

Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Tutorium Nr. 7: Bode-Diagramme

Empfohlen für das Tutorium: Aufgaben 27, 28
Empfohlen für Zuhause: Aufgabe 29

Die für das Tutorium empfohlenen Aufgaben dienen als Orientierung und sollen eine grobe Richtlinie darstellen, welche Aufgaben vom Umfang und Schwierigkeitsgrad her in der Zeit des Tutoriums zu schaffen sind. Letztendlich entscheidet der Tutor, welche Aufgaben im Tutorium behandelt werden.

Zusätzlich wird empfohlen, die nicht im Tutorium behandelten Aufgaben zur weiteren Übung zu Hause zu bearbeiten.

Die Studenten sollen die Aufgaben im Tutorium selbstständig in Gruppen bearbeiten und anschließend vorrechnen.
Der Tutor soll lediglich Fragen beantworten und Unklarheiten beseitigen.

Aufgabe 27

- (a) Wie berechnen sich bei einem Bodediagramm allgemein der Betrag in dB und die Phase einer Funktion $\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}$?
- (b) Gegeben sei folgende Funktion:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -100 \cdot \frac{(1 + j10^{-3} \Omega)^4}{(1 + j10^{-2} \Omega)^2 \cdot (1 + j10^{-4} \Omega)^2}$$

Zeichnen Sie das Bodediagramm (Betrag und Phase) dieser Funktion.

- (c) In welchem Frequenzbereich wird das Signal maximal verstärkt? Geben Sie die Lösung als Frequenz in Hz an, wobei die Bezugsfrequenz 1 Hz ist. Um welchen Faktor erhöht sich hier die Amplitude des Eingangssignals?
- (d) Ein Eingangssignal $\underline{U}_e$ enthält einen Frequenzanteil bei $\Omega = 10^5$ mit einem Betrag von 2 V. Welchen Betrag hat das Ausgangssignal $\underline{U}_a$ bei dieser Frequenz?

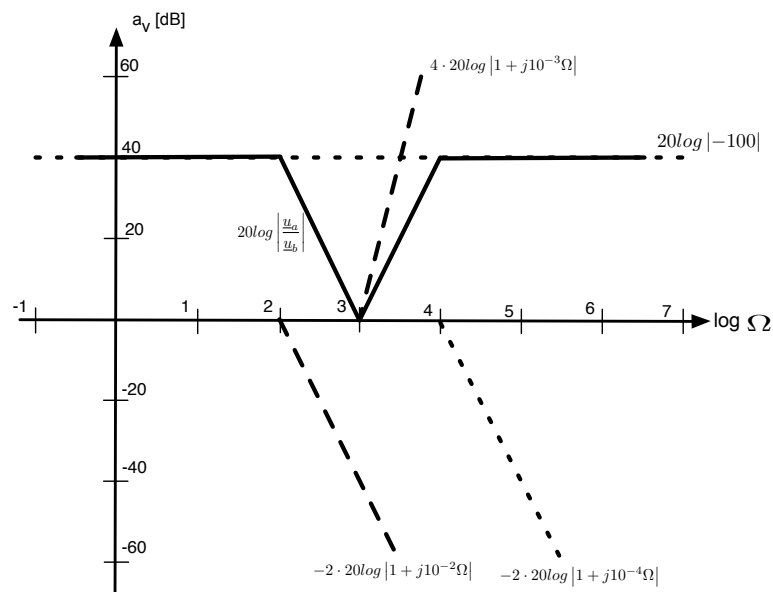
Lösung:

