Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie
Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: M.Sc. N. Pilia
Tel: 0721 608-48035
Nicolas.Pilia@kit.edu

Tutorium Nr. 6:
Ortskurve, 2-Tore/Vierpole

Empfohlen für das Tutorium:	Aufgaben 21, 22, 23, 24
Empfohlen für Zuhause:	Aufgaben 25, 26

Die für das Tutorium empfohlenen Aufgaben dienen als Orientierung und sollen eine grobe Richtlinie darstellen, welche Aufgaben vom Umfang und Schwierigkeitsgrad her in der Zeit des Tutoriums zu schaffen sind.
Letztendlich entscheidet der Tutor, welche Aufgaben im Tutorium behandelt werden.
Zusätzlich wird empfohlen, die nicht im Tutorium behandelten Aufgaben zur weiteren Übung zu Hause zu bearbeiten.

Die Studenten sollen die Aufgaben im Tutorium selbstständig in Gruppen bearbeiten und anschließend vorrechnen.
Der Tutor soll lediglich Fragen beantworten und Unklarheiten beseitigen.

Aufgabe 21

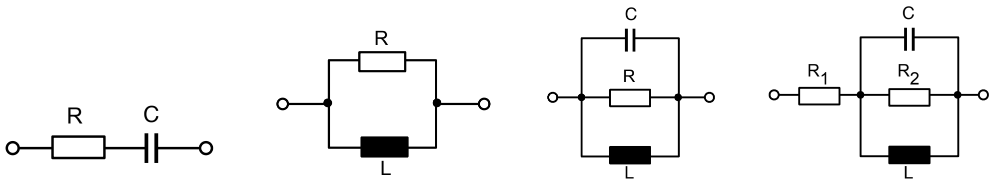


Abb. 1.1 Abb. 1.2 Abb. 1.3 Abb. 1.4

(a) Geben Sie die Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ für die Schaltungen aus Abb. 1.1 und Abb. 1.2 getrennt nach Real- und Imaginärteil an.

(b) Geben Sie die Gesamtadmittanz $\underline{Y}$ für die Schaltung aus Abb. 1.3 getrennt nach Real- und Imaginärteil an.

(c) Zeichnen Sie die Ortskurven von $\underline{Z}$ für die Schaltungen aus Abb. 1.1 und Abb. 1.2. Beschriften Sie vollständig, d.h. alle Grenzwerte von ω.

(d) Zeichnen Sie die Ortskurve von $\underline{Y}$ für die Schaltung aus Abb. 1.3. Wie erhält man graphisch die Ortskurve von $\underline{Z}$? Zeichnen Sie die Ortskurve von $\underline{Z}$. Beschriften Sie vollständig, d.h. alle Grenzwerte von ω.

(e) Wie verändert sich die Ortskurve der Schaltung aus Abb. 1.3, wenn die Schaltung wie in Abb. 1.4 erweitert wird? Zeichnen Sie die Ortskurven von $\underline{Y}$ und $\underline{Z}$ für die Schaltung aus Abb. 1.4. Beschriften Sie vollständig, d.h. alle Grenzwerte von ω.

Lösung:

(a) Abb. 1.1:

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C}$$

Abb. 1.2:

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= R \| j\omega L = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega RL\,(R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} \\ &= \frac{\omega^2 RL^2}{R^2 + (\omega L)^2} + j\,\frac{\omega R^2 L}{R^2 + (\omega L)^2}\end{aligned}$$

(b) Abb. 1.3:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

(c) Abb. 1.1:

