Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Tutorium Nr. 3:
komplexe Zahlen, Impedanzen, Spannungen und Ströme

Aufgabe 1

Schreiben Sie folgende mathematische Ausdrücke in der Form $x + jy$ $(x, y \in \mathbb{R})$

(a) $(5 + j3)(2 - j) - (3 + j)$

(b) $(1 - j2)^2$

(c) $\frac{5-j8}{3-j4}$

(d) $\frac{1-j}{1+j}$

(e) $\frac{1}{5-j3} - \frac{1}{5+j3}$

(f) $(3 - j2)^2$

(g) $\frac{1}{2}(1 + j)^2$

(h) $\frac{1}{2} - \frac{3-j4}{5-j8}$

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}(5 + j3)(2 - j) - (3 + j) &= 10 - j5 + j6 + 3 - 3 - j \\ &= 10\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(1 - j2)^2 &= (1 - j2)(1 - j2) = 1 - j2 - j1 - 4 \\ &= -3 - j4\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{5 - j8}{3 - j4} &= \frac{(5 - j8)(3 + j4)}{(3 - j4)(3 + j4)} = \frac{15 + j20 - j24 + 32}{9 + 12j - 12j + 16} \\ &= \frac{47 - j4}{25}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\frac{1 - j}{1 + j} &= \frac{(1 - j)(1 - j)}{(1 + j)(1 - j)} = \frac{1 - j - j - 1}{2} \\ &= -j\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}\frac{1}{5 - j3} - \frac{1}{5 + j3} &= \frac{(5 + j3) - (5 - j3)}{(5 - j3)(5 + j3)} = \frac{j6}{25 + 9} \\ &= j\frac{6}{34} = j\frac{3}{17}\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}(3 - j2)^2 &= (3 - j2)(3 - j2) = 9 - j6 - j6 - 4 \\ &= 5 - j12\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(1+j)^2 &= \frac{1}{2}(1+j)(1+j) = \frac{1}{2}(1+j+j-1)\\ &= j\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} - \frac{3-j4}{5-j8} &= \frac{1}{2} - \frac{(3-j4)(5+j8)}{(5-j8)(5+j8)} = \frac{1}{2} - \frac{15+j24-j20+32}{25+64}\\ &= \frac{1}{2} - \frac{47+j4}{89} = \frac{89-94-j8}{178} = \frac{-5-j8}{178} = -\frac{5}{178} - j\frac{4}{89}\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie jeweils den Betrag und die Phase der in Aufgabe 1 bestimmten komplexen Zahlen. Zeichnen jede dieser Zahlen zusätzlich in ein Zeigerdiagramm ein.

Lösung:

(a) Betrag: 10, Phase: 0 (rein rell!)

(b) Betrag: $|-3-j4| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$,

$$\begin{aligned}\text{Phase: } arg(-3-j4) &= -\pi + arctan\frac{4}{3} \approx -2.21_{rad}\\ &= -180 + arctan\frac{4}{3} \approx -126.87_{deg}\end{aligned}$$

(c) Betrag: $\left|\frac{47-j4}{25}\right| = \sqrt{\left(\frac{47}{25}\right)^2 + \left(\frac{4}{25}\right)^2} = \frac{1}{5}\sqrt{89} \approx 1.89$

$$\begin{aligned}\text{Phase: } arg\left(\frac{47-j4}{25}\right) &= -arctan\left(\frac{4}{47}\right) \approx -0.08_{rad}\\ &= -arctan\left(\frac{4}{47}\right) \approx -4.86_{deg}\end{aligned}$$

(d) Betrag: 1, Phase: -90° bzw. $-\frac{\pi}{2}$

(e) Betrag: $\frac{3}{17}$, Phase: 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$ (rein imaginär!)

(f) Betrag: $|5-j12| = \sqrt{5^2+12^2} = 13$,

$$\begin{aligned}\text{Phase: } arg(5-j12) &= -arctan\left(\frac{12}{5}\right) \approx -1.18_{rad}\\ &= -arctan\left(\frac{12}{5}\right) \approx -67.38_{deg}\end{aligned}$$

(g) Betrag: 1, Phase: 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$

(h) Betrag: $\left|-\frac{5}{178} - j\frac{4}{89}\right| = \sqrt{\left(\frac{5}{178}\right)^2 + \left(\frac{4}{89}\right)^2} \approx 0.05$

$$\begin{aligned}\text{Phase: } arg\left(-\frac{5}{178} - j\frac{4}{89}\right) &= -\pi + arctan\left(\frac{8}{5}\right) \approx -2.13_{rad}\\ &= -180 + arctan\left(\frac{8}{5}\right) \approx -122.0_{deg}\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Es gelte $z = 2 - j3$, berechnen Sie