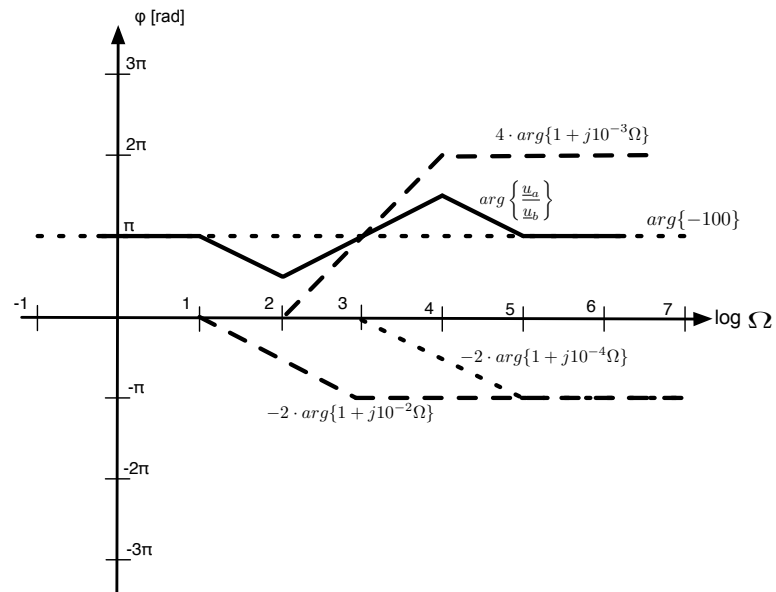
- (a) Allgemein gilt:

$$a_v = 20 \log \left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right|$$

$$\varphi = \varphi_{\text{Zähler}} - \varphi_{\text{Nenner}}$$

(b)





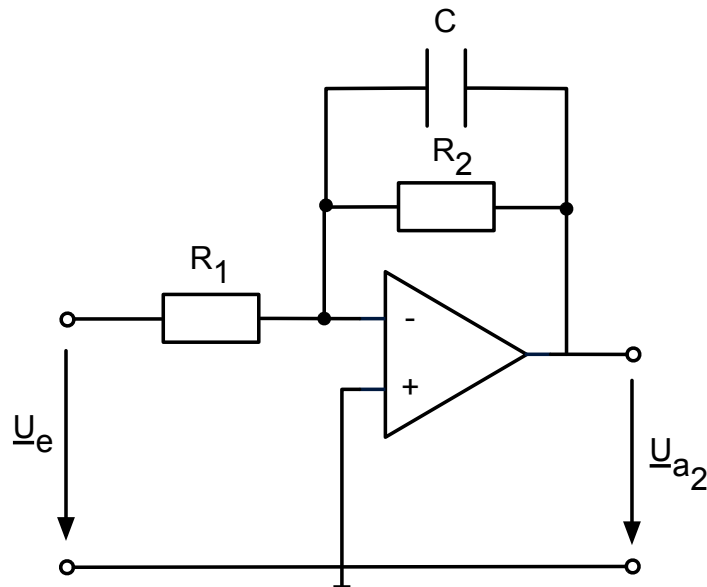
(c) Bis 100 Hz und dann wieder ab 10 kHz wird das Signal maximal mit 40 dB, d.h. um den Faktor 100, verstärkt.

(d) Bei gegebener Frequenz ist

$$\begin{aligned}
 a_v &= 40 \text{ dB} = 20 \log \left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right| \Leftrightarrow 2 = \log \left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right| \Leftrightarrow \left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right| = 10^2 \\
 \Leftrightarrow |\underline{U}_a| &= 10^2 \cdot |\underline{U}_e| = 10^2 \cdot 2 \text{ V} = 200 \text{ V}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 28

Gegeben sei folgende Operationsverstärkerschaltung (idealer OP):



- Geben Sie die Übertragungsfunktion $\frac{U_a}{U_e}$ der abgebildeten OP-Schaltung in Abhängigkeit der Bauteile an.
- Nennen Sie den vollständigen Namen dieser Schaltung (Tief-/ Hoch-/ Bandpass, invertierend/nichtinvertierend, aktiv/passiv, Ordnung).
- Bestimmen Sie eine geeignete Normierungsfrequenz Ω für die Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil a).

Gegeben sind nun folgende Werte: $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$, $C = 1.59 \text{ nF}$.

- Zeichnen Sie das Bodediagramm (Betrag und Phase) für obige Schaltung (Maßstäbe: $1 \text{ cm} \rightarrow 20 \text{ dB}$, $1 \text{ cm} \rightarrow 45^\circ = \frac{\pi}{4}$).
- Bestimmen Sie die Knickfrequenz f_k .
- Bestimmen Sie den Verstärkungsfaktor V_D im Durchlassbereich und geben Sie diesen in dB in der linearen Skala an.
- Bestimmen Sie die Ausgangsspannung in Abhängigkeit der Eingangsspannung U_e für die Frequenzen $f_1 = 100 \text{ Hz}$ und $f_2 = 10 \text{ kHz}$. Verwenden Sie dafür nicht die Übertragungsfunktion aus Aufgabenteil a), sondern benutzen Sie das Bodediagramm aus Aufgabenteil d).