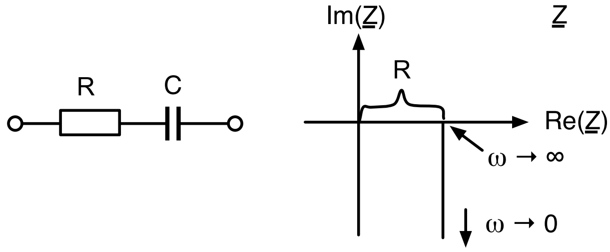
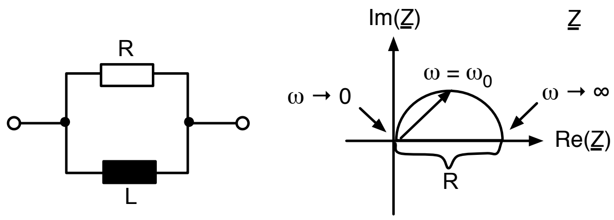
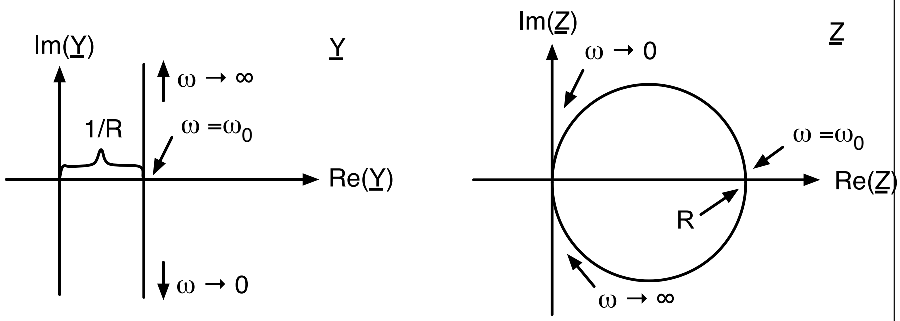


Abb. 1.2:



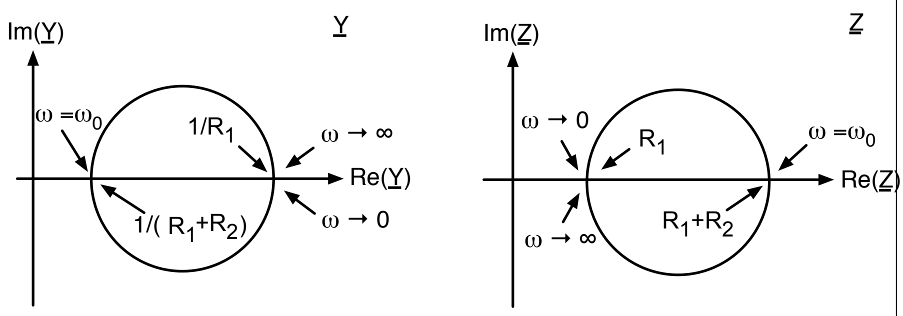
(d) Durch die Spiegelung der Ortskurve von der Admittanz $\underline{Y}$ am Einheitskreis erhält man die Ortskurve für die Impedanz:



(e) Die Ortskurve von $\underline{Z}$ ist um R_1 nach rechts verschoben.

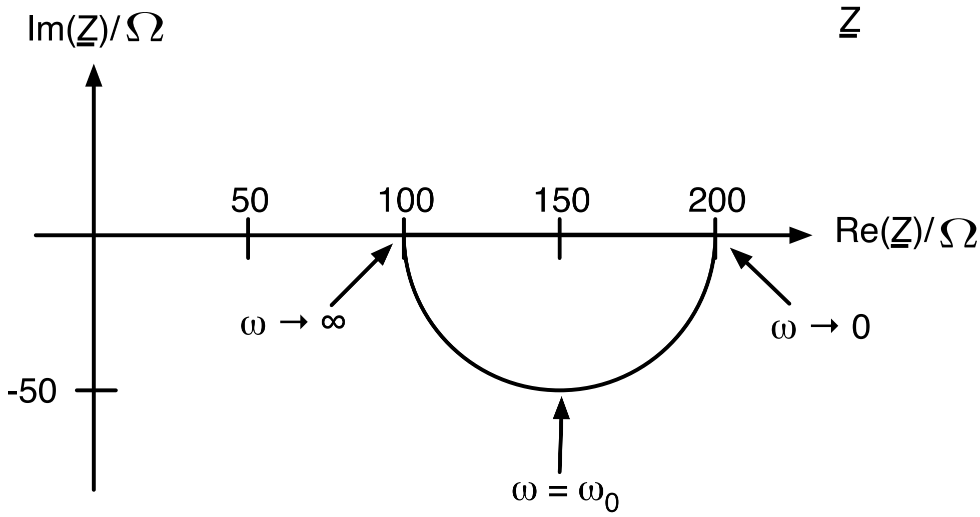
Die Ortskurve von $\underline{Y}$ ist ebenfalls ein Kreis mit Zentrum auf der X-Achse, da es sich um eine Reihenschaltung handelt.
Punkte abbilden:

