(R_3 + R_4)} \end{aligned}$$

Die gesuchte Verstärkung ist der Kehrwert des letzten Terms:

$$\begin{aligned} V_{u2} : \frac{U_{a2}}{U_e} &= \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_3(R_1 + R_2) - R_1(R_3 + R_4)} \\ &= \frac{50k\Omega(50k\Omega 390k\Omega)}{50k\Omega(5k\Omega + 50k\Omega) - 5k\Omega(50k\Omega + 390k\Omega)} \\ &= \frac{22000k\Omega}{(2750 - 2200)k\Omega} = 40 \end{aligned}$$

(c) Die Aufgabenstellung ausgedrückt als Gleichung

$$V_{u1} = \frac{R_2(R_3' + R_4)}{R_2R_3' - R_1R_4} \stackrel{!}{=} V_{u2}$$

Auflösen nach R_3' liefert den gesuchten Wert

$$
\begin{aligned}
R_2R_3' + R_2R_4 &= V_{u1}\cdot R_2R_3' - V_{u1}\cdot R_1R_4 \\
(R_2 + V_{u1}R_1)R_4 &= (V_{u1}-1)\cdot R_2R_3' \\
R_3' &= \frac{(R_2+V_{u1}R_1)R_4}{(V_{u1}-1)R_2} \approx 100k\Omega \\
V_{u2} &= \frac{24500}{5500-2450} \approx 8
\end{aligned}
$$

(d) Vergleich der Eingangswiderstände der beiden Schaltungsvarianten:
Schaltung 1:

$$
\begin{aligned}
I_e &= \frac{U_e}{R_1+R_2} \\
R_e &= \frac{U_e}{I_e} = R_1 + R_2 = 55k\Omega
\end{aligned}
$$

Schaltung 2:

$$
I_e = \frac{U_e - U_{a2}}{R_1+R_2} \quad \text{(Aufabenteil b)}
$$

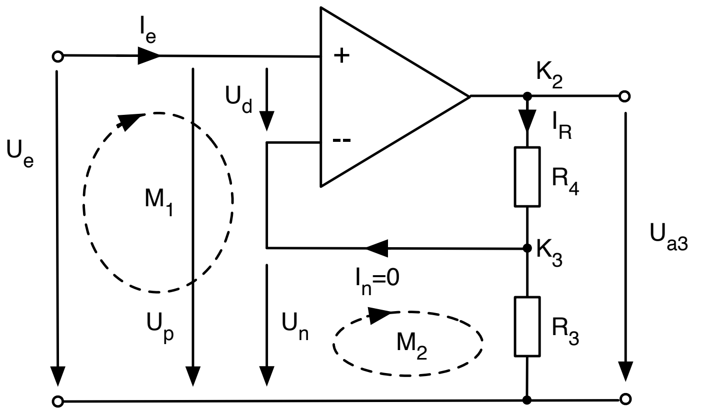
da in den OP kein Strom fließt.

$$
V_{u1} = V_{u2} = 8 \quad \text{(aus Aufgabenteil b)}
$$

$$
\begin{aligned}
I_e &= \frac{U_e - 8U_e}{R_1+R_2} \\
&= \frac{-7U_e}{R_1+R_2} \\
R_{e2} &= \frac{U_e}{I_e} = -\frac{1}{7}(R_1+R_2) \\
&\approx -7.86k\Omega
\end{aligned}
$$

Der Eingangswiderstand R_{e2} ist negativ, da bei angelegter positiver Eingangsspannung die Ausgangsspannung größer als die angelegte Spannung ist. Folglich fliesst ein Strom vom Ausgang zum Eingang der Schaltung!
Man kann durch eine geeignete Wahl R_3 die Verstärkung der zweiten Schaltung zwar korrigieren, aber nicht jedes Bauelement am Eingang des Verstärkers, "verträgt" einen zurückfließenden Strom. Deshalb soll in d) ein weiterer Versuch aufgezeigt werden, den Layoutfehler so zu korrigieren, dass die Schaltung dennoch verwendet werden kann.