Lösung:

(a) Übertragungsfunktion:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{R_2 \parallel \frac{1}{j\omega C}}{R_1} = -\frac{\frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}}{R_1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C}$$

(b) Die Schaltung stellt einen aktiven invertierenden Tiefpass 1. Ordnung dar.

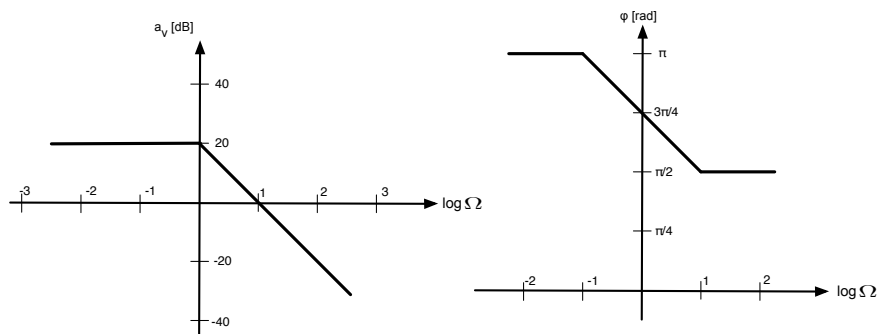
(c) Normierungsfrequenz Ω :

$$\Omega = \omega R_2 C \quad \Rightarrow \quad \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\Omega}$$

(d) Einsetzen der Werte liefert:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -10 \cdot \frac{1}{1 + j\Omega}$$

Die -10 im Zähler sorgt im Bodediagramm für einen konstanten Betrags-Offset von 20 dB ($20 \log|-10| = 20 \text{ dB}$) und für eine Phasendrehung um 180° :



(e) Knickfrequenz:

$$\begin{aligned} \log \Omega(f_k) &\stackrel{!}{=} 0 &\Leftrightarrow &\quad \Omega(f_k) \stackrel{!}{=} 1 \\ &&\Leftrightarrow &\quad \Omega(f_k) = \omega_k R_2 C = 2\pi f_k \cdot R_2 C \stackrel{!}{=} 1 \\ &&\Leftrightarrow &\quad f_k = \frac{1}{2\pi R_2 C} \\ &&&= \frac{1}{2\pi \cdot 100 \cdot 10^3 \Omega \cdot 1.59 \cdot 10^{-9} \text{ F}} = 1 \text{ kHz} \end{aligned}$$

(f) Verstärkungsfaktor V_D :

Durchlassbereich:

$$\begin{aligned} a_{V_D} &= 20 \log \left(\left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right| \right) = 20 \text{ dB} \\ &\Rightarrow V_D = \left| \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} \right| = 10 \end{aligned}$$

(g) Ausgangsspannung $\underline{U}_a$:

$$\begin{aligned} f_1 = 100 \text{ Hz} &\Rightarrow \Omega_1 = 2\pi \cdot 100 \text{ Hz} \cdot 100 \cdot 10^3 \Omega \cdot 1.59 \cdot 10^{-9} \text{ F} \approx 0.1 \\ &\Rightarrow \log(\Omega_1) \approx \log(0.1) = -1 \quad (\text{Durchlassbereich}) \end{aligned}$$

$$\underline{U}_a(f_1) = a_V(f_1) \cdot e^{j\phi(f_1)} \cdot \underline{U}_e = 10 \cdot e^{j\pi} \cdot \underline{U}_e = 10 \cdot (-1) \cdot \underline{U}_e = -10 \cdot \underline{U}_e$$

$$\begin{aligned} f_2 = 10 \text{ kHz} &\Rightarrow \Omega_2 = 2\pi \cdot 10 \cdot 10^3 \text{ Hz} \cdot 100 \cdot 10^3 \Omega \cdot 1.59 \cdot 10^{-9} \text{ F} \approx 10 \\ &\Rightarrow \log(\Omega_2) \approx \log(10) = 1 \quad (\text{Sperrbereich}) \end{aligned}$$

$$\underline{U}_a(f_2) = a_V(f_2) \cdot e^{j\phi(f_2)} \cdot \underline{U}_e = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \underline{U}_e = j \cdot \underline{U}_e$$