	$\underline{Y}$	$\underline{Z}$
ω_0	$1/(R_1+R_2)$	R_1+R_2
$\omega \to 0$	$1/R_1$	R_1
$\omega \to \infty$	$1/R_1$	R_1



Aufgabe 22

Gegeben sei folgende Ortskurve mit $\omega_0 = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$:



(a) Leiten Sie aus der Ortskurve das Schaltbild für die zugehörige Schaltung ab. Geben Sie eine kurze Begründung. Bestimmen Sie noch keine Zahlenwerte. *Hinweis:* Es wurden zwei Ohmsche Widerstände sowie ein Kondensator verwendet.

(b) Stellen Sie die Gleichung für die Impedanz der Schaltung aus a) getrennt nach Real- und Imaginärteil auf. Rechnen Sie mit allgemeinen Werten.

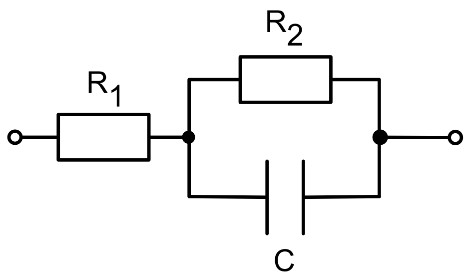
(c) Geben Sie nun die Bauteilgrößen der Schaltung mit ihren Einheiten an. Begründen Sie kurz. *Hinweis:* Überlegen Sie, wo in der Ortskurve $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ liegt.

Lösung:

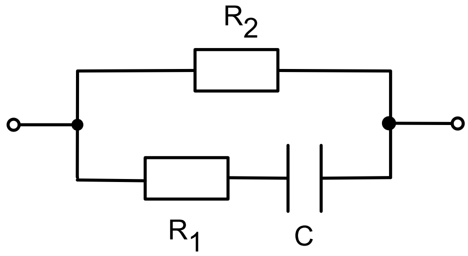
(a) Der nach unten geöffnete Halbkreis lässt sich durch zwei möglichen Schaltungen realisieren:

- eine Reihenschaltung aus einem Widerstand und einer Parallelschaltung von Widerstand und Kondensator.
- eine Parallelschaltung aus einem Widerstand und einer Reihenschaltung von Widerstand und Kondensator.

Möglichkeit 1:



Möglichkeit 2:



Die Möglichkeit 1 soll hier weiter betrachtet werden.

(b) Impedanz:

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= R_1 + \left(R_2 \| \frac{1}{j\omega C}\right) = R_1 + \frac{R_2 \cdot \frac{1}{j\omega C}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} \\
&= R_1 + \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C} \\
&= R_1 + \frac{R_2\,(1 - j\omega R_2 C)}{(1 + j\omega R_2 C)(1 - j\omega R_2 C)} \\
&= R_1 + \frac{R_2}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2} - j\frac{\omega R_2^2 C}{1 + \omega^2 R_2^2 C^2}
\end{aligned}$$

(c) Aus dem Startpunkt ($\omega \to \infty$ bzw. Halbkreis links) folgt:

$$\begin{aligned}
\text{Rechnerisch:} \quad \lim_{\omega\to\infty} \underline{Z} &= R_1 + \frac{\frac{R_2}{\infty^2}}{\frac{1}{\infty^2} + R_2^2 C^2} - j\frac{\frac{R_2^2 C}{\infty}}{\frac{1}{\infty^2} + R_2^2 C^2} \\
&= R_1 \\
\text{Zeichnung:} \quad \lim_{\omega\to\infty} Re\{\underline{Z}\} &= 100\,\Omega
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad R_1 = 100\,\Omega$$

