Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Tutorium Nr. 4:
Schwingkreis, Zeigerdiagramme, Brückenschaltung

Aufgabe 1

Für die nachfolgenden Schaltungen Abb 1.1 - 1.3 sind folgende Zahlenwerte gegeben: $\underline{U}_0' = 1V$, $\underline{I}'' = 1Ae^{j\frac{7}{6}\pi}$, $R = 1\Omega$, $\omega L = 1\Omega$, $\omega C = 1S$

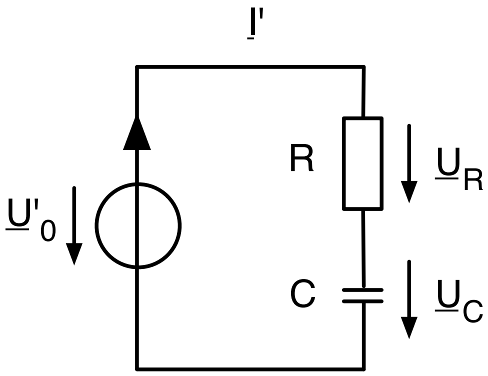


Figure 1: Abb 1.1(RC-Serienschaltung)

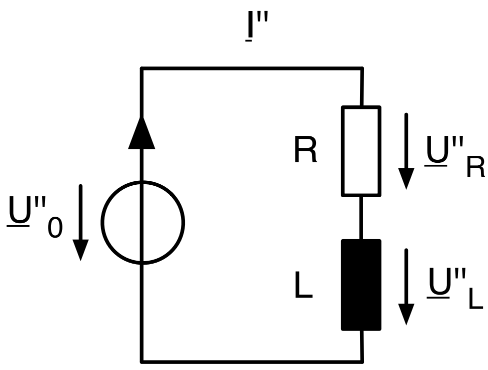


Figure 2: Abb 1.2(RL-Serienschaltung)

(a) Berechnen Sie die in Abb. 1.1 auftretenden Teilspannungen und den Strom $\underline{I}'$.

(b) Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm zu Teilaufgabe a). $(1V \rightarrow 1cm, 1A \rightarrow 1cm)$

(c) Berechnen Sie die in Abb. 1.2 auftretenden Teilspannungen $\underline{U}_R''$, $\underline{U}_L''$ und die hierfür erforderliche Quellenspannung $\underline{U}_0''$.

(d) Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm zu Teilaufgabe c).

(e) Berechnen Sie in unten stehender Schaltung (Abb. 1.3) den Gesamtstrom $\underline{I}$ für $\underline{U}_0 = \sqrt{2}Ve^{j\frac{17}{12}\pi}$. Verwenden Sie hierzu Ihre Ergebnisse aus a) und c).

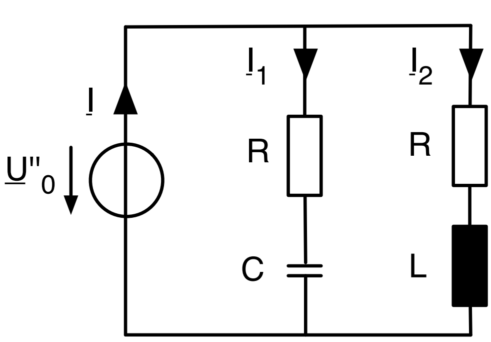


Figure 3: Abb 1.3

Hinweis:

- Lesen Sie Kapitel 4.1 - 4.7

- Was ist ein Zeigerdiagramm?
- Wie sind die Achsenbeschriftungen eines Zeigerdiagramms?

