Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Tutorium Nr. 5:
2-Tore/Vierpole, Ortskurve

Aufgabe 1

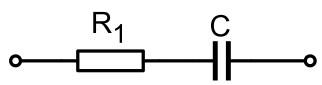


Fig. 1: Abb. 1.1

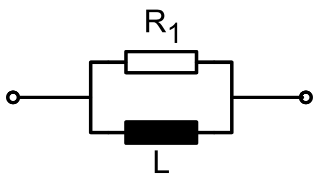


Fig. 2: Abb. 1.2

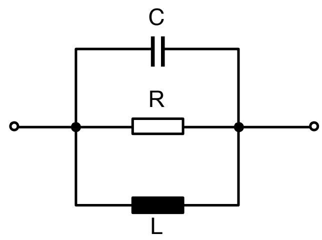


Fig. 3: Abb. 1.3

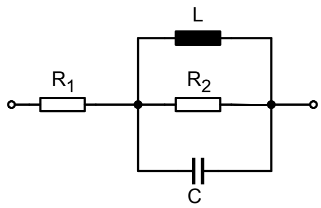


Fig. 4: Abb. 1.4

(a) Geben Sie die Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ der Abbildungen 1.1 - 1.2 mit Real- und Imaginärteil an.

(b) Geben Sie die Gesamtadmittanz $\underline{Y}$ der Abbildung 1.3 mit Real- und Imaginärteil an.

(c) Zeichnen Sie die Ortskurven von $\underline{Z}$ aus Abbildungen 1.1 und 1.2. Beschriften Sie vollständig, d.h. alle Grenzwerte von ω.

(d) Zeichnen Sie die Admittanz $\underline{Y}$ aus Abbildung 1.3. Wie erhält man graphisch die Ortskurve von $\underline{Z}$. Zeichnen Sie die Ortskurve von $\underline{Z}$. Beschriften Sie vollständig, d.h. alle Grenzwerte von ω.

(e) Wie verändert sich die Ortskurve aus Abbildung 1.3, wenn die Schaltung wie in Abbildung 1.4 erweitert wird? Zeichen Sie die Ortskurven für $\underline{Y}$ und $\underline{Z}$ für Abbildung 1.4.

Lösung:

(a) Abb. 1.1:

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{1}{j\omega C}$$

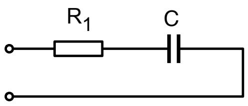
Abb. 1.2:

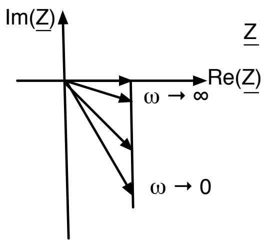
$$\underline{Z} = \frac{j\omega L R_1}{R_1 + j\omega L}$$
$$\underline{Z} = \frac{(\omega L)^2 R_1}{R_1^2 + (\omega L)^2} + j\frac{\omega L R_1^2}{R_1^2 + (\omega L)^2}$$

(b) Abb. 1.3:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R_1} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

(c) Abb. 1.1:





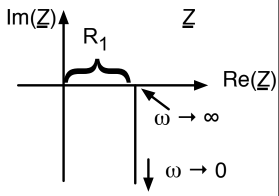
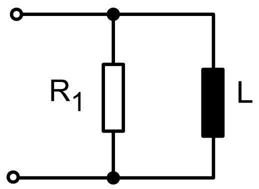
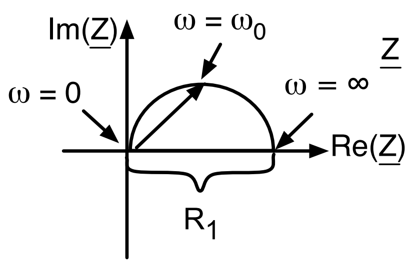
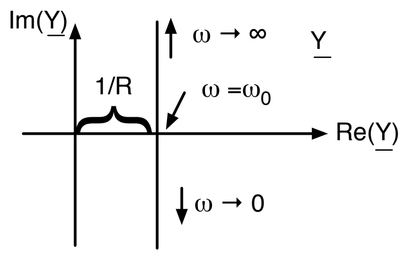