Aus dem Endpunkt ($\omega \to 0$ bzw. Halbkreis rechts) folgt:

$$\begin{aligned}
\text{Rechnerisch:} \quad \lim_{\omega\to 0} \underline{Z} &= R_1 + \frac{R_2}{1 + 0^2 \cdot R_2^2 C^2} - j\frac{0 \cdot R_2^2 C}{1 + 0^2 \cdot R_2^2 C^2} \\
&= R_1 + R_2 \\
\text{Zeichnung:} \quad \lim_{\omega\to 0} Re\{\underline{Z}\} &= 200\,\Omega
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad R_2 = 200\,\Omega - R_1 = 100\,\Omega$$

Mit der Frequenz $\omega_0 = 1000\,\mathrm{s}^{-1} = \frac{1}{R_2 C}$ folgt:

$$C = \frac{1}{\omega_0\, R_2} = \frac{1}{1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 100\,\Omega} = 10\,\mu\mathrm{F}$$

Aufgabe 23

(a) Erläutern Sie die Begriffe Vierpol und Zweitor und worin der Unterschied liegt.

(b) Was gilt für die $\underline{Z}$- bzw. $\underline{Y}$-Parameter eines (widerstands-)symmetrischen Zweitors?

(c) Was gilt für die $\underline{Z}$- bzw. $\underline{Y}$-Parameter eines reziproken/ kopplungssymmetrischen Zweitors? Woran erkennt man anhand der Schaltung ein reziprokes Zweitor?

Lösung:

(a) Ein Vierpol ist eine beliebige elektrische Schaltung mit einem Eingang und einem separaten Ausgang.
Ein Zweitor ist ein besonderer Vierpol, für den folgende Eigenschaften erfüllt sind:

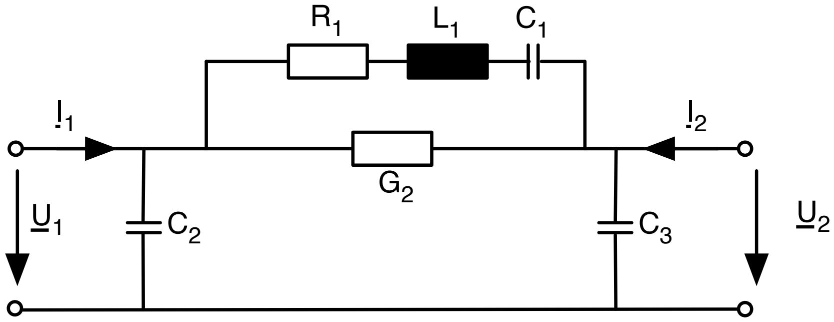
- im Mittel darf keine Energie im Zweitor gespeichert werden
- keine unabhängigen Quellen innerhalb des Zweitors
- der in das Tor hineinfließende Strom muss gleich dem aus demselben Tor herausfließende Strom sein

(b) Für ein (widerstands-)symmetrisches Zweitor gilt:
$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_{22}$ bzw. $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$.

(c) Für ein reziprokes/ kopplungssymmetrisches Zweitor gilt:
$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$ bzw. $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$.
Nach dem Reziprozitätstheorem ist eine Schaltung, die ausschließlich aus lineaen passiven Bauteilen besteht, reziprok.

Aufgabe 24

Gegeben sei das folgende Ersatzschaltbild eines Oberflächenwellenresonators:



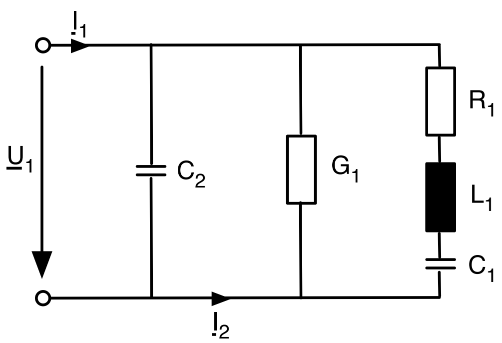
Bestimmen Sie die Admittanzmatrix $\underline{Y}$ des Resonators in allgemeiner Form. Zeichnen dazu zuerst das Ersatzschaltbild für den Fall $\underline{U}_2 = 0$ und bestimmen Sie die entsprechenden beiden $\underline{Y}$-Parameter. Überlegen Sie anschließend, ob die Berechnung der anderen beiden Parameter notwendig ist.