Lösung:

(a) Zuerst wird der Gesamtstrom bestimmt:

$$\underline{I}' = \frac{\underline{U}_0'}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1V}{(1-j1)\Omega} = \frac{1V(1+j1)\Omega}{(1-j1)(1+j1)\Omega} = \frac{1}{2}(1+j1)A$$

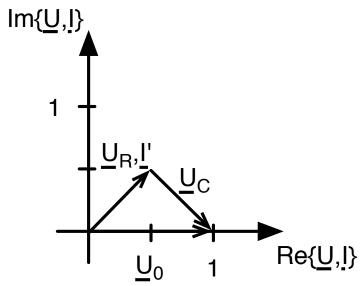
Daraus lassen sich die Teilspannungen berechnen:

$$\begin{aligned} \underline{U}_R &= \underline{I}'R = \frac{1}{2}(1+j1)A \cdot 1\Omega = \frac{1}{2}(1+j1)V \\ \underline{U}_C &= \underline{I}'\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{2}(1+j1)A \cdot (-j1)\Omega = \frac{1}{2}(1-j1)V \end{aligned}$$

Zur Kontrolle können die Einzelspannungen addiert werden:

$$\underline{U}_0' = \underline{U}_R + \underline{U}_C = \frac{1}{2}(1+j1)V + \frac{1}{2}(1-j1)V = 1V$$

(b) Zeigerdiagramm:

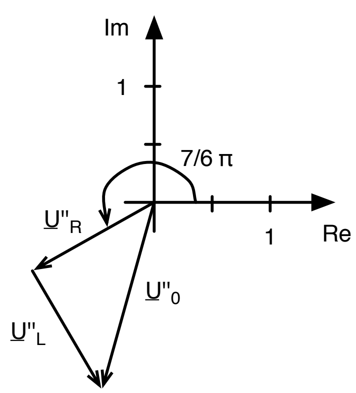


(c)

$$\begin{aligned} \underline{U}_0'' &= \underline{Z}\underline{I}'' = (R + j\omega L)\underline{I}'' \\ &= (1+J1)e^{j\frac{7}{6}\pi}V = \sqrt{2}e^{j\frac{1}{4}\pi}e^{j\frac{7}{6}\pi}V = \sqrt{2}e^{j\frac{17}{12}\pi}V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_R'' &= \underline{I}''R = 1e^{j\frac{7}{6}\pi}A \cdot 1\Omega = 1e^{j\frac{7}{6}\pi}V \\ \underline{U}_L'' &= \underline{I}''j\omega L = 1e^{j\frac{7}{6}\pi}A \cdot j1\Omega = 1e^{j\frac{7}{6}\pi}e^{j\frac{1}{2}\pi}V = 1e^{j\frac{5}{3}\pi}V \end{aligned}$$

(d)



(e) Über die Knotenregel folgt:

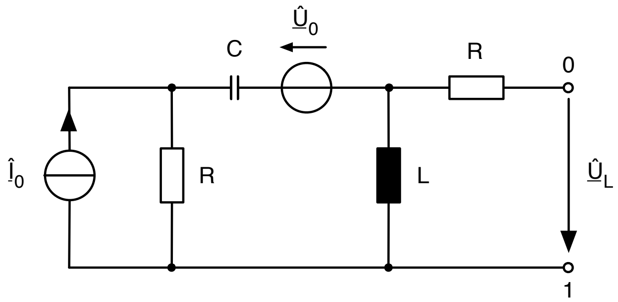
$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$$

$\underline{I}_2$ ist bereits aus Teil c) bekannt.

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_C + R} = \frac{\sqrt{2}e^{j\frac{17}{12}\pi}}{\frac{1}{j1}+1}A = \frac{\sqrt{2}e^{j\frac{17}{12}\pi}}{1-j1}A = \frac{\sqrt{2}e^{j\frac{17}{12}\pi}}{\sqrt{2}e^{-j\frac{1}{4}\pi}}A = 1e^{j\frac{5}{3}\pi}A \\
\underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 1e^{j\frac{5}{3}\pi}A + 1e^{j\frac{7}{6}\pi}A = 1(e^{j\frac{5}{3}\pi} + e^{j\frac{7}{6}\pi})A = \sqrt{2}e^{j\frac{17}{12}\pi}A
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei der folgende aktive Zwiepol mit einer Spannungsquelle der Amplitude $\underline{\hat{U}}_0 = 7V \cdot e^{j0}$ und einer Stromquelle $\underline{\hat{I}}_0 = (-30 + j40)mA$.
Bauteilwerte: $R = 100\Omega$, $C = 10nF$, $L = 200\mu H$.