(a) jz

(b) z^*

(c) $\frac{1}{z}$

(d) $(z*)^*$

Lösung:

(a) $j(2 - j3) = j2 + 3$

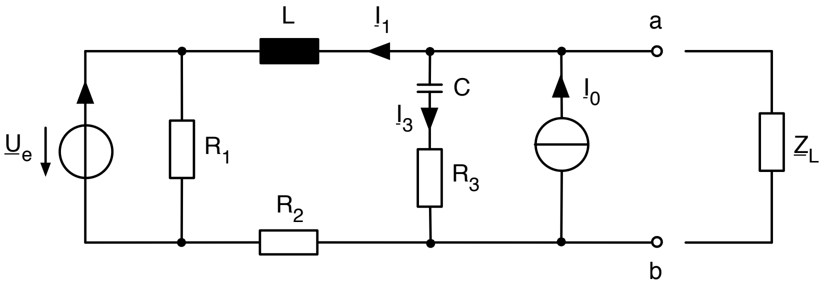
(b) $(2 - j3)^* = 2 + j3$

(c) $\frac{1}{2-j3} = \frac{2+j3}{(2-j3)(2+j3)} = \frac{2+j3}{13}$

(d) $((2 - j3)^*)^* = 2 - j3$

Aufgabe 4

Gehen Sie von folgender Schaltung aus:



(a) Berechnen Sie die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_E$ der Schaltung bezüglich der Klemmen a/b. Stellen Sie Ihr Ergebnis folgendermassen dar:

$$\underline{Z}_E = \frac{Re\{\underline{Z}_{e,Zaehler}\} + jIm\{\underline{Z}_{e,Zaehler}\}}{Re\{\underline{Z}_{e,Nenner}\} + jIm\{\underline{Z}_{e,Nenner}\}}$$

(b) Berechnen Sie die Wirkleistung P und die Blindleistung Q der Schaltung in allgemeiner Form, wenn a und b kurzgeschlossen sind.

(c) Bei sehr großer Lastimpedanz ($|\underline{Z}_L| \to \infty$) und kurzgeschlossener Spannungsquelle sollen die Ströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_3$ berechnet werden. Gegeben sind dafür folgenden Bauteilwerte:
$R_1 = R_2 = R_3 = 10\Omega$, $\omega C = 10^{-1}\Omega^{-1}$, $\omega L = 20\Omega$, $I_0 = (-5 + j5)A$

(d) Zeichnen Sie ein Zeigerdiagramm für Aufgabenteil c).

i) Tragen Sie I_1 und I_3 in dieses Diagramm ein. Verwenden Sie 1cm als Maßeinheit für 1A. Sollten Sie Teil c) nicht gelöst haben, gehen Sie von folgenden Werten aus: $\underline{I}_1 = (2 + j4)A$, $\underline{I}_3 = (-7 + j1)A$

ii) Konstruieren Sie $-I_0$.

iii) Tragen Sie $\underline{U}_C$ und $\underline{U}_L$ in das Diagramm ein. Konstruieren Sie die Zeiger mit $|\underline{U}_C| = 70.71V$ und $|\underline{U}_L| = 89.44V$. Verwenden Sie 1cm als Maßeinheit für $10V$.

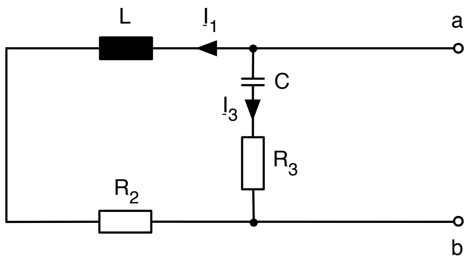
iv) Berechnen Sie die Phasendifferenz zwischen $\underline{U}_C$ und $\underline{U}_L$.

Hinweis:

- Lesen Sie Kapitel 4.