(e)

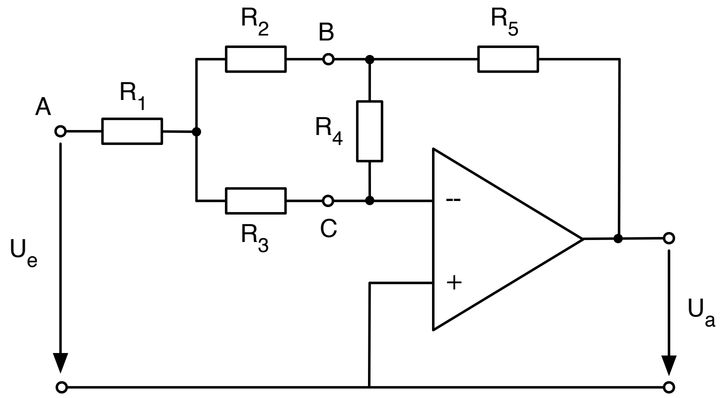


$$
\begin{aligned}
U_p &= U_n \quad \text{(idealer OP!)} \\
U_p &= U_e \\
U_n &= \frac{R_3}{R_3 + R_4} U_{a3} \\
&= U_e \\
V_{u3} &= \frac{U_{a3}}{U_e} = \frac{R_3 + R_4}{R_3} \stackrel{!}{=} V_{u1} \\
R_3 &= \frac{R_4}{V_{u1} - 1} = 55.7\Omega
\end{aligned}
$$

(f) Der Eingangswiderstand R_{e3} ist unendlich groß, da wegen $I_e = I_p = 0$ kein Strom in der Eingang der Schaltung fließt.

Aufgabe 3

Gegeben ist die unten stehende Operationsverstärkerschaltung (idealer OP!) mit den Widerständen:
$R_1 = R_2 = R_3 = 1k\Omega$, $R_4 = 6k\Omega$, $R_5 = 375\Omega$



(a) Rechnen Sie die Zweigwiderstände des Widerstandsnetzwerkes A,B,C in eine Dreieckschaltung um.

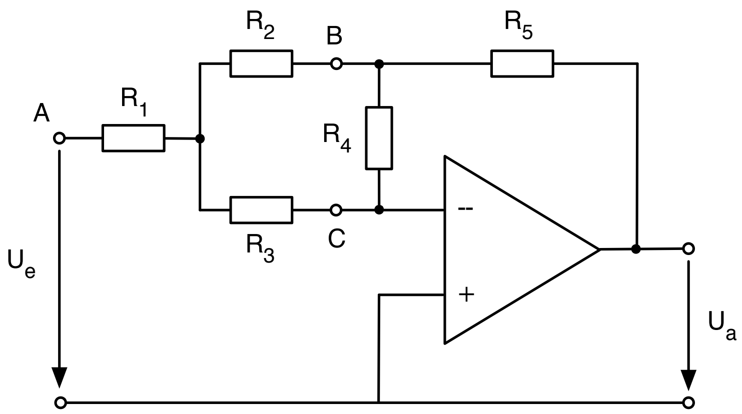
(b) Bestimmen Sie mit der sich aus a) ergebenden Ersatzschaltung die Spannungsverstärkung $V = \frac{U_a}{U_e}$

Hinweise:

- Lesen Sie die Kapitel 2.9, 3.3 und 3.4
- Verwenden Sie falls nötig das Knotenpunktpotentialverfahren

Lösung:

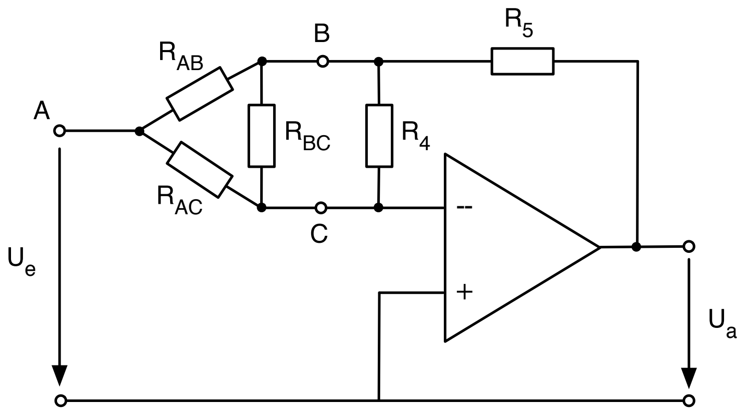
(a)