Bestimmen Sie

(a) den Innenwiderstand $\underline{Z}_i$(nicht nach $Re\{\cdot\}$ und $Im\{\cdot\}$ auflösen!)

(b) die Leerlaufspannung $\underline{\hat{U}}_L$ des Zweipols bezüglich der Klemmen 0 und 1.

Es sei nun:

$$\underline{Z}_i = R + \frac{\omega^4 L^2 R C^2}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} + j\frac{\omega L + \omega^3 (LR^2C^2 - L^2C)}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}$$

(c) Bei welcher Kreisfrequenz $\omega_0 (0 < \omega_0 < \infty)$ tritt Resonanz auf?
Bestimmen Sie $\underline{Z}_i(\omega_0)$ zahlenmäßig.

(d) Geben Sie das Norton-Ersatzschaltbild an und berechnen Sie für ω_0 die Leerlaufspannung $\underline{U}_L$ und den Kurzschlussstrom $\underline{I}_k$.

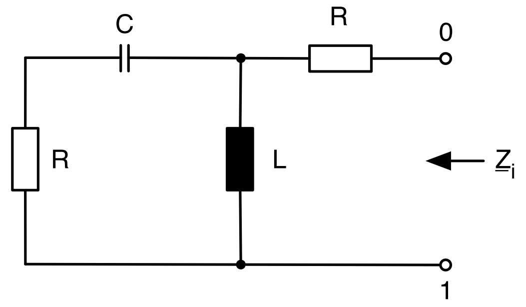
(e) Skizzieren Sie die I-U-Kennlinie des Zweipols nach d) für ω_0 bei Ohmscher Belastung.

Hinweis: Suchen Sie im Skript Antworten zu folgenden Leitfragen:

- Was sind Leerlaufspannungen und Kurzschlussstrom?
- Was ist Resonanz?
- Was ist ein Norton-Ersatzschaltbild?

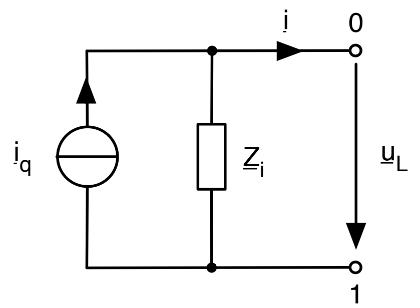
Lösung:

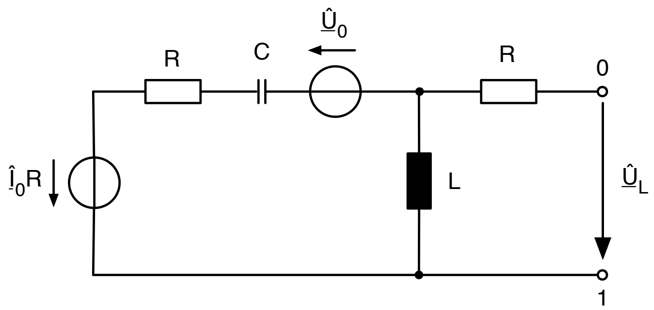
(a) Bestimmung von $\underline{Z}_i$:
- Stromquelle durch Leerlauf ersetzen
- Spannungsquelle durch Kurzschluss ersetzen

