

Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Tutorium Nr. 4:

Komplexe Zahlen, Impedanzen, Spannungen und Ströme

Empfohlen für das Tutorium: Aufgaben 12, 13, 14
Empfohlen für Zuhause: Aufgabe 15

Die für das Tutorium empfohlenen Aufgaben dienen als Orientierung und sollen eine grobe Richtlinie darstellen, welche Aufgaben vom Umfang und Schwierigkeitsgrad her in der Zeit des Tutoriums zu schaffen sind. Letztendlich entscheidet der Tutor, welche Aufgaben im Tutorium behandelt werden.

Zusätzlich wird empfohlen, die nicht im Tutorium behandelten Aufgaben zur weiteren Übung zu Hause zu bearbeiten.

Die Studenten sollen die Aufgaben im Tutorium selbstständig in Gruppen bearbeiten und anschließend vorrechnen.
Der Tutor soll lediglich Fragen beantworten und Unklarheiten beseitigen.

Aufgabe 12

Es gelte $\underline{z} = 2 + j2$ und $\underline{w} = \sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{8}}$.

Geben Sie folgende Ausdrücke an. Verwenden Sie keinen Taschenrechner.

- | | | |
|--|---|---|
| (a) $ \underline{z} $ | (f) $j\underline{z}$ | (k) $\underline{z}^2$ |
| (b) $\arg\{\underline{z}\}$ | (g) $\frac{\underline{z}}{j}$ | (l) $\underline{z}^{12}$ |
| (c) $\operatorname{Re}\{\underline{z}\}$ | (h) $ \underline{z}^* $ | (m) $\frac{1}{\underline{z}}$ |
| (d) $\operatorname{Im}\{\underline{z}\}$ | (i) $(\underline{z}^*)^*$ | (n) $\underline{z} \cdot \underline{w}$ |
| (e) $\underline{z}^*$ | (j) $\underline{z} \cdot \underline{z}^*$ | (o) $\frac{\underline{z}}{\underline{w}}$ |

Lösung:

$$(a) |\underline{z}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$(b) \arg\{\underline{z}\} = \arctan\left\{\frac{2}{2}\right\} = \arctan\{1\} = \frac{\pi}{4}$$

$$(c) \operatorname{Re}\{\underline{z}\} = 2$$

$$(d) \operatorname{Im}\{\underline{z}\} = 2$$

$$(e) \underline{z}^* = 2 - j2$$

$$(f) j\underline{z} = -2 + j2$$

$$(g) \frac{\underline{z}}{j} = -j\underline{z} = 2 - j2$$

$$(h) |\underline{z}^*| = |\underline{z}| = 2\sqrt{2}$$

$$(i) (\underline{z}^*)^* = \underline{z} = 2 + j2$$

$$(j) \underline{z} \cdot \underline{z}^* = |\underline{z}|^2 = 8$$

$$(k) \underline{z}^2 = \left(\sqrt{8} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^2 = (\sqrt{8})^2 \cdot e^{j\frac{\pi}{4} \cdot 2} = 8 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$(l) \underline{z}^{12} = \left(2\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^{12} = (2\sqrt{2})^{12} \cdot e^{j\frac{\pi}{4} \cdot 12} = 2^{18} \cdot e^{j \cdot 3\pi} (= 262144 \cdot e^{j \cdot 3\pi})$$

$$(m) \frac{1}{\underline{z}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

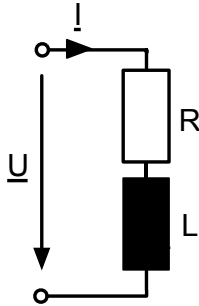
$$(n) \underline{z} \cdot \underline{w} = \left(2\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}\right) \cdot \left(\sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{8}}\right) = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right)} = 4 \cdot e^{j\frac{\pi}{8}}$$

$$(o) \frac{\underline{z}}{\underline{w}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{8}}} = 2 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right)} = 2 \cdot e^{j\frac{3\pi}{8}}$$

Aufgabe 13

Schreiben Sie die zu berechnenden Ausdrücke in der Form $x + jy$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

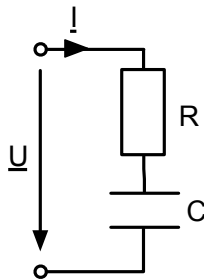
(a) Gegeben sei folgende Schaltung:



(i) Bauteilwerte: $R = 5 \Omega$, $\omega L = 10 \Omega$, $\underline{I} = (2 - j) \text{ A}$
Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}$.

