Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: M.Sc. N. Pilia
Tel: 0721 608-48035
Nicolas.Pilia@kit.edu

Tutorium Nr. 2: Netzwerkanalyse

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben benötigen Sie den Stoff der ersten vier Vorlesungen, d.h. die Kapitel 1 und 2.

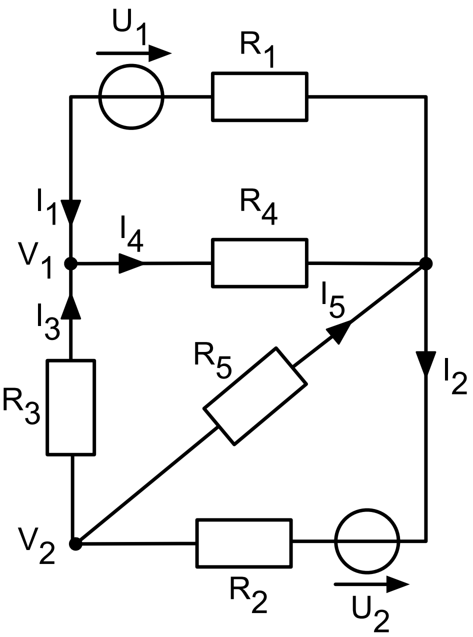
Empfohlen für das Tutorium:	Aufgaben 4, 5
Empfohlen für Zuhause:	Aufgabe 6, 7

Die für das Tutorium empfohlenen Aufgaben dienen als Orientierung und sollen eine grobe Richtlinie darstellen, welche Aufgaben vom Umfang und Schwierigkeitsgrad her in der Zeit des Tutoriums zu schaffen sind.
Letztendlich entscheidet der Tutor, welche Aufgaben im Tutorium behandelt werden.
Zusätzlich wird empfohlen, die nicht im Tutorium behandelten Aufgaben zur weiteren Übung zu Hause zu bearbeiten.

Die Studenten sollen die Aufgaben im Tutorium selbstständig in Gruppen bearbeiten und anschließend vorrechnen.
Der Tutor soll lediglich Fragen beantworten und Unklarheiten beseitigen.

Aufgabe 4

Die folgende Schaltung mit den Spannungen $U_1 = 9\,\mathrm{V}$ und $U_2 = 12\,\mathrm{V}$ enthält die Widerstände $R_1 = 2.4\,\Omega$, $R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$, $R_4 = 3\,\Omega$ und $R_5 = 5\,\Omega$.



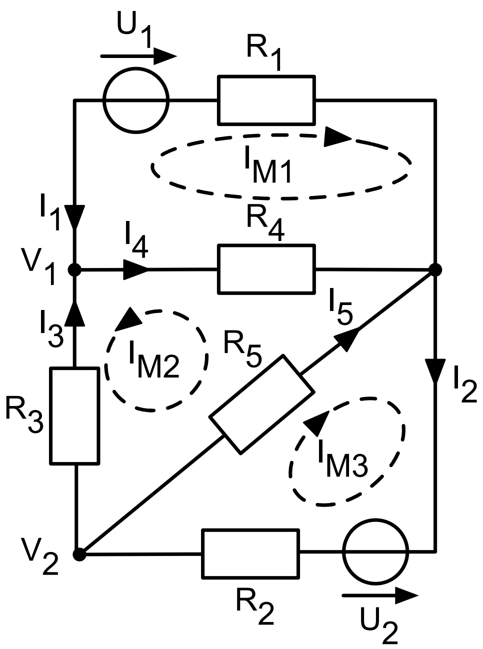
Berechnen Sie mithilfe

(a) des formalisierten Maschenstromverfahrens alle Teilströme I_1 bis I_5.

(b) des formalisierten Knotenpunktpotentialverfahrens die Potentiale V_1 und V_2 sowie den Strom I_3.