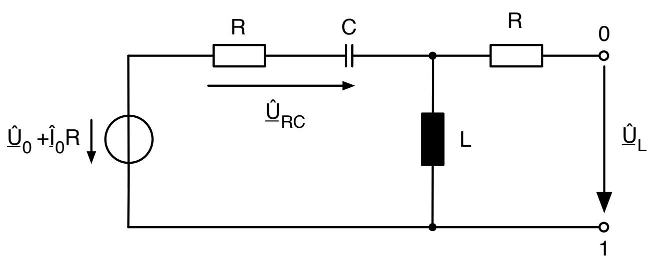


$$
\begin{aligned}
\underline{Z}_i &= R + \underline{Z}_L \| (R + \underline{Z}_C) = R + \frac{\underline{Z}_L (R + \underline{Z}_C)}{\underline{Z}_L + R + \underline{Z}_C} = R + \frac{j\omega L \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}{j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C}} \\
&= R + \frac{j\omega L(1 + j\omega RC)}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} = R + \frac{j\omega L - \omega^2 CRL}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} \\
&= R + \frac{(j\omega L - \omega^2 LRC)(1 - \omega^2 LC - j\omega RC)}{(1 - j\omega LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \\
&= R + \frac{\omega^4 L^2 RC^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \\
&+ \frac{j\omega L - \omega^2 LRC - j\omega^3 L^2 C + \omega^2 LRC + j\omega^3 LR^2 C^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \\
&= R + \frac{\omega^4 L^2 RC^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} + j\frac{\omega L + \omega^3 (LR^2 C^2 - L^2 C)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}
\end{aligned}
$$

(b) Vorgehen:
- Stomquelle in Spannungsquelle umwandeln
- Zusammenfassen von mehreren Spannungsquellen in einer Masche







Im Leerlauffall fliesst durch den rechten Widerstand R kein Strom, d.h. es fällt auch keine Spannung ab. Die Leerlaufspannung liegt somit an der Spule an.

$$\begin{aligned} \underline{Z}_L &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\ \underline{\hat{I}}_L &= \frac{\underline{\hat{U}}_0 + \underline{\hat{I}}_0 R}{\underline{Z}_L} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Spannungsteilerregel:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{\hat{U}}_L}{\underline{\hat{U}}_0 + \underline{\hat{I}}_0 R} &= \frac{j\omega L}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \\ \underline{\hat{U}}_L &= (\underline{\hat{U}}_0 + \underline{\hat{I}}_0 R)\frac{j\omega L}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= [7V + (-3 + j4)V] \cdot \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \\ &= 4 \cdot \sqrt{2} e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} V \end{aligned}$$

Die dazugehörige Zeitfunktion ist damit: $\underline{u}(t) = \underline{\hat{U}}_L \cdot e^{j\omega t}$

(c) Im Resonanzfall wird $\underline{Z}_i$ rein reell, d.h. der Imaginärteil verschwindet.

$$\begin{aligned} Im\{\underline{Z}_i\} &= 0 \\ 0 &= \frac{\omega_0 L + \omega_0^3(LR^2C^2 - L^2C)}{(1 - \omega_0^2 LC)^2 + \omega_0^2 R^2 C^2} \\ &= \omega_0 L + \omega_0^3(LR^2C^2 - L^2C) \\ &= L - \omega_0^2(L^2C - LR^2C^2) \\ \leftrightarrow \omega_0^2 &= \frac{-L}{LR^2C^2 - L^2C} = \frac{1}{LC - R^2C^2} \\ \leftrightarrow \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC - R^2C^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{-9} s^2 - 10000 \cdot 100 \cdot 10^{-18} s^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{200 \cdot 10^{-14} s^2 - 100 \cdot 10^{-14} s^2}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-12} s^2}} = 10^6 s^{-1} \end{aligned}$$

Für $\omega = \omega_0$ wird $\underline{Z}_i$ zu:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_i(\omega_0) &= R + \frac{\omega_0^4 L^2 R C^2}{(1 - \omega_0^2 LC)^2 + \omega_0^2 R^2 C^2} \\ &= 100\Omega + \frac{400}{1+1}\Omega = 300\Omega \end{aligned}$$

(d) Norton-Ersatzschaltbild: Stomquelle

$$\begin{aligned} \underline{Z}_i(\omega) &= R + \frac{j\omega L - \omega^2 LRC}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC} \\ \underline{\hat{I}}_q &= \frac{\underline{\hat{U}}_L}{\underline{Z}_i} = \frac{4\sqrt{2}V \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}{\underline{Z}_i} \cdot \frac{j\omega L}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \end{aligned}$$