Aufgabe 29

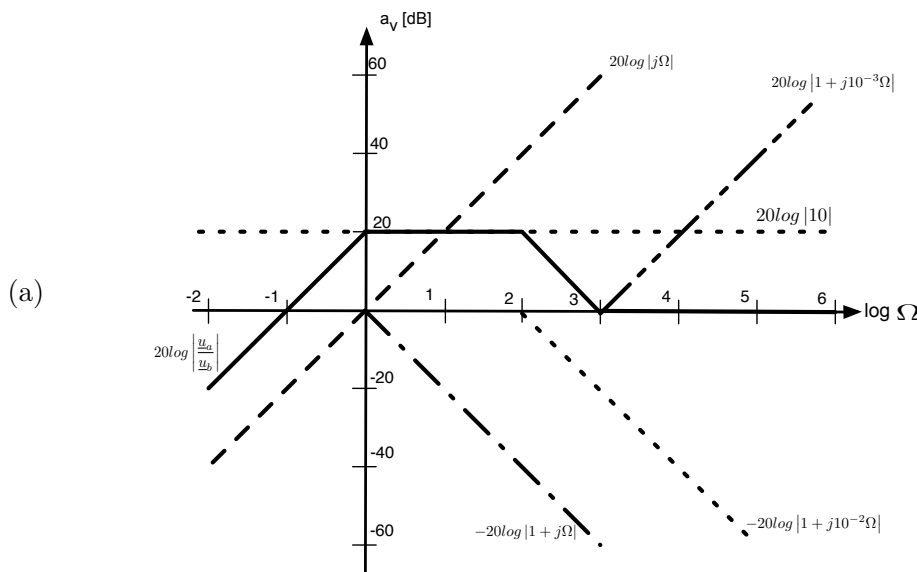
- (a) Zeichnen Sie das Bodediagramm zu folgendem Spannungsverhältnis. Skalieren Sie die Achsen so, dass 1cm 20 dB oder 45° entspricht.

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = 10 \cdot \frac{j\Omega (1 + j10^{-3}\Omega)}{(1 + j\Omega) \cdot (1 + 10^{-2}j\Omega)}$$