(ii) Bauteilwerte: $R = 20 \Omega$, $\omega L = 10 \Omega$, $\underline{U} = (50 + j30) \text{ V}$
Berechnen Sie den Strom $\underline{I}$.

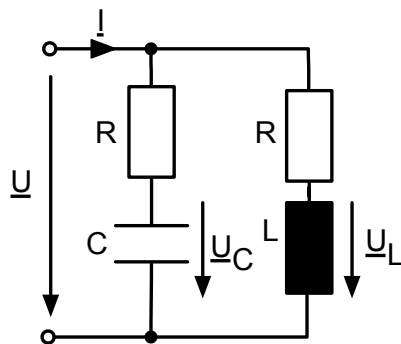
(b) Gegeben sei folgende Schaltung:



(i) Bauteilwerte: $R = 5 \Omega$, $\omega C = 0.1 \text{ S}$, $\underline{I} = (5 - j10) \text{ A}$
Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}$.

(ii) Bauteilwerte: $R = 40 \Omega$, $\omega C = 0.04 \text{ S}$,
 $\underline{U} = (50 + j80) \text{ V}$
Berechnen Sie den Strom $\underline{I}$.

(c) Gegeben sei folgende Schaltung:

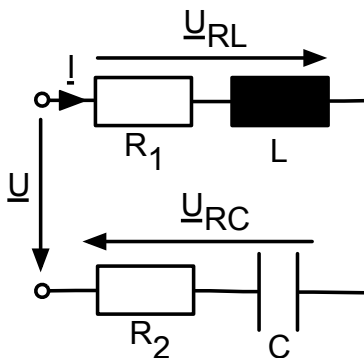


(i) Bauteilwerte: $R = 50 \Omega$, $\omega L = 30 \Omega$, $\omega C = \frac{1}{30} \text{ S}$
Berechnen Sie die Gesamtadmittanz $\frac{\underline{I}}{\underline{U}}$.

(ii) Bauteilwerte: $R = 80 \Omega$, $\omega L = 10 \Omega$, $\underline{U} = 1 \text{ V}$
Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_L$.

(iii) Bauteilwerte: $R = 20 \Omega$, $\omega C = 0.1 \text{ S}$, $\underline{U} = 1 \text{ V}$
Berechnen Sie die Spannung $\underline{U}_C$.

(d) Gegeben sei folgende Schaltung:



(i) Bauteilwerte: $R_1 = 50 \Omega$, $\omega L = 30 \Omega$,
 $\underline{I} = (0.2 - j0.1) \text{ A}$, $\underline{U}_{RC} = (3 - j) \text{ V}$
Berechnen Sie die Gesamtspannung $\underline{U}$.

(ii) Bauteilwerte: $R_2 = 100 \Omega$, $\omega C = \frac{1}{40} \text{ S}$,
 $\underline{I} = (0.2 + j0.1) \text{ A}$, $\underline{U}_{RL} = (-28 + j8) \text{ V}$
Berechnen Sie die Gesamtspannung $\underline{U}$.

Lösung:

(a) (i)

$$\begin{aligned}\underline{U} &= (R + j\omega L) \cdot \underline{I} = (5 + j10) \Omega \cdot (2 - j) \text{ A} \\ &= (10 - j5 + j20 + 10) \text{ V} = (20 + j15) \text{ V}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \frac{\underline{U}}{R + j\omega L} = \frac{(50 + j30) \text{ V}}{(20 + j10) \Omega} = \frac{(50 + j30) \cdot (20 - j10)}{(20 + j10) \cdot (20 - j10)} \text{ A} \\ &= \frac{1000 - j500 + j600 + 300}{400 + 100} \text{ A} = \frac{1300 + j100}{500} \text{ A} \\ &= \left(\frac{13}{5} + j\frac{1}{5} \right) \text{ A} = (2.6 + j0.2) \text{ A}\end{aligned}$$