Beachten Sie bei der Lösung der Aufgabe die folgenden Angaben:

- Für die Kondensatoren C_2 und C_3 gilt: $C_2 = C_3$
- Mit G_2 ist ein Leitwert gemeint: $G_2 = \frac{1}{R_2}$

Lösung:

Ersatzschaltbild für $\underline{U}_2 = 0$:



$$\underline{Y}_{11} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = j\omega C_2 + G_2 + \frac{1}{R_1 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1}}$$

$$\underline{Y}_{21} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \cdot \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = \frac{-\left(G_2 + \frac{1}{R_1+j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1}}\right)}{j\omega C_2 + G_2 + \frac{1}{R_1+j\omega L_1-j\frac{1}{\omega C_1}}} \cdot \underline{Y}_{11}$$

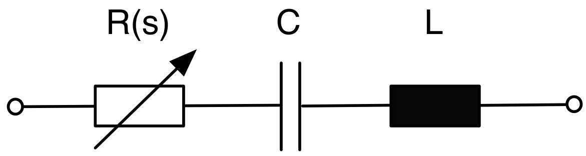
$$= -\left(G_2 + \frac{1}{R_1 + j\omega L_1 - j\frac{1}{\omega C_1}}\right)$$

Da $C_2 = C_3$ gilt, ist die Schaltung (widerstands-)symmetrisch. Daraus folgt: $\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_{11}$.

Außerdem ist die Schaltung reziprok/ kopplungssymmetrisch, da sie ausschließlich aus linearen passiven Bauteilen besteht. Daraus folgt: $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$.

Aufgabe 25

Gegeben sei die folgende Schaltung:

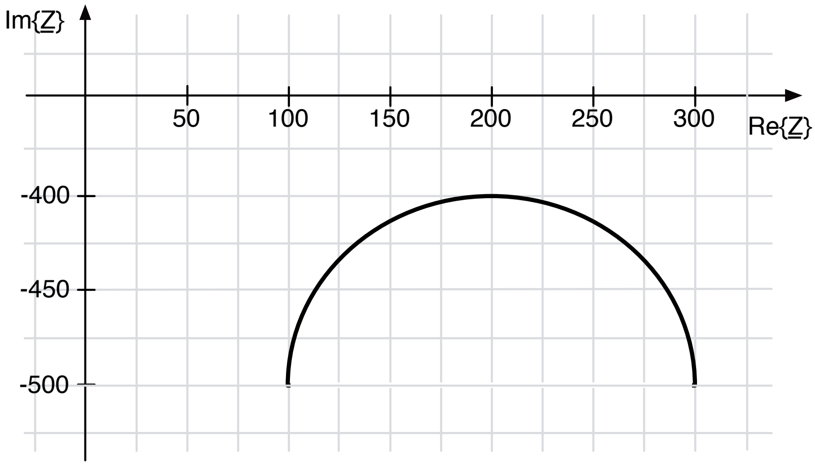


$C = 10\,\mu\mathrm{F}, L = 200\,\mathrm{mH}, \omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}, R(s) = s \cdot 10\,\Omega$ mit s=1...10

(a) Geben Sie die Gleichung der Impedanz $\underline{Z}(s)$ der Schaltung getrennt nach Real- und Imaginärteil an. Rechnen Sie allgemein mit $R(s)$, C und L.
Hinweis: Der Widerstand $R(s)$ sei variabel über die Schalterstellung s.

(b) Setzen Sie nun die Werte ein und zeichnen Sie die vom Widerstand $R(s)$ abhängige Ortskurve der Schaltung. Beschriften Sie die Stellen der Ortskurve für $s = 1$ und $s = 10$.