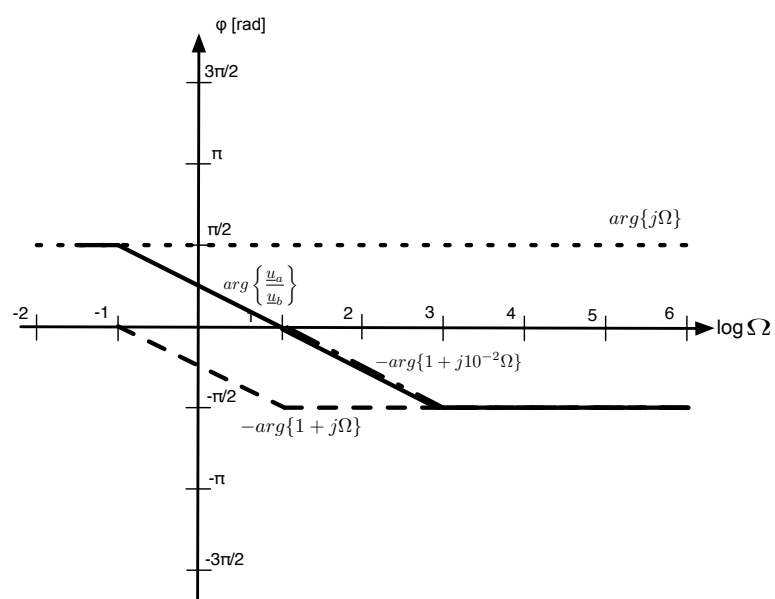
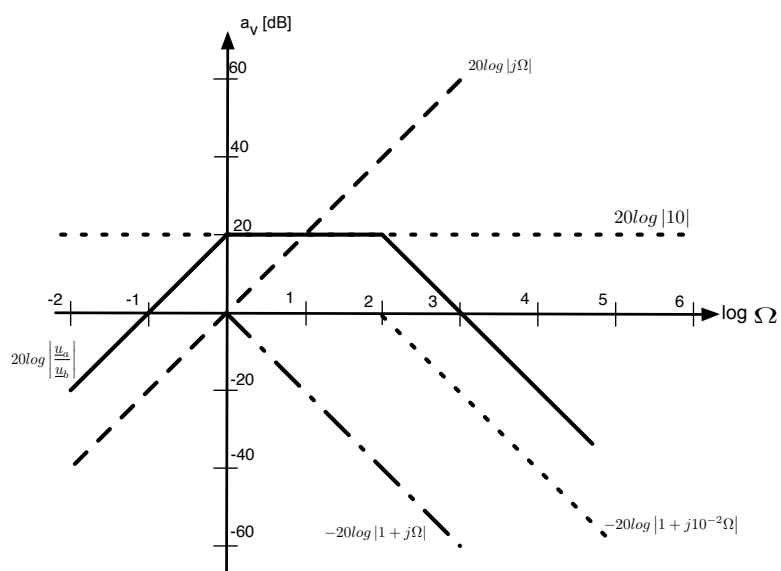
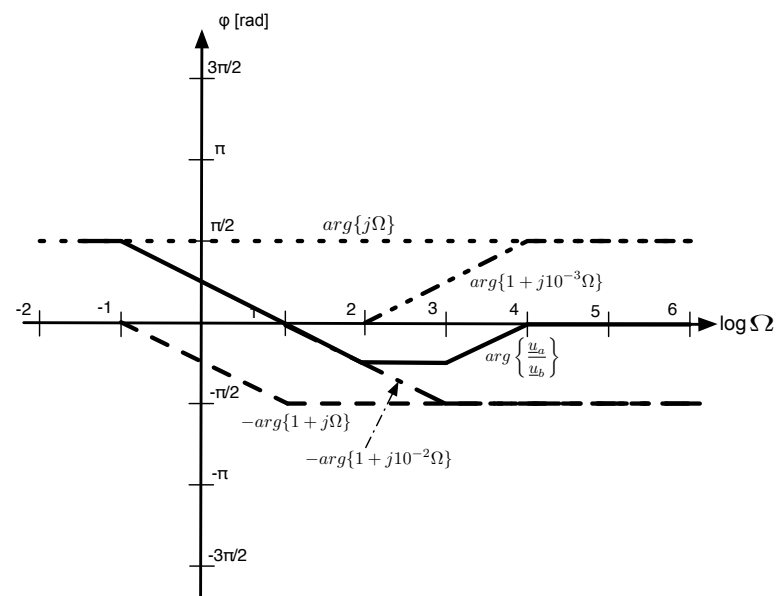
- (b) Das in a) erstellte Bodediagramm zeigt nicht das gewünschte Verstärkungs- bzw. Dämpfungsverhalten. Auch ist die Phasenverschiebung nicht gewünscht. Die Tabelle zeigt die gewünschte Verstärkung und Phasenverschiebung.

- Zeichnen Sie das Bodediagramm, das durch die Tabelle beschrieben wird in ein neues Diagramm mit der in a) definierten Skalierung.
- Wie muss das Spannungsverhältnis $\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e}$ aus Aufgabenteil a) verändert werden, dass es dem gewünschten Verhalten aus der Tabelle entspricht? Schreiben Sie das neue Spannungsverhältnis $\frac{\underline{U}'_a}{\underline{U}'_e}$ auf.

$\log \Omega$	$a_V [\text{dB}]$	φ
< -2	Steigung 20 dB/Dekade	90°
-2	-20	90°
-1	0	90°
0	20	45°
1	20	0°
2	20	-45°
3	0	-90°
> 3	Steigung -20 dB/Dekade	-90°

Lösung:

(b)



$$\frac{U'_a}{U'_e} = 10 \cdot \frac{j\Omega}{(1 + j\Omega) \cdot (1 + j10^{-2}\Omega)}$$