Lösung:

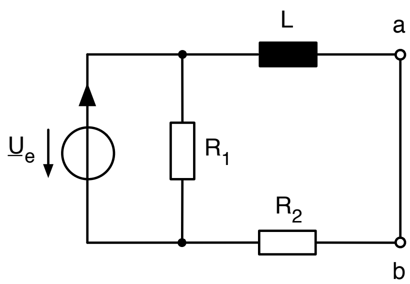
(a) Der Innenwiderstand lässt sich (fast) direkt aus dem vorliegenden Schaltbild berechnen: die Spannungsquelle wird dabei als Kurzschluss und die Stromquelle als Unterbrechung aufgefasst. Somit wird R_1 wirkungslos und entfällt. Die Schaltung vereinfacht sich zu



Der Innenwiderstand berechnet sich nun wie folgt:

$$
\begin{aligned}
(\underline{Z}_C + R_3)\|(\underline{Z}_L + R_2) &= \frac{(\underline{Z}_C + R_3)(\underline{Z}_L + R_2)}{\underline{Z}_C + R_3 + \underline{Z}_L + R_2} \\
&= \frac{\underline{Z}_C\underline{Z}_L + \underline{Z}_C R_2 + R_3\underline{Z}_L + R_3R_2}{\underline{Z}_C + R_3 + \underline{Z}_L + R_2} \\
&= \frac{\frac{1}{j\omega C}j\omega L + \frac{1}{j\omega C}R_2 + R_3 j\omega L + R_3R_2}{\frac{1}{j\omega C} + R_3 + j\omega L + R_2} \\
&= \frac{\frac{1}{j\omega C}j\omega L + \frac{1}{j\omega C}R_2 + R_3 j\omega L + R_3R_2}{\frac{1}{j\omega C} + R_3 + j\omega L + R_2} \cdot \frac{j\omega C}{j\omega C} \\
&= \frac{j\omega L + R_2 + j\omega C R_3 j\omega L + j\omega C R_3 R_2}{1 + j\omega C R_3 + j\omega C j\omega L + j\omega C R_2} \\
&= \frac{R_2 - \omega^2 LCR_3 + j\omega L + j\omega C R_3 R_2}{1 - \omega^2 LC + j\omega C(R_3 + R_2)} \\
&= \frac{R_2 - \omega^2 LCR_3 + j\omega(L + CR_3R_2)}{1 - \omega^2 LC + j\omega C(R_3 + R_2)}
\end{aligned}
$$

(b) Durch das Kurzschliessen von a und b vereinfacht sich die Schaltung zu:

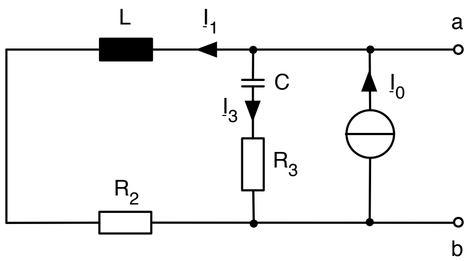


Die Blindleistung Q und die Wirkleistung P erhalten wir als Imaginär- bzw. Realteil der Scheinleistung $\underline{S}$. $\underline{S}$ wiederum lässt sich über den Zusammenhang $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{U}\underline{U}^*\underline{Y}^* = U^2\underline{Y}^*$ berechnen.

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= R_1 \| (\underline{Z}_L + R_2) \\
&= \frac{R_1(\underline{Z}_L + R_2)}{R_1 + \underline{Z}_L + R_2} = \frac{R_1 j\omega L + R_1 R_2}{R_1 + j\omega L + R_2} \\
&= \frac{R_1 R_2 + j\omega L R_1}{R_1 + R_2 + j\omega L} \\
\underline{Y} &= \frac{R_1 + R_2 + j\omega L}{R_1 R_2 + j\omega L R_1} \\
&= \frac{(R_1 + R_2 + j\omega L)(R_1 R_2 - j\omega L R_1)}{(R_1 R_2 + j\omega L R_1)(R_1 R_2 - j\omega L R_1)} \\
&= \frac{R_1^2 R_2 - j\omega L R_1^2 + R_1 R_2^2 - j\omega L R_1 R_2 + j\omega L R_1 R_2 + \omega^2 L^2 R_1}{(R_1 R_2)^2 + (\omega L R_1)^2} \\
&= \frac{R_1^2 R_2 + R_1 R_2^2 + \omega^2 L^2 R_1 - j\omega L R_1^2}{(R_1 R_2)^2 + (\omega L R_1)^2} \\
\underline{Y}^* &= \frac{R_1^2 R_2 + R_1 R_2^2 + \omega^2 L^2 R_1 + j\omega L R_1^2}{(R_1 R_2)^2 + (\omega L R_1)^2} \\
\underline{S} &= \frac{R_1^2 R_2 + R_1 R_2^2 + \omega^2 L^2 R_1 + j\omega L R_1^2}{(R_1 R_2)^2 + (\omega L R_1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P = Re\{\underline{S}\} &= \frac{R_1^2 R_2 + R_1 R_2^2 + \omega^2 L^2 R_1}{(R_1 R_2)^2 + (\omega L R_1)^2} U_e^2 \\
Q = Im\{\underline{S}\} &= \frac{\omega L R_1^2}{(R_1 R_2)^2 + (\omega L R_1)^2} U_e^2
\end{aligned}$$