(b) (i)

$$\begin{aligned}\underline{U} &= \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \cdot \underline{I} = \left(R - j\frac{1}{\omega C} \right) \cdot \underline{I} \\ &= (5 - j10) \Omega \cdot (5 - j10) \text{ A} = (25 - j50 - j50 - 100) \text{ V} \\ &= (-75 - j100) \text{ V}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \frac{\underline{U}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\underline{U}}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{(50 + j80) \text{ V}}{(40 - j25) \Omega} \\ &= \frac{(50 + j80) \cdot (40 + j25)}{(40 - j25) \cdot (40 + j25)} \text{ A} = \frac{2000 + j1250 + j3200 - 2000}{1600 + 625} \text{ A} \\ &= \frac{j4450}{2225} \text{ A} = j2 \text{ A}\end{aligned}$$

(c) (i)

$$\begin{aligned}\underline{Y} &= \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{R + j\omega L} + \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{1}{R + j\omega L} + \frac{1}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{1}{(50 + j30) \Omega} + \frac{1}{(50 - j30) \Omega} \\ &= \frac{(50 - j30) + (50 + j30)}{(50 + j30) \cdot (50 - j30)} \text{ S} = \frac{100}{2500 + 900} \text{ S} \\ &= \frac{1}{34} \text{ S} \approx 0.029 \text{ S}\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\underline{U}_L &= \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \cdot \underline{U} = \frac{j10 \Omega}{(80 + j10) \Omega} \cdot 1 \text{ V} \\ &= \frac{j10 \cdot (80 - j10)}{(80 + j10) \cdot (80 - j10)} \text{ V} = \frac{j800 + 100}{6400 + 100} \text{ V} \\ &= \left(\frac{1}{65} + j\frac{8}{65} \right) \text{ V} \approx (0.015 + j0.123) \text{ V}\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_C &= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \underline{U} = \frac{-j\frac{1}{\omega C}}{R - j\frac{1}{\omega C}} \cdot \underline{U} = \frac{-j10\Omega}{(20 - j10)\Omega} \cdot 1\text{ V} \\
 &= \frac{-j10 \cdot (20 + j10)}{(20 - j10) \cdot (20 + j10)} \text{ V} = \frac{-j200 + 100}{400 + 100} \text{ V} \\
 &= \left(\frac{1}{5} - j\frac{2}{5} \right) \text{ V} = (0.2 - j0.4) \text{ V}
 \end{aligned}$$

(d) (i)

$$\begin{aligned}
 \underline{U} &= (R_1 + j\omega L) \cdot \underline{I} + \underline{U}_{RC} \\
 &= (50 + j30)\Omega \cdot (0.2 - j0.1) \text{ A} + (3 - j) \text{ V} \\
 &= (10 - j5 + j6 + 3 + 3 - j) \text{ V} = 16 \text{ V}
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 \underline{U} &= \underline{U}_{RL} + \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right) \cdot \underline{I} = \underline{U}_{RL} + \left(R_2 - j\frac{1}{\omega C} \right) \cdot \underline{I} \\
 &= (-28 + j8) \text{ V} + (100 - j40)\Omega \cdot (0.2 + j0.1) \text{ A} \\
 &= (-28 + j8 + 20 + j10 - j8 + 4) \text{ V} = (-4 + j10) \text{ V}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 14

Berechnen Sie jeweils den Betrag und die Phase der in Aufgabe 2 bestimmten komplexen Zahlen. Zeichnen Sie jede dieser Zahlen zusätzlich in ein Zeigerdiagramm ein.