Lösung:

(a)



$$
\begin{aligned}
I_1 &= -I_{M1}\\
I_2 &= I_{M3}\\
I_3 &= -I_{M2}\\
I_4 &= -(I_{M1} + I_{M2})\\
I_5 &= I_{M2} + I_{M3}
\end{aligned}
$$

Formalisiertes Maschenstromverfahren:

$$\begin{pmatrix} (R_1+R_4) & R_4 & 0 \\ R_4 & (R_3+R_4+R_5) & R_5 \\ 0 & R_5 & (R_2+R_5) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \\ 0 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (2.4+3)\,\Omega & 3\,\Omega & 0 \\ 3\,\Omega & (2+3+5)\,\Omega & 5\,\Omega \\ 0 & 5\,\Omega & (1+5)\,\Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9\,\mathrm{V} \\ 0 \\ 12\,\mathrm{V} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5.4\,\Omega & 3\,\Omega & 0 \\ 3\,\Omega & 10\,\Omega & 5\,\Omega \\ 0 & 5\,\Omega & 6\,\Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9\,V \\ 0 \\ 12\,V \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel:

$$I_{M1} = \frac{\begin{vmatrix} -9 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \\ 12 & 5 & 6 \end{vmatrix} \Omega^2 \cdot \mathrm{V}}{\begin{vmatrix} 5.4 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \Omega^3} = \frac{[-9 \cdot (60-25) + 12 \cdot 15]\,\mathrm{V}}{[5.4 \cdot (60-25) - 3 \cdot 18]\,\Omega} = \frac{-135\,\mathrm{V}}{135\,\Omega} = -1\,\mathrm{A}$$

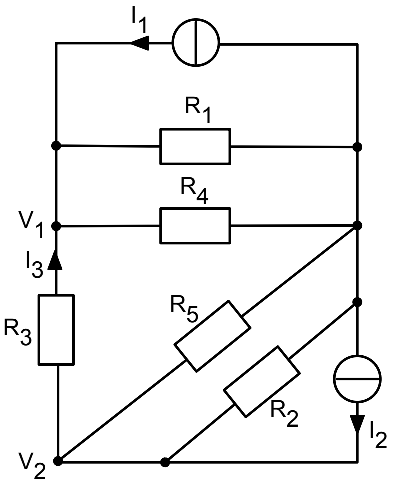
$$I_{M2} = \frac{\begin{vmatrix} 5.4 & -9 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 12 & 6 \end{vmatrix} \Omega^2 \cdot \mathrm{V}}{\begin{vmatrix} 5.4 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \Omega^3} = \frac{[5.4 \cdot (-60) - 3 \cdot (-54)]\,\mathrm{V}}{135\,\Omega} = \frac{-162\,\mathrm{V}}{135\,\Omega} = -1.2\,\mathrm{A}$$

$$I_{M3} = \frac{\begin{vmatrix} 5.4 & 3 & -9 \\ 3 & 10 & 0 \\ 0 & 5 & 12 \end{vmatrix} \Omega^2 \cdot \mathrm{V}}{\begin{vmatrix} 5.4 & 3 & 0 \\ 3 & 10 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \Omega^3} = \frac{[5.4 \cdot 120 - 3 \cdot (36+45)]\,\mathrm{V}}{135\,\Omega} = \frac{405\,\mathrm{V}}{135\,\Omega} = 3\,\mathrm{A}$$

Damit folgt für die Zweigströme:

$I_1 = 1\,\mathrm{A}$
$I_2 = 3\,\mathrm{A}$
$I_3 = 1.2\,\mathrm{A}$
$I_4 = 2.2\,\mathrm{A}$
$I_5 = 1.8\,\mathrm{A}$

(b) Für das Knotenpunktpotentialverfahren müssen als erster Schritt alle Spannungsquellen in äquivalente Stromquellen umgewandelt werden. Dadurch erhält man folgendes Netz:



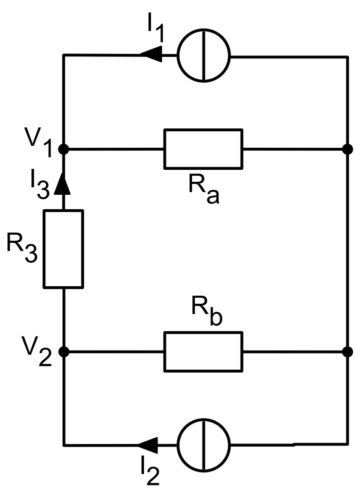
Die Stromquellen haben folgende Daten:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{U_1}{R_1} = \frac{9\,\mathrm{V}}{2.4\,\Omega} = \frac{15}{4}\,\mathrm{A} \\
I_2 &= \frac{U_2}{R_2} = \frac{12\,\mathrm{V}}{1\,\Omega} = 12\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

Die Widerstände R_1 und R_4 bzw. R_2 und R_5 sind jeweils parallel und sollten zusammengefasst werden:

$$
\begin{aligned}
R_a &= R_1 \| R_4 = 2.4\,\Omega \| 3\,\Omega = \frac{1}{\frac{10}{24} + \frac{1}{3}}\,\Omega = \frac{1}{\frac{18}{24}}\,\Omega = \frac{24}{18}\,\Omega = \frac{4}{3}\,\Omega \\
R_b &= R_2 \| R_5 = 1\,\Omega \| 5\,\Omega = \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}\,\Omega = \frac{1}{\frac{6}{5}}\,\Omega = \frac{5}{6}\,\Omega
\end{aligned}
$$

Somit folgt als vereinfachte Schaltung:



Formalisiertes Knotenpunktpotentialverfahren:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_a} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)\,\mathrm{S} & -\frac{1}{2}\,\mathrm{S} \\ -\frac{1}{2}\,\mathrm{S} & \left(\frac{1}{2} + \frac{6}{5}\right)\,\mathrm{S} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{4}\,\mathrm{A} \\ 12\,\mathrm{A} \end{pmatrix}$$

Erweitert man die Gleichung mit 20 und fasst die Summen zusammen, wird sie zu:

$$\begin{pmatrix} 25\,\mathrm{S} & -10\,\mathrm{S} \\ -10\,\mathrm{S} & 34\,\mathrm{S} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75\,\mathrm{A} \\ 240\,\mathrm{A} \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel:

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 75 & -10 \\ 240 & 34 \end{vmatrix} \mathrm{S} \cdot \mathrm{A}}{\begin{vmatrix} 25 & -10 \\ -10 & 34 \end{vmatrix} \mathrm{S}^2} = \frac{[75 \cdot 34 - (-10) \cdot 240]\,\mathrm{A}}{[25 \cdot 34 - (-10) \cdot (-10)]\,\mathrm{S}} = \frac{4950\,\mathrm{A}}{750\,\mathrm{S}} = 6.6\,\mathrm{V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 25 & 75 \\ -10 & 240 \end{vmatrix} \mathrm{S} \cdot \mathrm{A}}{\begin{vmatrix} 25 & -10 \\ -10 & 34 \end{vmatrix} \mathrm{S}^2} = \frac{[25 \cdot 240 - (-10) \cdot 75]\,\mathrm{A}}{[25 \cdot 34 - (-10) \cdot (-10)]\,\mathrm{S}} = \frac{6750\,\mathrm{A}}{750\,\mathrm{S}} = 9\,\mathrm{V}$$

Damit folgt für I_3:

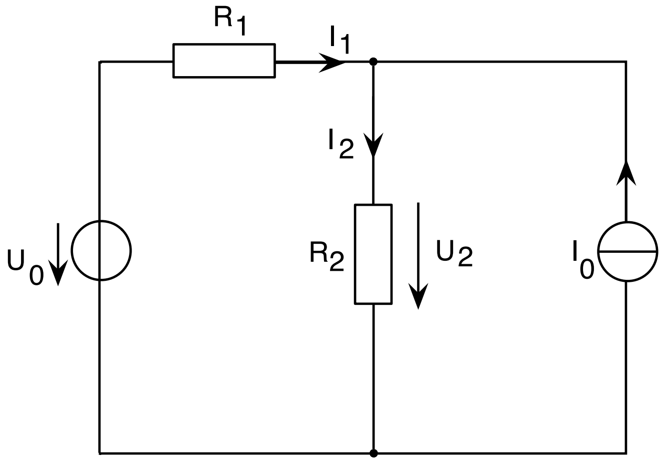
$$I_3 = (V_2 - V_1) \cdot G_3 = (V_2 - V_1) \cdot \frac{1}{R_3} = (9\,\mathrm{V} - 6.6\,\mathrm{V}) \cdot \frac{1}{2\,\Omega} = 1.2\,\mathrm{A}$$

Aufgabe 5

Hinweis: Rechnen Sie zunächst allgemeinen und setzten Sie dann die Werte ein.

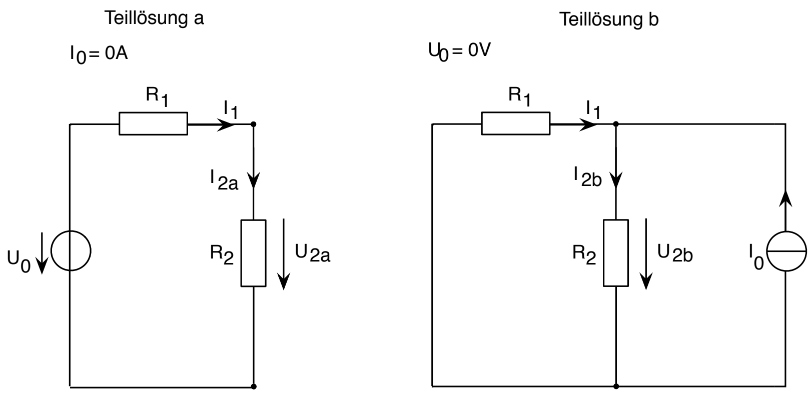
(a) Die in Abbildung 3.1 dargestellte Schaltung enthält eine Stromquelle mit I_0=2,4 A und eine Spannungsquelle mit U_0=8V. Die Widerstände besitzen die Werte R_1=30 Ω und R_2=50 Ω.

- Welchen Wert hat der Strom I_2 und die Spannung U_2?
  Verwenden Sie dazu das Überlagerungsverfahren und skizzieren Sie die zwei Teillösungen.



Lösung:

(a) Die Teillösungen sehen wie folgt aus:



$I_{2a}= \frac{U_0}{R_1+R_2}$

$I_{2b}= \frac{R_1 I_0}{R_1+R_2}$

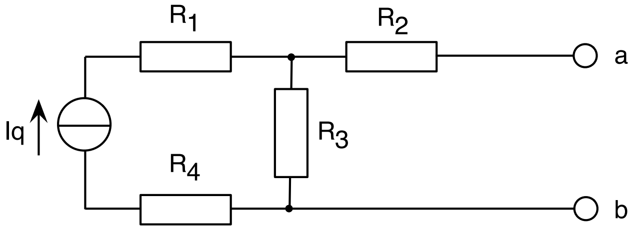
Zuammengesetzt ergibt sich:

$I_2=I_{2a}+I_{2b} = \frac{U_0+R_1 I_0}{R_1+R_2}=\frac{8V+30\,\Omega\cdot 2{,}4A}{80\,\Omega}=1\text{A}$

$U_2= R_2\cdot I_2=(U_0+R_1 I_0)\cdot\frac{R_2}{R_1+R_2}=50\,\Omega\cdot\ 1\text{A}=50\text{V}$

Aufgabe 6

(a) Die folgende Abbildung zeigt eine Schaltung mit offenen Klemmen.



Skizzieren Sie die äquivalente Spannungsquelle und die äquivalente Stromquelle bzgl. den Klemmen a und b. Geben Sie den Innenwiderstand der Quelle, ihren Kurzschlussstrom und ihre Leerlaufspannung an.