Für $\omega = \omega_0$ folgt als Leerlaufspannung:

$$\begin{aligned}
\underline{\hat{U}}_L(\omega_0) &= \frac{(4+j4)j10^6 \cdot 200 \cdot 10^{-6}}{100 + j\left(10^6 \cdot 200 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-9}}\right)} V = \frac{(-1+j1)800}{100+j100} V \\
&= 8\frac{(-1+j1)(1-j1)}{2} V = 4(-1+j1+j1+1)V = j8V
\end{aligned}$$

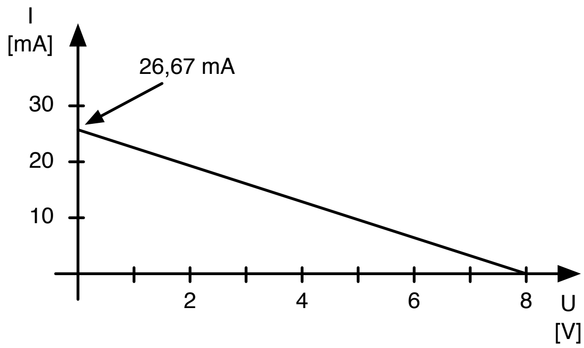
Der Kurzschlussstrom:

$$\underline{\hat{I}}_K = \frac{\underline{\hat{U}}_L(\omega_0)}{\underline{Z}_i(\omega_0)} = j\frac{8}{300}A = j\frac{2}{75}A$$

(e) I-U-Kennlinie:
Die Quelle aus c) wird mit einem Lastwiderstand R_L belastet. Dabei sind zwei Grenzwerte zu betrachten:
$R_L \to 0$(Kurzschluss) und $R_L \to \infty$(offene Klemmen)

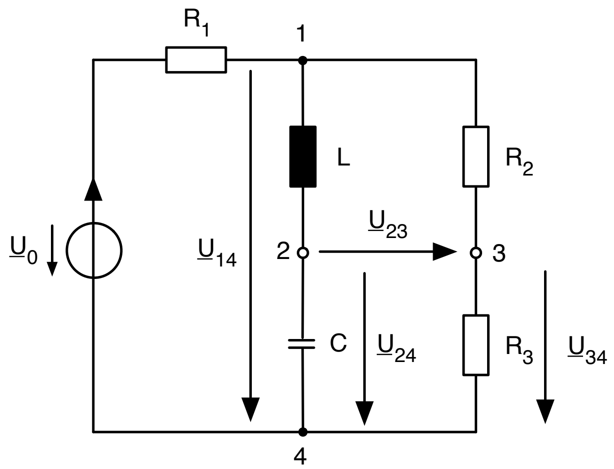
Kurzschluss:
$\underline{u} = 0$, $\underline{i} = j\frac{2}{75}A \longrightarrow |\underline{i}| = \frac{2}{75}A$

Offene Klemmen:
$\underline{i} = 0$, $\underline{u} = j8V \longrightarrow |\underline{u}| = 8V$



Aufgabe 3

Die in der Abbildung dargestellte RLC-Brückenschaltung wird an der Spannungsquelle $\underline{U}_0$ mit dem Innenwiderstand R_1 betrieben.



(a) Bestimmen Sie eine allgemeine Lösung für die Brückenspannung $\underline{U}_{23}$.

(b) Berechnen Sie diese Brückenspannung für $\omega^2 LC = 1$.

(c) Ist die Brücke abgleichbar?