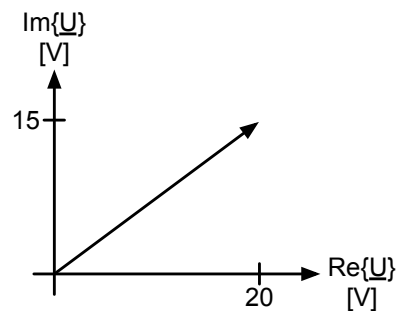
Hinweis: Die komplexen Zahlen aus Aufgabe 2 lauten:

- | | |
|--|--|
| (a) (i) $\underline{U} = (20 + j15) \text{ V}$ | (c) (i) $\underline{Y} = \frac{1}{34} \text{ S} \approx 0.029 \text{ S}$ |
| (ii) $\underline{I} = (2.6 + j0.2) \text{ A}$ | (ii) $\underline{U}_L = \left(\frac{1}{65} + j\frac{8}{65}\right) \text{ V}$
$\approx (0.015 + j0.123) \text{ V}$ |
| (b) (i) $\underline{U} = (-75 - j100) \text{ V}$ | (iii) $\underline{U}_C = (0.2 - j0.4) \text{ V}$ |
| (ii) $\underline{I} = j2 \text{ A}$ | |
| | (d) (i) $\underline{U} = 16 \text{ V}$ |
| | (ii) $\underline{U} = (-4 + j10) \text{ V}$ |

Lösung:

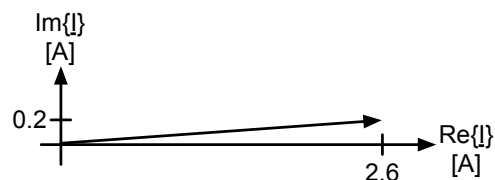
(a) (i) Betrag: $|20 + j15| \text{ V} = \sqrt{20^2 + 15^2} \text{ V} = 25 \text{ V}$

Phase: $\arg\{(20 + j15) \text{ V}\} = \arctan\left(\frac{15}{20}\right) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$
 $\approx 0.64_{\text{rad}} \approx 36.9^\circ$



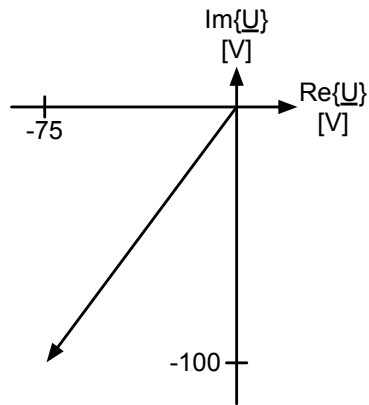
(ii) Betrag: $\left|\frac{13}{5} + j\frac{1}{5}\right| \text{ A} = \sqrt{\left(\frac{13}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} \text{ A} = \sqrt{\frac{34}{5}} \text{ A} \approx 2.61 \text{ A}$

Phase: $\arg\left\{\left(\frac{13}{5} + j\frac{1}{5}\right) \text{ A}\right\} = \arctan\left(\frac{1}{13}\right) \approx 0.08_{\text{rad}}$
 $\approx 4.4^\circ$

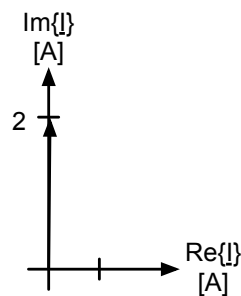


(b) (i) Betrag: $|-75 - j100| \text{ V} = \sqrt{75^2 + 100^2} \text{ V} = 125 \text{ V}$

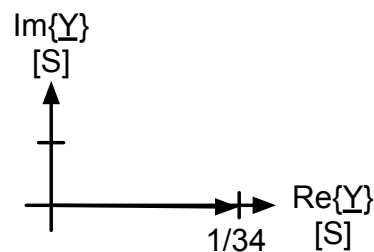
Phase: $\arg\{(-75 - j100) \text{ V}\} = \arctan\left(\frac{100}{75}\right) - \pi$
 $= \arctan\left(\frac{4}{3}\right) - \pi$
 $\approx -2.21_{\text{rad}} \approx -126.9^\circ$



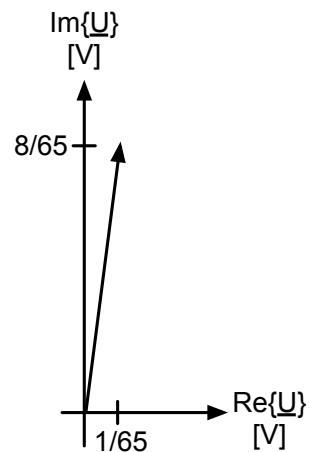
- (ii) Betrag: $|j2| \text{ A} = 2 \text{ A}$
 Phase: $\arg\{j2 \text{ A}\} = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ (rein imaginär!)