Es sei nun folgende von L abhängige Ortskurve gegeben:



(c) Leiten Sie aus der Ortskurve das Schaltbild für die zugehörige Schaltung ab. Geben Sie eine kurze Begründung.
Hinweis: Es wurden zwei Widerstände, eine variable Spule sowie ein Kondensator verwendet. Weiterhin sei $\omega = 1000\ s^{-1}$. In der Ortskurve verläuft L von 0 bis ∞.

(d) Stellen Sie die Gleichung der Impedanz der Schaltung aus c) getrennt nach Real- und Imaginärteil auf. Rechnen Sie mit allgemeinen Werten.

(e) Geben Sie nun die Bauteilgrößen der Schaltung mit Ihren Einheiten an. Begründen Sie kurz.
Hinweis: Überlegen Sie, wo in der Ortskurve $L \to 0$ und $L \to \infty$ liegt.

Lösung:

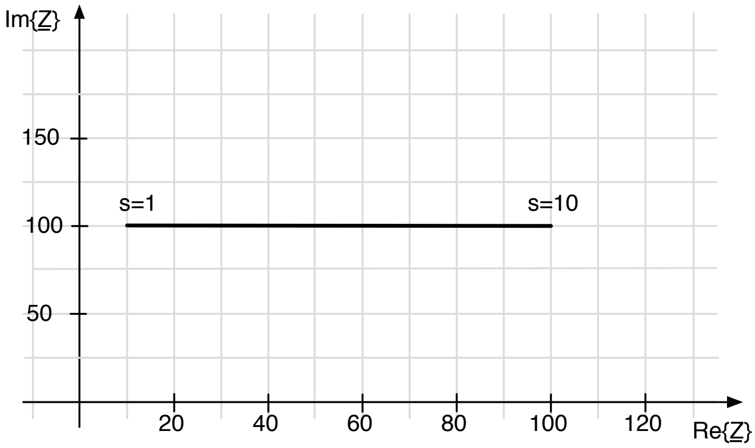
(a) Impedanz:

$$\begin{aligned}\underline{Z}(s) &= R(s) + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L \\ &= R(s) + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\end{aligned}$$

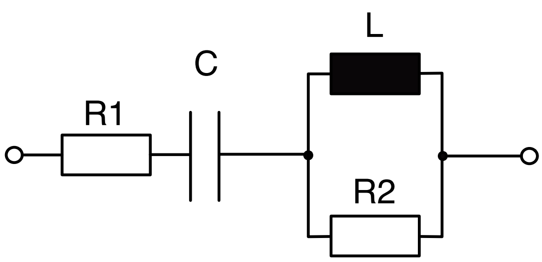
(b) Einsetzen der Werte liefert:

$$\begin{aligned}R(s) &= s \cdot 10\,\Omega \;\; [s = 1...10] \\ \omega L &= 1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 200 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{H} = 200\,\Omega \\ \frac{1}{\omega C} &= \frac{1}{1000\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 10 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}} = 100\,\Omega \\ \underline{Z}(s) &= s \cdot 10\,\Omega + j100\,\Omega\end{aligned}$$

Ortskurve $\underline{Z}(s)$:



(c) Schaltbild:
Aus Anfangspunkt mit negativem Imaginärteil und Realteil ungleich Null muss eine Reihenschaltung aus R und C vorliegen.
Der positiv verlaufende Halbkreis wird durch eine Parallelschaltung aus L und R hervorgerufen.