Hinweis:

- Lesen Sie Kap. 6

Lösung:

(a) Berechnung der Brückenspannung $\underline{U}_{23}$:
Aus einem Maschenumlauf folgt:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{23} &= \underline{U}_{24} - \underline{U}_{34} \\
\underline{U}_{24} &= \underline{U}_{14} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} \\
\underline{U}_{34} &= \underline{U}_{14} \frac{R_3}{R_2 + R_3} \\
\underline{U}_{23} &= \underline{U}_{14} \frac{\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L} - \underline{U}_{14} \frac{R_3}{R_2 + R_3} \\
&= \underline{U}_{14} \left(\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} - \frac{R_3}{R_2 + R_3} \right)
\end{aligned}$$

Nun muss noch $\underline{U}_{14}$ durch vorgegebene Größen substituiert werden.
$\underline{U}_{14} = \underline{U}_0 - \underline{I}R_1$ mit $\underline{I} = \underline{I}_{12} + \underline{I}_{13} = \frac{\underline{U}_{14}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} + \frac{\underline{U}_{14}}{R_2 + R_3}$
Daraus folgt

$$\underline{U}_{14} = \underline{U}_0 - \underline{I}R_1 = \underline{U}_0 - R_1 \left(\frac{\underline{U}_{14}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} + \frac{\underline{U}_{14}}{R_2 + R_3} \right)$$

Auflösen nach $\underline{U}_{14}$

$$\underline{U}_{14} = \frac{\underline{U}_0}{\left(1 + \frac{R_1}{\frac{1}{j\omega C}+j\omega L} + \frac{R_1}{R_2+R_3}\right)}$$

und einsetzen liefert

$$\underline{U}_{23} = \left(\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} - \frac{R_3}{R_2 + R_3}\right) \frac{\underline{U}_0}{\left(1 + \frac{R_1}{\frac{1}{j\omega C}+j\omega L} + \frac{R_3}{R_2+R_3}\right)}$$

(b) Brückenspannung für $\omega^2 LC = 1$

Zunächst wird die Gleichung für die Brückenspannung umgeformt, so dass sich die Bedingung $\frac{1}{\omega C} = \omega L$ einsetzen lässt, ohne eine Division durch Null zu erhalten.

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{23} &= \underline{U}_0 \left(\frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} - \frac{R_3}{R_2 + R_3}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{R_1}{\frac{1}{j\omega C}+j\omega L} + \frac{R_1}{R_2+R_3}}\right) \\
&= \underline{U}_0 \left(\frac{1}{1-\omega^2 LC} - \frac{R_3}{R_2 + R_3}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{j\omega C R_1}{1-\omega^2 LC} + \frac{R_1}{R_2+R_3}}\right) \\
&= \underline{U}_0 \left(\frac{R_2 + R_3 - R_3 + R_3\omega^2 LC}{(1-\omega^2 LC)(R_2+R_3)}\right) \\
&\cdot \left(\frac{1}{\frac{(R_2+R_3)(1-\omega^2 LC)+R_1(1-\omega^2 LC)+j\omega R_1 C(R_2+R_3)}{(R_2+R_3)(1-\omega^2 LC)}}\right) \\
&= \underline{U}_0 \frac{R_2 + R_3\omega^2 LC}{(R_2+R_3)(1-\omega^2 LC) + j\omega C R_1(R_2+R_3) + R_1(1-\omega^2 LC)}
\end{aligned}$$

Nun wird $\omega^2 LC = 1$ eingesetzt:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{23} &= \underline{U}_0 \left(\frac{R_2 + R_3 \cdot (1)}{(R_2+R_3)\cdot(0) + (j\omega C R_1)(R_2+R_3) + R_1(0)}\right) \\
&= \underline{U}_0 \cdot \frac{1}{j\omega C R_1}
\end{aligned}$$

Interpretation:
In diesem Betriebsfall (Serienresonanz) wird die Quelle mit der Serienschaltung von R_1 und einem Kurzschluss belastet. Daher fliesst über den Widerstandszweig mit den beiden Widerständen R_2 und R_3 kein Strom. $\underline{U}_0$ fällt somit vollständig an R_1 ab. Der Gesamtstrom der sich einstellt, beträgt demnach:
$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{R_1}$
Da im Zweig $\frac{R_2}{R_3}$ kein Strom fließt, ist an allen Stellen in diesem Zweig gleiches Potential vorhanden, nämlich das an den Punkten 1 und 4. Diese Punkte besitzen Bezugspotential und somit auch der Punkt 3. Die Brückenspannung $\underline{U}_{23}$ ist demnach gleich dem Spannungsabfall über dem Kondensator und ungleich Null. Die Spannung über dem Kondensator ergibt sich aus dem Produkt des (Kurzschluss-)Stromes mit der Impedanz des Kondensators:
$\underline{U}_C = \underline{I}\frac{1}{\omega C} = \frac{\underline{U}_0}{R_1} \cdot \frac{1}{\omega C} \overset{!}{=} \underline{U}_{23}$