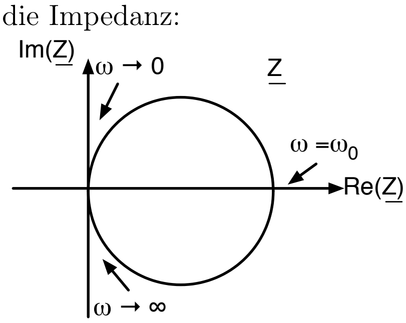
Abb. 1.2:





(d) Durch die Spiegelung der Ortskurve von der Admittanz $\underline{Y}$ am Einheitskreis erhält man die Ortskurve für die Impedanz:

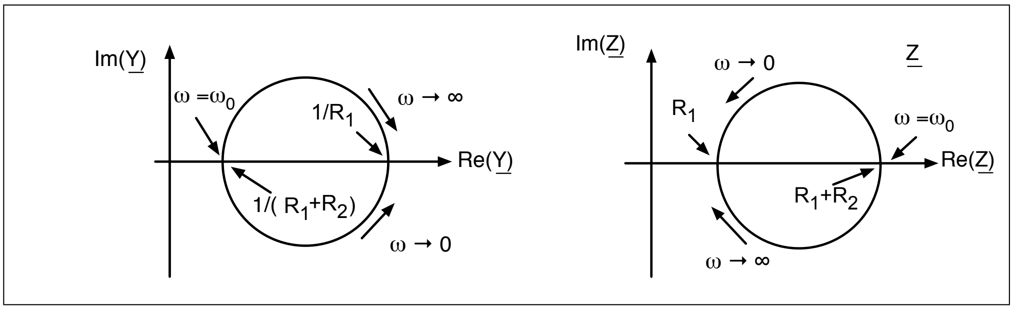




(e) Die Ortskurve von $\underline{Z}$ ist um R_1 nach Rechts verschoben.

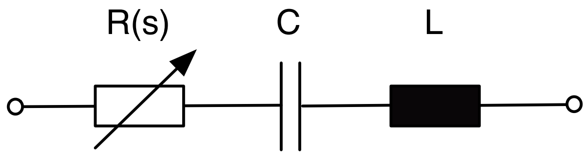
Die Ortskurve von $\underline{Y}$ ist ebenfalls ein Kreis mit Zentrum auf der X-Achse, da es sich um eine Reihenschaltung handelt.
Punkte abbilden:

	$\underline{Y}$	$\underline{Z}$
ω_0	$1/(R_1+R_2)$	R_1+R_2
$\omega \to 0$	$1/R_1$	R_1
$\omega \to \infty$	$1/R_1$	R_1


Im(Y)
ω =ω0
1/R1
ω → ∞
Re(Y)
1/(R1+R2)
ω → 0
Im(Z)
ω → 0
Z
R1
ω =ω0
Re(Z)
R1+R2
ω → ∞

Aufgabe 2

Gegeben sei die folgende Schaltung:

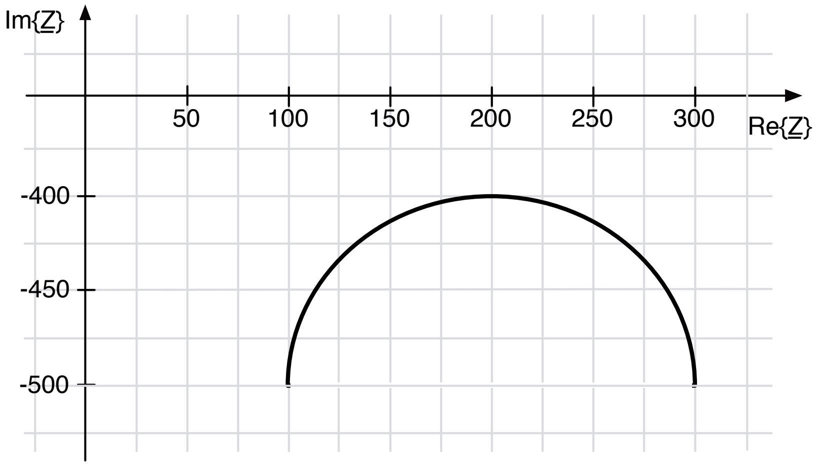


$C = 10\mu F, L = 200mH, \omega = 1000s^{-1}, R(s) = s \cdot 10\Omega$ mit s=1...10