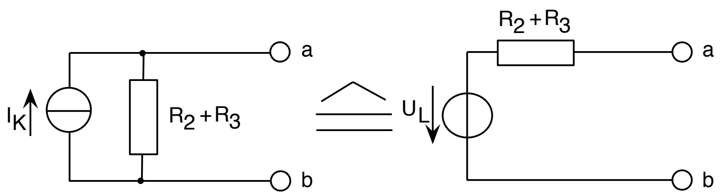
Lösung:

(a) Der Innenwiderstand wird berechnet, indem Spannungsquellen durch Kurzschlüsse und Stromquellen durch Unterbrechungen ersetzt werden. Dadurch fallen die Widerstände R_1 und R_4 weg und es bleibt ein Innenwiderstand $R_i{=}R_2{+}R_3$ übrig.

Zur äquivalenten Spannungsquelle:
Die Leerlaufspannung, welche über R_3 abfällt ist $U_L{=}I_q{\cdot}R_3$.

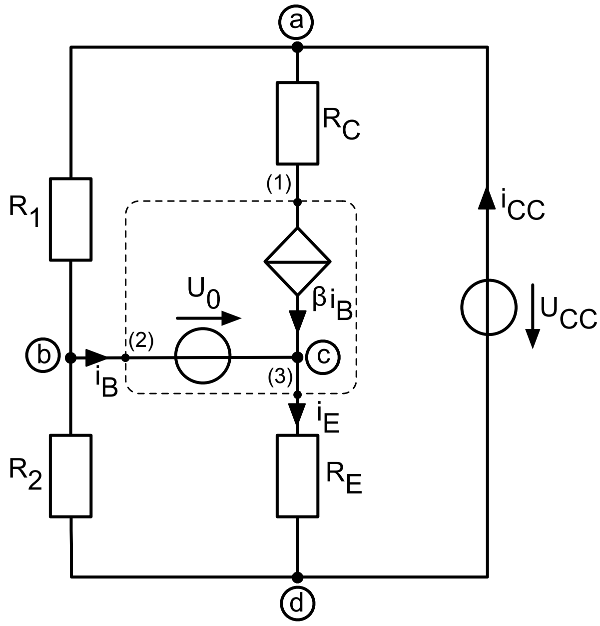
Zur äquivalenten Stromquelle wird die Spannungsquelle in eine Stromquelle umgewandelt:

$I_K{=}\frac{U_L}{R_2+R_3} = I_q{\cdot}\frac{R_3}{R_2+R_3}$



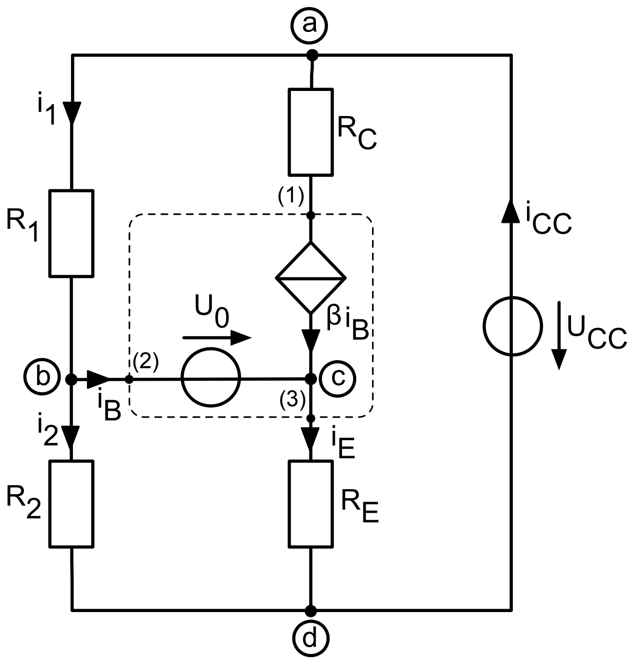
Aufgabe 7

Gegeben sei folgende Schaltung bestehend aus zwei Spannungsquellen U_0 und U_{CC}, einer stromgesteuerten Stromquelle βi_B und den Widerständen R_1, R_2, R_C und R_E. Die Strom- und Spannungsquellen zwischen den Klemmen 1 (Kollektor), 2 (Basis) und 3 (Emitter) stellen eine Modellierung eines Transistors dar. Berechnen Sie den Basisstrom i_B.