(c) Auch hier entfällt durch die kurzgeschlossene Spannungsquelle wieder R_1:



Die beiden Ströme kann man beispielsweise über die Stromteilerregel (Formel 1.23 im Skript) bestimmen:

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_0} = \frac{\underline{Y}_a}{\underline{Y}_{ges}} \text{ mit } \underline{Y}_a = \frac{1}{j\omega L + R_2} \text{ und}$$

$$\text{bzw. } \frac{\underline{I}_3}{\underline{I}_0} = \frac{\underline{Y}_b}{\underline{Y}_{ges}} \text{ mit } \underline{Y}_b = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + R_3} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega C R_3}$$

$\underline{Y}_{ges}$ ist dabei der Kehrwert des in a) bestimmten Innenwiderstandes.

Auflösen nach $\underline{I}_1$ bzw. $\underline{I}_3$ und einsetzen von $\underline{Y}_{ges}$ führt zu

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \frac{\underline{Y}_a}{\underline{Y}_{ges}} \underline{I}_0 \\
&= \frac{\frac{1}{j\omega L + R_2}}{\frac{1-\omega^2 LC + j\omega C(R_3+R_2)}{R_2 - \omega^2 LCR_3 + j\omega(L + CR_3R_2)}} \underline{I}_0 \\
&= \frac{R_2 - \omega^2 LCR_3 + j\omega(L + CR_3R_2)}{[1 - \omega^2 LC + j\omega C(R_3 + R_2)] \cdot (j\omega L + R_2)} \underline{I}_0 \\
&= \frac{R_2 - \omega L\omega CR_3 + j(\omega L + \omega CR_3R_2)}{[1 - \omega L\omega C + j\omega C(R_3 + R_2)] \cdot (j\omega L + R_2)} \underline{I}_0 \\
\underline{I}_3 &= \frac{\underline{Y}_b}{\underline{Y}_{ges}} \underline{I}_0 \\
&= \frac{\frac{j\omega C}{1 + j\omega CR_3}}{\frac{1-\omega^2 LC + j\omega C(R_3+R_2)}{R_2 - \omega^2 LCR_3 + j\omega(L + CR_3R_2)}} \underline{I}_0 \\
&= \frac{j\omega C[R_2 - \omega^2 LCR_3 + j\omega(L + CR_3R_2)]}{(1 + j\omega CR_3) \cdot [1 - \omega^2 LC + j\omega C(R_3 + R_2)]} \underline{I}_0 \\
&= \frac{j\omega C[R_2 - \omega L\omega CR_3 + j(\omega L + \omega CR_3R_2)]}{(1 + j\omega CR_3) \cdot [1 - \omega L\omega C + j\omega C(R_3 + R_2)]} \underline{I}_0
\end{aligned}$$

Nun können mit den Werten aus der Aufgabenstellung die gesuchten Ströme bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \frac{R_2 - \omega L\omega CR_3 + j(\omega L + \omega CR_3R_2)}{[1 - \omega L\omega C + j\omega C(R_3 + R_2)] \cdot (j\omega L + R_2)} \underline{I}_0 \\
&= \frac{10\Omega - 20\Omega 10^{-1}\Omega^{-1}10\Omega + j(\omega L + \omega CR_3R_2)}{[1 - 20\Omega 10^{-1}\Omega^{-1} + j10^{-1}\Omega^{-1}(10\Omega + 10\Omega)] \cdot (j20\Omega + 10\Omega)} \\
&\cdot\ (-5 + j5)A \\
&= \frac{10\Omega - 20\Omega + j(20\Omega + 10\Omega)}{[1 - 2 + j2](j20\Omega + 10\Omega)} (-5 + j5)A \\
&= \frac{-10\Omega + j30\Omega}{(-1 + j2)(10\Omega + j20\Omega)} (-5 + j5)A \\
&= \frac{-10\Omega + j30\Omega}{-10\Omega - j20\Omega + j20\Omega - 40\Omega} (-5 + j5)A \\
&= \frac{-10\Omega + j30\Omega}{-50\Omega} (-5 + j5)A = \left(\frac{1}{5} - j\frac{3}{5}\right)(-5 + j5)A \\
&= (-1 + j1 + j3 + 3)A = (2 + j4)A
\end{aligned}$$