(a) Geben Sie die Gleichung der Impedanz $\underline{Z}(S)$ der Schaltung getrennt nach Real- und Imaginärteil an.
Hinweis: Der Widerstand $R(s)$ sei variabel über die Schalterstellung s. Rechnen Sie allgemein mit $R(s)$, C und L.

(b) Zeichnen Sie die vom Widerstand $R(s)$ abhängige Ortskurve der Schaltung. Beschriften Sie die Stellen der Ortskurve für $s = 1$ und $s = 10$.

Es sei nun folgende von L abhängige Ortskurve gegeben:



(c) Leiten Sie aus der Ortskurve das Schaltbild für die Zugehörige Schaltung ab. Geben Sie eine kurze Begründung.
Hinweis: Es wurden zwei Widerstände, eine variable Spule sowie ein Kondensator verwendet. Weiterhin sei $\omega = 1000s^{-1}$. In der Ortskurve verläuft L von 0 bis ∞.

(d) Stellen Sie die Gleichung der Impedanz der Schaltung getrennt nach Real- und Imaginärteil auf. Rechnen Sie mit allgemeinen Werten.

(e) Geben Sie nun die Bauteilgrößen der Schaltung mit Ihren Einheiten an. Begründen Sie kurz.
Hinweis: Überlegen Sie wo in der Ortskurve $L \to 0$ und $L \to \infty$ liegt.

Lösung:

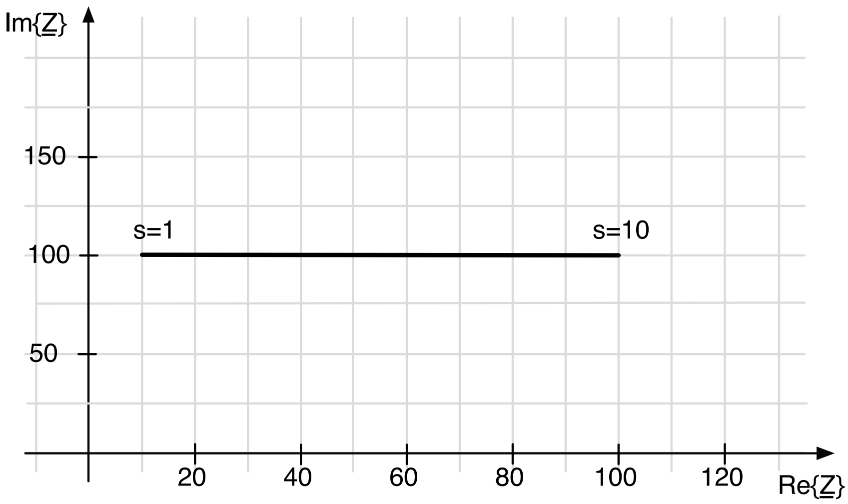
(a) Gleichung der Impedanz:

$$\begin{aligned}\underline{Z}(s) &= R(s) + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \\ \underline{Z}(s) &= R(s) + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\end{aligned}$$

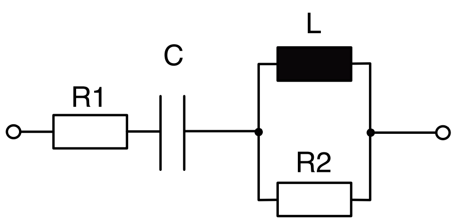
(b)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega C} &= 100\Omega \\ \omega L &= 200\Omega \\ R(s) &= s \cdot 10\Omega[s = 1...10] \\ \underline{Z}(s) &= 10\Omega \cdot s + j100\Omega\end{aligned}$$

Ortskurve $\underline{Z}(s)$:



(c) **Schaltbild:**
Aus Anfangspunkt mit negativem Imaginärteil und Realteil ungleich Null muss eine Reihenschaltung aus R und C vorliegen.
Der positiv verlaufende Halbkreis wird durch eine Parallelschaltung aus L und R hervorgerufen.