(c) Brückenabgleich möglich?
Die Brücke ist genau dann abgeglichen, wenn die Differenz der Spannungen $\underline{U}_{24}$ und $\underline{U}_{34}$ zu Null wird. Oder mit anderen Worten, wenn die Spannungen $\underline{U}_{24}$ und $\underline{U}_{34}$ gleich groß sind ($Re\{\cdot\}$ und $Im\{\cdot\}$).
Interpretiert man die Gleichung für die Brückenspannung aus b), dann erkennt man, dass der Zähler nicht Null werden kann für alle positiven Kreisfrequenzen ω (in dem Falle, in dem Zähler Null wird, müsste auch der Nenner für die gefundene Kreisfrequenz ω überprüft werden!):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\underline{U}_0(R_2 + \omega^2 LCR_3)}{(R_2+R_3)(1-\omega^2LC) + R_1(1-\omega^2LC) + j\omega R_1 C(R_2+R_3)} \\ &= R_2 + \omega^2 LCR_3 \\ \leftrightarrow \omega^2 &= -\frac{R_2}{LCR_3} \end{aligned}$$

Setzen wir beide Spannungen gleich, resultiert die Bedingung für den Brückenabgleich $\underline{U}_{24} = \underline{U}_{34}$:

$$\frac{\frac{1}{\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

bzw. wenn der Kehrwert davon ausgewertet wird:

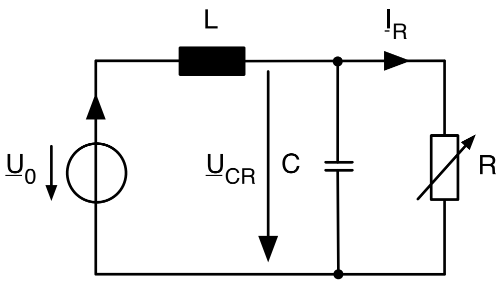
$$\begin{aligned} \frac{R_2}{R_3} &= \frac{j\omega L}{\frac{1}{j\omega C}} \\ -jR_2\frac{1}{\omega C} &= j\omega L R_3 \end{aligned}$$

Da diese Produkte in unterschiedlichen Quadranten der komplexen Ebene liegen, kann für alle Kreisfrequenzen ω kein Abgleich erfolgen!

Merkregel:
Die Brücke ist abgeglichen, wenn das Produkt der "Diagonalimpedanzen" gleich ist.

Aufgabe 4

Nachstehend abgebildete Schaltung, bestehend aus einer Induktivität L, einer Kapazität C und einem variablen Widerstand R, werde von einer idealen Spannungsquelle $\underline{u}_0 = \hat{U}_0 \cdot e^{j\omega t}$ gespeist.



(a) Verwandeln Sie die Schaltung in einen äquivalenten Serienschwingkreis und berechnen Sie dessen Resonanzfrequenz ω_0 in Abhängigkeit von R, L und C.

(b) Bei welcher Kreisfrequenz ω_1 muss die Schaltung betrieben werden, damit der durch den Widerstand fließende Strom $\underline{i_R}$ unabhängig von R ist?