Hinweis: Betrachten Sie hierzu die Knotengleichungen für die Knoten a, b und d sowie die Maschengleichungen für die Maschen bcdb und badb.

Lösung:



Knotengleichungen:

$$\begin{aligned} &\text{a:} & i_{CC} - i_1 - \beta i_B = 0 \qquad (1)\\ &\text{b:} & i_1 - i_B - i_2 = 0 \qquad (2)\\ &\text{d:} & i_E + i_2 - i_{CC} = 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

Maschengleichungen:

$$\begin{aligned} &\text{bcdb:} & U_0 + i_E R_E - i_2 R_2 = 0 \qquad (4)\\ &\text{badb:} & U_{CC} - i_1 R_1 - i_2 R_2 = 0 \qquad (5) \end{aligned}$$

aus (1) folgt: $i_1 = i_{CC} - \beta i_B$

aus (2) folgt: $i_2 = i_1 - i_B = i_{CC} - \beta i_B - i_B = i_{CC} - i_B(1+\beta)$

aus (3) folgt: $i_E = i_{CC} - i_2 = i_B(1+\beta)$

i_1, i_2 und i_E werden in (4) und (5) eingesetzt.

$$\begin{aligned} U_0 + i_E R_E - i_2 R_2 &= 0\\ U_0 + i_B(1+\beta)R_E - [i_{CC} - i_B(1+\beta)]R_2 &= 0\\ U_0 + i_B(1+\beta)R_E - i_{CC}R_2 + i_B(1+\beta)R_2 &= 0\\ U_0 - i_{CC}R_2 + i_B(1+\beta)(R_E+R_2) &= 0 \qquad \text{(a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{CC} - i_1 R_1 - i_2 R_2 &= 0\\ U_{CC} - (i_{CC} - \beta i_B)R_1 - [i_{CC} - i_B(1+\beta)]R_2 &= 0\\ U_{CC} - i_{CC}R_1 + \beta i_B R_1 - i_{CC}R_2 + i_B(1+\beta)R_2 &= 0\\ U_{CC} - i_{CC}(R_1+R_2) + i_B(R_2 + \beta R_2 + \beta R_1) &= 0\\ U_{CC} - i_{CC}(R_1+R_2) + i_B[R_2 + \beta(R_1+R_2)] &= 0 \qquad \text{(b)} \end{aligned}$$

Nun werden die Gleichungen (a) und (b) in Matrixschreibweise umgewandelt:

$$\begin{pmatrix} (1+\beta)(R_E+R_2) & -R_2\\ R_2 + \beta(R_1+R_2) & -R_1 - R_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_B\\ i_{CC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_0\\ -U_{CC} \end{pmatrix}$$

Mit der Cramerschen Regel folgt für i_B:

$$\begin{aligned} i_B &= \frac{\begin{vmatrix} -U_0 & -R_2\\ -U_{CC} & -R_1 - R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+\beta)(R_E+R_2) & -R_2\\ R_2+\beta(R_1+R_2) & -R_1-R_2 \end{vmatrix}}\\ &= \frac{(-U_0)(-R_1-R_2) - (-U_{CC})(-R_2)}{(1+\beta)(R_E+R_2)(-R_1-R_2) - [R_2+\beta(R_1+R_2)](-R_2)}\\ &= \ldots\\ &= \frac{U_{CC}\cdot R_2 - U_0\cdot(R_1+R_2)}{R_1R_2 + (1+\beta)\cdot R_E\cdot(R_1+R_2)} \end{aligned}$$