(d) Impedanz:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}(L) &= R_1 + \frac{1}{j\omega C} + \frac{R_2 \cdot j\omega L}{R_2 + j\omega L} \\
&= R_2 + \frac{1}{j\omega C} + \frac{jR_2\omega L(R_2 - j\omega L)}{(R_2 + j\omega L)(R_2 - j\omega L)} \\
&= R_1 + \frac{R_2\omega^2 L^2}{R_2^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\frac{\omega L R_2^2}{R_2^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega C}\right)
\end{aligned}$$

(e) Aus Startpunkt Halbkreis links ($L \to 0$):

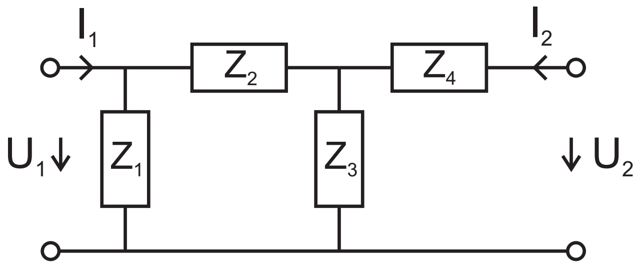
$$Re(\underline{Z}) = 100 \to R_1 = 100\Omega$$
$$Im(\underline{Z}) = -500 \to -\frac{1}{\omega C} = -500\Omega \to C = 2\mu F$$

Mit Endpunkt Halbkreis rechts ($L \to \infty$)

$$\begin{aligned}
\underline{Z}(\lim_{L\to\infty}) &= R_1 + \frac{R_2\omega^2}{\frac{R_2^2}{\infty^2} + \omega^2} + j\left(\frac{\frac{\omega R_2^2}{\infty}}{\frac{R_2^2}{\infty^2} + \omega^2}\right) \\
&= R_1 + R_2 - j\frac{1}{\omega C} \\
Re(\lim_{L\to\infty}) &= 300 \\
\Rightarrow R_2 &= 300\Omega - R_1 = 200\Omega \\
\underline{Z}(\lim_{L\to 0}) &= R_1 + \frac{R_2\omega^2 0}{R_2^2 + \omega^2 0^2} + j\left(\frac{\omega R_2^2 0}{R_2^2 + \omega^2 0^2} - \frac{1}{\omega C}\right) \\
&= R_1 - j\frac{1}{\omega C}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei folgendes 2-Tor:

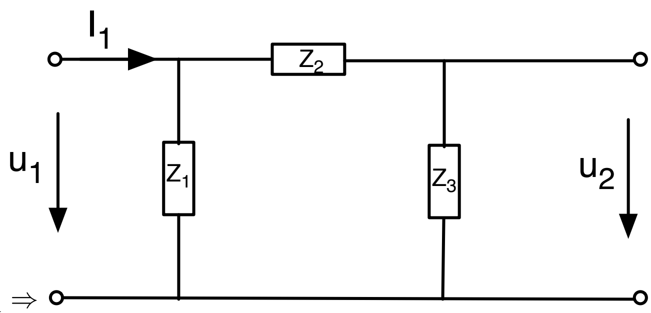


Bestimmen Sie die Z-Parameter des 2-Tors und zeichnen Sie zwei Ersatzschaltbilder (Bild 1: Z_{11}, Z_{21}; Bild 2: Z_{12}, Z_{22}) mit sämtlichen Vereinfachungen.
Im Falle, dass $Z_1 = Z_3$ und $Z_2 = Z_4$, ist dann das 2-Tor umkehrbar (reziprok)?