(c) Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm aller auftretenden Ströme und Spannungen zum Zeitpunkt $t = 0$ für folgende Werte:
$\hat{U}_0 = 10V$, $\omega = 1000s^{-1}$, $L = 10mH$, $C = 100\mu F$, $R = 10\Omega$.
Maßstäbe: $1V \to 1cm$, $0.1A \to 1cm$

Lösung:

(a) Berechnen der Ersatzimpedanz:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_e &= j\omega L + \frac{R \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega L + \frac{R}{1 + j\omega CR} \\
&= j\omega L + \frac{R(1 - j\omega CR)}{(1 + j\omega CR)(1 - j\omega CR)} = j\omega L + \frac{R - j\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2} \\
&= \frac{R}{1 + (\omega CR)^2} + j\omega L - j\frac{\omega CR^2}{1 + (\omega CR)^2}
\end{aligned}$$

In diesem Ausdruck können der erste Term als R', der zweite als L' und der dritte als C' eines äquivalenten Serienschwingkreises interpretiert werden.

Die Resonanzfrequenz tritt auf für den Fall $Im\{\underline{Z}_e(\omega_0)\} = 0$.

$$\begin{aligned}
Im\{\underline{Z}_e(\omega_0)\} &= \omega_0 L - \frac{\omega_0 C R^2}{1+(\omega_0 C R)^2} \stackrel{!}{=} 0 \\
\omega_0 L(1+\omega_0^2 C^2 R^2) &= \omega_0 C R^2 \\
1+\omega_0^2 C^2 R^2 &= \frac{CR^2}{L} \\
\omega_0^2 C^2 R^2 &= \frac{CR^2}{L} - 1 \\
\omega_0 &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{C^2 R^2}}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\underline{U}_{CR} &= \frac{\underline{Z}_{CR}}{j\omega L + \underline{Z}_{CR}} \cdot \underline{U}_0 = \frac{1}{1 + j\omega L \underline{Y}_{CR}} \underline{U}_0 \\
&= \frac{1}{1-\omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}} \underline{U}_0 \\
\underline{I}_R \cdot R &= \frac{1}{1-\omega^2 LC + j\omega \frac{L}{R}} \underline{U}_0 \\
\underline{I}_R &= \frac{1}{R - \omega^2 LCR + j\omega L} \underline{U}_0 \\
\underline{I}_R &= \frac{1}{R(1-\omega^2 LC) + j\omega L} \underline{U}_0
\end{aligned}$$

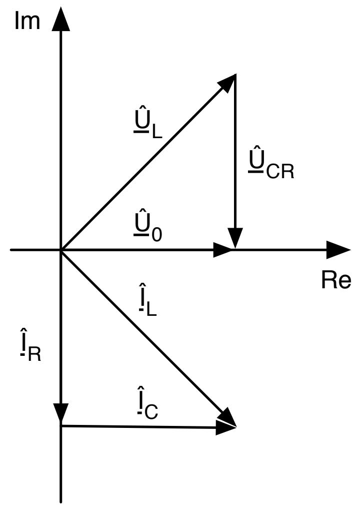
damit $\underline{I}_R$ unabhängig von R wird:

$$\begin{aligned}
1 - \omega_1^2 LC &\stackrel{!}{=} 0 \\
1 &= \omega_1^2 LC \\
\omega_1^2 &= \frac{1}{LC} \\
\omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{LC}}
\end{aligned}$$

(c) Zuerst die Werte für $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000 s^{-1}$ berechnen:

$$\begin{aligned}
\underline{\hat{I}}_R &= \frac{1}{j\omega L} \underline{\hat{U}}_0 = \frac{10V}{j10\Omega} = -j1A \\
\underline{\hat{U}}_{CR} &= R \cdot \underline{\hat{I}}_R = -j10V \\
\underline{\hat{I}}_C &= j\omega C \cdot \underline{\hat{U}}_{CR} = 1A \\
\underline{\hat{U}}_L &= \underline{\hat{U}}_0 - \underline{\hat{U}}_{CR} = (10 + j10)V \\
\underline{\hat{I}}_L &= \frac{\underline{\hat{U}}_L}{j\omega L} = (1 - j1)A
\end{aligned}$$

Übertragen der Werte in das Zeigerdiagramm:


Im
$\underline{\hat{U}}_L$
$\underline{\hat{U}}_{CR}$
$\underline{\hat{U}}_0$
Re
$\underline{\hat{I}}_L$
$\underline{\hat{I}}_R$
$\underline{\hat{I}}_C$