- (c) (i) Betrag: $|\frac{1}{34}| \text{ S} = \frac{1}{34} \text{ S} \approx 0.029 \text{ S}$
 Phase: $\arg\{\frac{1}{34} \text{ S}\} = 0$ (rein reell!)

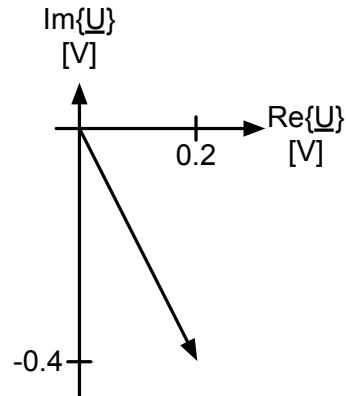


- (ii) Betrag: $|\frac{1}{65} + j\frac{8}{65}| \text{ V} = \sqrt{(\frac{1}{65})^2 + (\frac{8}{65})^2} \text{ V} = \sqrt{\frac{1}{65}} \text{ V} \approx 0.124 \text{ V}$
 Phase: $\arg\left\{\left(\frac{1}{65} + j\frac{8}{65}\right) \text{ V}\right\} = \arctan\left(\frac{8}{1}\right) = \arctan(8)$
 $\approx 1.45_{\text{rad}} \approx 82.9^\circ$

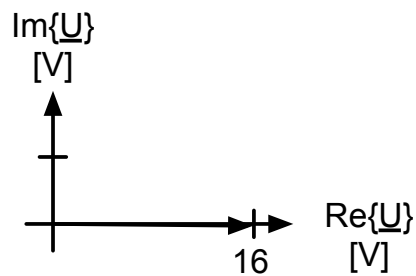


(iii) Betrag: $\left| \frac{1}{5} - j\frac{2}{5} \right| \text{ V} = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} \text{ V} = \sqrt{\frac{1}{5}} \text{ V} \approx 0.45 \text{ V}$

Phase: $\arg \left\{ \left(\frac{1}{5} - j\frac{2}{5} \right) \text{ V} \right\} = -\arctan\left(\frac{2}{1}\right) = -\arctan(2)$
 $\approx -1.11_{\text{rad}} \approx -63.4^\circ$

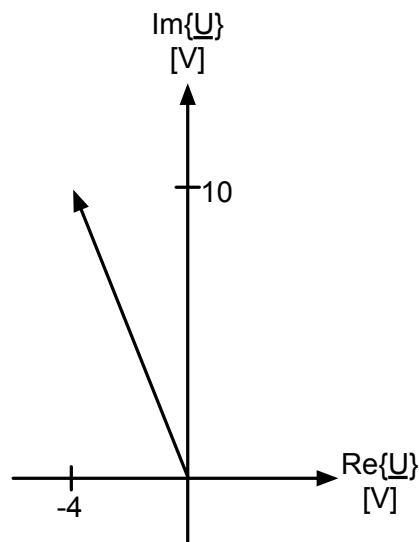


(d) (i) Betrag: $|16| \text{ V} = 16 \text{ V}$
 Phase: $\arg\{16 \text{ V}\} = 0$ (rein reell!)



(ii) Betrag: $|-4 + j10| \text{ V} = \sqrt{4^2 + 10^2} \text{ V} = 2\sqrt{29} \text{ V} \approx 10.77 \text{ V}$

Phase: $\arg\{(-4 + j10) \text{ V}\} = \pi - \arctan\left(\frac{10}{4}\right)$
 $= \pi - \arctan\left(\frac{5}{2}\right)$
 $\approx 1.95_{\text{rad}} \approx 111.8^\circ$



Aufgabe 15

Gegeben sind folgende Schaltungen (Abb. 1.1–1.3) mit den Bauteilwerten $\underline{U}'_0 = 1 \text{ V}$, $\underline{I}'' = 1 \text{ A} \cdot e^{j\frac{7}{6}\pi}$, $R = 1 \Omega$, $\omega L = 1 \Omega$, $\omega C = 1 \text{ S}$.