analog dazu

$$
\begin{aligned}
\underline{I}_3 &= \frac{j\omega C[R_2 - \omega L\omega C R_3 + j(\omega L + \omega C R_3 R_2)]}{(1 + j\omega C R_3) \cdot [1 - \omega L\omega C + j\omega C(R_3 + R_2)]}\underline{I}_0 \\
&= \frac{j10^{-1}\Omega^{-1}[10\Omega - 20\Omega 10^{-1}\Omega^{-1}10\Omega + j(20\Omega + 10^{-1}\Omega^{-1}10\Omega 10\Omega)]}{(1 + j10^{-1}\Omega^{-1}10\Omega)[1 - 20\Omega 10^{-1}\Omega^{-1} + j10^{-1}\Omega^{-1}(10\Omega + 10\Omega)]} \\
&\cdot (-5 + j5)A \\
&= \frac{j10^{-1}\Omega^{-1}[10\Omega - 20\Omega + j30\Omega]}{(1 + j1)[1 - 2 + j2]}(-5 + j5))A \\
&= \frac{j(-1 + j3)}{(1 + j1)(-1 + j2)}(-5 + j5)A = \frac{-3 - j1}{-1 + j2 - j1 - 2}(-5 + j5)A \\
&= \frac{-3 - j1}{-3 + j1}(-5 + j5)A = ... = (-7 + j1)A
\end{aligned}
$$

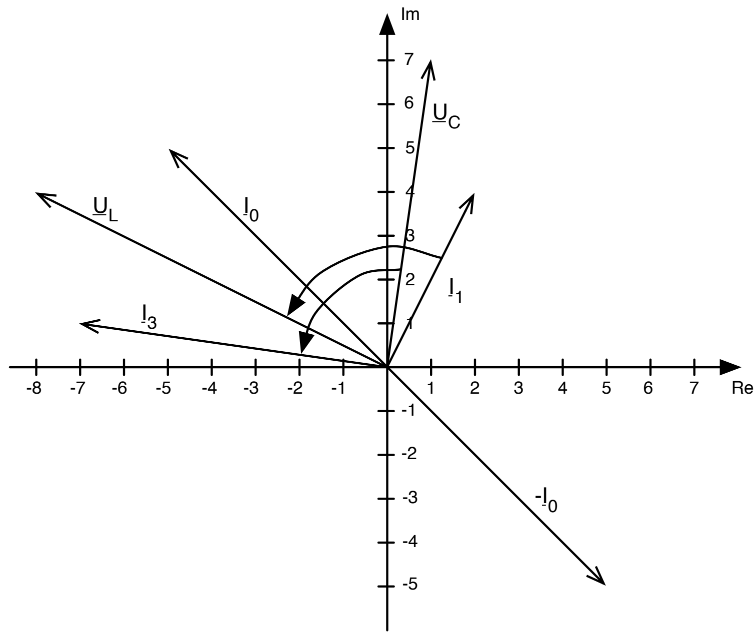
Nun noch kurz als Probe: Die Summe der beiden Ströme muss wieder $\underline{I}_0$ ergeben:

$$
\begin{aligned}
\underline{I}_0 &\overset{!}{=} \underline{I}_1 + \underline{I}_3 \\
(-5 + j5)A &= (2 + j4)A + (-7 + j1)A \\
&= (-5 + j5)A
\end{aligned}
$$

(stimmt)

(d) i)

ii)



iii) für die Konstruktion der Spannungen machen wir uns zwei Gesetzmässigkeiten zunutze:

- der Strom hinkt an der Induktivität der Spannung um 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$ hinterher ("Induktivität: Strom zu spät")
- der Strom eilt der Spannung am Kondensator um 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$ voraus ("Kondensator: Strom vor")

Wir kennen also den Winkel (relativ zu den beiden Strömen) und die Länge (aus dem Aufgabentext) der Spannungen. Das Ergebnis ist im Bild oben mit eingezeichnet.
Für $\underline{U}_L$ kann man ablesen: $(-80 + j40)$V, für $\underline{U}_C$ entsprechend: $(10 + j70)$V

iv) $arg(\underline{U}_L) = arc(-80 + j40) = \pi - arctan\left(\frac{40}{80}\right) \approx 2.68$
$arg(\underline{U}_C) = arg(10 + j70) = arctan\left(\frac{70}{10}\right) \approx 1.43$
Die Phasendifferenz beträgt somit ca. $2.68 - 1.43 = 1.25$.