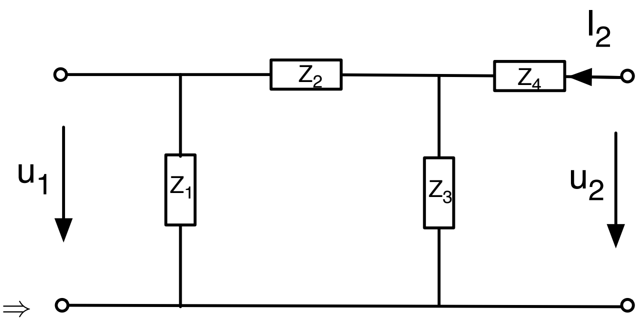
Lösung:

- $$\begin{aligned}
Z_{11} &= \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} \Rightarrow Z_{11} = \frac{Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \\
Z_{12} &= \left.\frac{U_1}{I_2}\right|_{I_1=0} \Rightarrow U_1 = I_2 \cdot \frac{Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} Z_1 \Rightarrow Z_{12} = \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \\
Z_{21} &= \left.\frac{U_2}{I_1}\right|_{I_2=0} \Rightarrow U_2 = I_1 \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3} Z_3 \Rightarrow Z_{21} = \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \\
Z_{22} &= \left.\frac{U_2}{I_2}\right|_{I_1=0} \Rightarrow Z_{22} = Z_4 + \frac{Z_3 \cdot (Z_1 + Z_2)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}
\end{aligned}$$

$Z_{11}, Z_{21} \Rightarrow$



$Z_{12}, Z_{22} \Rightarrow$

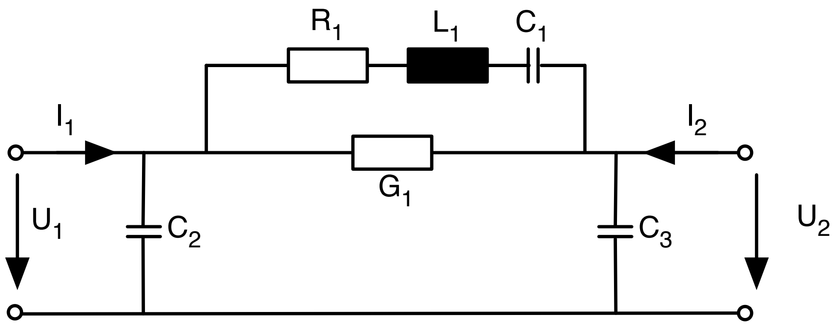


- Die Schaltung besteht aus passiven linearen Bauelementen. Deswegen ist sie umkehrbar ($Z_{12} = Z_{21}$). Dieser Fakt ist unabhängig davon, dass $Z_1 = Z_3$ und $Z_2 = Z_4$. Allerdings ist diese Schaltung nicht symmetrisch. Im Allgemeinen gilt $Z_{11} \neq Z_{22}$.

Aufgabe 4

Gegeben sei das nachfolgende Ersatzschaltbild eines Oberflächenwellenresonators.
Es gilt $C_2 = C_3$.
Die Bauteile haben die folgenden Werte:

$$R_1 = 100\Omega; L_1 = 0,3nH; C_1 = 50pF; G_1 = 0,001S; C_2 = 10pF; C_3 = C_2$$



Bestimmen Sie die Admittanzmatrix Y des Resonators in allgemeiner Form.

Lösung:

$$Y_{11} = \left.\frac{I_1}{U_1}\right|_{U_2=0}$$

$$Y_{11} = j\omega C_2 + G_1 + \frac{1}{R_1 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1}}$$

Da $C_2 = C_3$ gilt, ist die Schaltung symmetrisch. Daraus folgt: $Y_{22} = Y_{11}$

$$Y_{12} = \left.\frac{I_1}{U_2}\right|_{U_1=0}$$

$$Y_{12} = -\left(G_1 + \frac{1}{R_1 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1}}\right)$$

Da die Schaltung ausschließlich aus linearen passiven Bauteilen besteht, ist sie reziprok. Daraus folgt: $Y_{21} = Y_{12}$