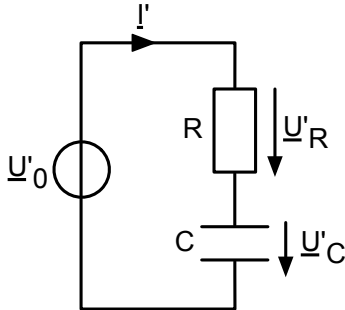


Abb. 1.1: RC-Serienschaltung

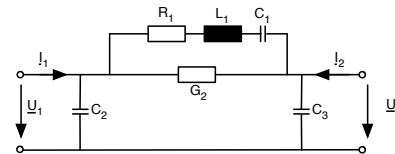


Abb. 1.2: RL-Serienschaltung

- Berechnen Sie die in Abb. 1.1 auftretenden Teilspannungen $\underline{U}'_R$, $\underline{U}'_C$ und den Strom $\underline{I}'$.
- Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm zu Teilaufgabe a) ($\underline{U}'_R$, $\underline{U}'_C$, $\underline{U}'_0$, $\underline{I}'$) (Maßstäbe: $1 \text{ V} \rightarrow 4 \text{ cm}$, $1 \text{ A} \rightarrow 4 \text{ cm}$).
- Berechnen Sie die in Abb. 1.2 auftretenden Teilspannungen $\underline{U}''_R$, $\underline{U}''_L$ und die hierfür erforderliche Quellspannung $\underline{U}''_0$.
- Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm zu Teilaufgabe c) ($\underline{U}''_R$, $\underline{U}''_L$, $\underline{U}''_0$, $\underline{I}''$) (Maßstäbe: $1 \text{ V} \rightarrow 4 \text{ cm}$, $1 \text{ A} \rightarrow 4 \text{ cm}$).
- Berechnen Sie in unten stehender Schaltung (Abb. 1.3) den Gesamtstrom $\underline{I}$ für $\underline{U}_0 = \sqrt{2} \text{ V} \cdot e^{j\frac{17}{12}\pi}$. Verwenden Sie hierzu Ihre Ergebnisse aus a) und c).

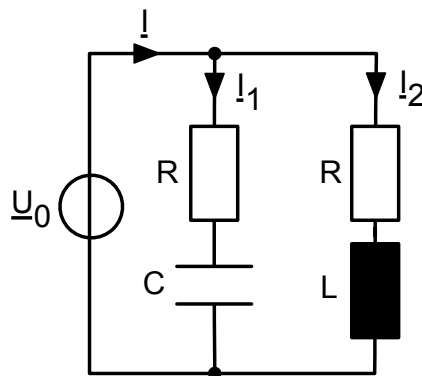


Abb. 1.3

Hinweis: Suchen Sie im Skript Antworten zu folgenden Leitfragen:

- Was ist ein Zeigerdiagramm?
- Wie sind die Achsenbeschriftungen eines Zeigerdiagramms?

Lösung:

(a) Zuerst wird der Gesamtstrom bestimmt:

$$\begin{aligned}\underline{I}' &= \frac{\underline{U}'_0}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\underline{U}'_0}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{1 \text{ V}}{(1 - j1) \Omega} = \frac{1 \cdot (1 + j1)}{(1 - j1) \cdot (1 + j1)} \text{ A} \\ &= \frac{1}{2}(1 + j1) \text{ A}\end{aligned}$$