Zunächst wird das Netzwerk A,B,C in eine Dreieckschaltung umgewandelt. Aufgrund der Symmetrie ($R_1 = R_2 = R_3$) sind die Zweigwiderstände auch gleich groß ($R_{AB} = R_{AC} = R_{BC}$).

$$R_{AC} = R + R + \frac{R \cdot R}{R} = 3R = 3k\Omega$$

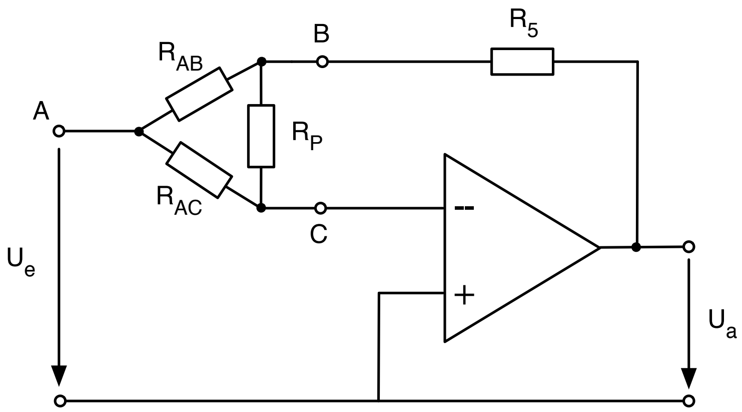
Damit ergibt sich folgendes neues Layout



Hierin lassen sich die parallelen R_{BC} und R_4 zusammenfassen.

$$\begin{aligned} R_P &= R_{BC}\|R_4 = 3k\Omega\|6k\Omega \\ &= \frac{3k\Omega \cdot 6k\Omega}{9k\Omega} = 2k\Omega \end{aligned}$$

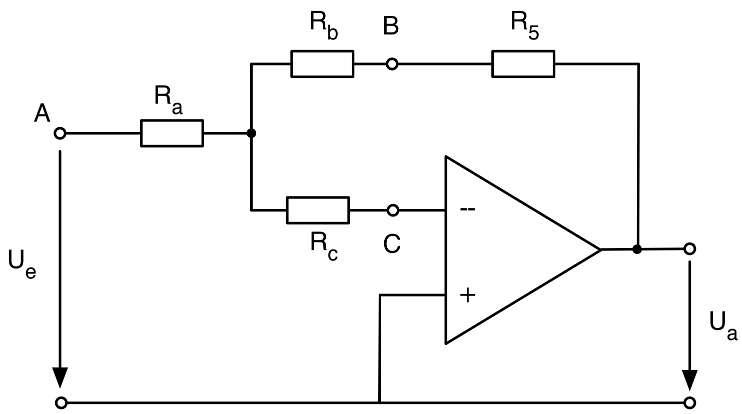
Es folgt also



Eine erneute Dreieck-Stern-Transformation

$$\begin{aligned} R_a &= \frac{R_{AB} \cdot R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_P} = \frac{3k\Omega \cdot 3k\Omega}{3k\Omega + 3k\Omega + 2k\Omega} = \frac{9000}{8}\Omega \\ R_b &= \frac{R_{AB} \cdot R_P}{R_{AB} + R_{AC} + R_P} = \frac{3k\Omega \cdot 2k\Omega}{3k\Omega + 3k\Omega + 2k\Omega} = \frac{6000}{8}\Omega \\ R_c &= R_b = \frac{6000}{8}\Omega \end{aligned}$$

Die Schaltung wird so zu



Die beiden Widerstände R_b und R_5 im Rückkopplungszweig liegen in Serie und können leicht zusammengefasst werden.

$$R_f = \frac{6k\Omega}{8} + 375\Omega = 1125\Omega$$

(b) Da der Eingangsstrom des Operationsverstärkers vernachlässigt werden kann ($I_p = 0$), fällt an R_c keine Spannung ab. Der Widerstand hat somit keine funktionelle Bedeutung für die Schaltung.
Die gesamte Verstärkung berechnet sich damit wie diejenige eines invertierenden Verstärkers:

$$V = \frac{U_a}{U_e} = -\frac{R_f}{R_a} = -\frac{1125\Omega}{\frac{9000}{8}\Omega} = -1$$