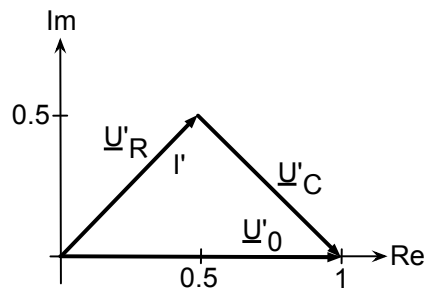
Daraus lassen sich die Teilspannungen berechnen:

$$\begin{aligned}\underline{U}'_R &= \underline{I}' \cdot R = \frac{1}{2}(1 + j1) \text{ A} \cdot 1 \Omega = \frac{1}{2}(1 + j1) \text{ V} \\ \underline{U}'_C &= \underline{I}' \cdot \frac{1}{j\omega C} = \underline{I}' \cdot \left(-j\frac{1}{\omega C}\right) = \frac{1}{2}(1 + j1) \text{ A} \cdot (-j1) \Omega \\ &= \frac{1}{2}(1 - j1) \text{ V}\end{aligned}$$

Zur Kontrolle können die Einzelspannungen addiert werden:

$$\underline{U}'_0 = \underline{U}'_R + \underline{U}'_C = \frac{1}{2}(1 + j1) \text{ V} + \frac{1}{2}(1 - j1) \text{ V} = 1 \text{ V}$$

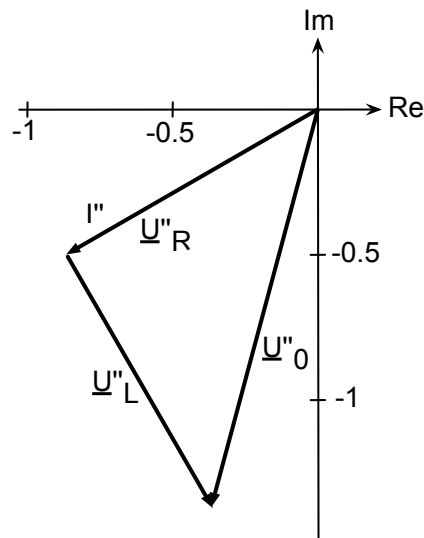
(b) Zeigerdiagramm:



(c)

$$\begin{aligned}\underline{U}''_0 &= (R + j\omega L) \cdot \underline{I}'' = (1 + j1) \Omega \cdot 1 \text{ A} \cdot e^{j\frac{7}{6}\pi} \\ &= \left(\sqrt{2} \cdot e^{j\frac{1}{4}\pi}\right) \cdot \left(e^{j\frac{7}{6}\pi}\right) \text{ V} = \sqrt{2} \text{ V} \cdot e^{j\frac{17}{12}\pi} \\ \underline{U}''_R &= \underline{I}'' \cdot R = 1 \text{ A} \cdot e^{j\frac{7}{6}\pi} \cdot 1 \Omega = 1 \text{ V} \cdot e^{j\frac{7}{6}\pi} \\ \underline{U}''_L &= \underline{I}'' \cdot j\omega L = 1 \text{ A} \cdot e^{j\frac{7}{6}\pi} \cdot j1 \Omega = \left(e^{j\frac{7}{6}\pi}\right) \cdot \left(e^{j\frac{1}{2}\pi}\right) \text{ V} = 1 \text{ V} \cdot e^{j\frac{5}{3}\pi}\end{aligned}$$

(d) Zeigerdiagramm:



(e) Über die Knotenregel folgt: $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$

Wegen $\underline{U}_0 = \underline{U}_0''$ ist $\underline{I}_2$ bereits aus Teil c) bekannt: $\underline{I}_2 = \underline{I}''$.

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_0}{R + j\frac{1}{\omega C}} = \frac{\underline{U}_0}{R - j\frac{1}{\omega C}} = \frac{\sqrt{2} \text{ V} \cdot e^{j\frac{17}{12}\pi}}{(1 - j1)\Omega} = \frac{\sqrt{2} e^{j\frac{17}{12}\pi}}{\sqrt{2} e^{-j\frac{1}{4}\pi}} \text{ A} = 1 \text{ A} \cdot e^{j\frac{5}{3}\pi}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 1 \text{ A} \cdot e^{j\frac{5}{3}\pi} + 1 \text{ A} \cdot e^{j\frac{7}{6}\pi} = \sqrt{2} \text{ A} \cdot e^{j\frac{17}{12}\pi}$$