(d) Impedanz:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}(L) &= R_1 + \frac{1}{j\omega C} + (R_2 \| j\omega L) = R_1 + \frac{1}{j\omega C} + \frac{R_2 \cdot j\omega L}{R_2 + j\omega L} \\
&= R_1 - j\frac{1}{\omega C} + \frac{j\omega L R_2 (R_2 - j\omega L)}{(R_2 + j\omega L)(R_2 - j\omega L)} \\
&= R_1 + \frac{\omega^2 L^2 R_2}{R_2^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\frac{\omega L R_2^2}{R_2^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega C}\right)
\end{aligned}$$

(e) Aus Startpunkt Halbkreis links ($L \to 0$) folgt:

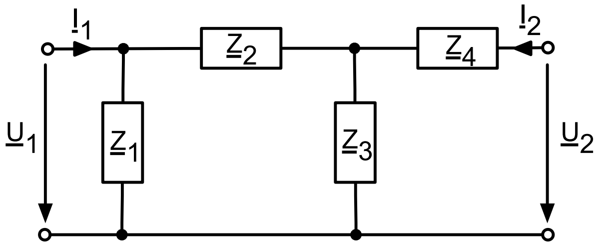
$$\begin{aligned}
\lim_{L\to 0} \underline{Z} &= R_1 + \frac{\omega^2 \cdot 0^2 \cdot R_2}{R_2^2 + \omega^2 \cdot 0^2} + j\left(\frac{\omega \cdot 0 \cdot R_2^2}{R_2^2 + \omega^2 \cdot 0^2} - \frac{1}{\omega C}\right) \\
&= R_1 - j\frac{1}{\omega C} \\
\lim_{L\to 0} Re\{\underline{Z}\} &= 100\,\Omega \qquad \Rightarrow \qquad R_1 = 100\,\Omega \\
\lim_{L\to 0} Im\{\underline{Z}\} &= -500\,\Omega \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{\omega C} = -500\,\Omega \qquad \Rightarrow \qquad C = 2\,\mu\mathrm{F}
\end{aligned}$$

Aus Endpunkt Halbkreis rechts ($L \to \infty$) folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{L\to \infty} \underline{Z} &= R_1 + \frac{\omega^2 R_2}{\frac{R_2^2}{\infty^2} + \omega^2} + j\left(\frac{\frac{\omega R_2^2}{\infty}}{\frac{R_2^2}{\infty^2} + \omega^2} - \frac{1}{\omega C}\right) \\
&= R_1 + R_2 - j\frac{1}{\omega C} \\
\lim_{L\to \infty} Re\{\underline{Z}\} &= 300\,\Omega \qquad \Rightarrow \qquad R_2 = 300\,\Omega - R_1 = 200\,\Omega
\end{aligned}$$

Aufgabe 26

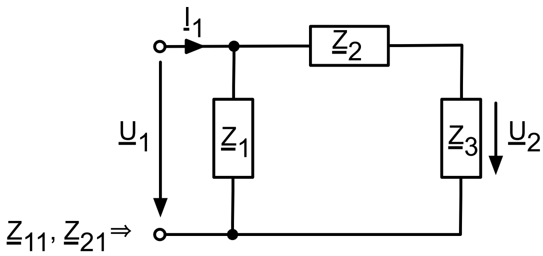
Gegeben sei folgendes 2-Tor:



Bestimmen Sie die $\underline{Z}$-Parameter des Zweitors und zeichnen Sie zwei Ersatzschaltbilder (Bild 1: $\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{21}$; Bild 2: $\underline{Z}_{12}, \underline{Z}_{22}$) mit sämtlichen Vereinfachungen. Ist das Zweitor im Falle von $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_3$ und $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_4$ umkehrbar (reziprok)?

Lösung:

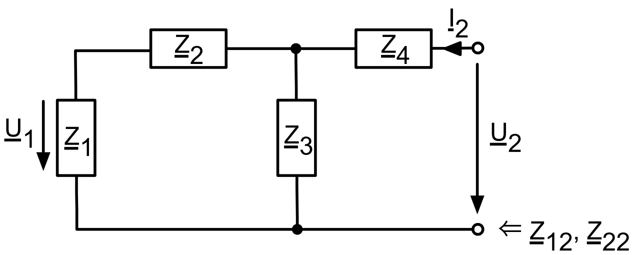
Ersatzschaltbild für $\underline{I}_2 = 0$:



$$\underline{Z}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \underline{Z}_1 \| (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) = \frac{\underline{Z}_1 \cdot (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

$$\underline{Z}_{21} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \cdot \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} \cdot \underline{Z}_{11} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

Ersatzschaltbild für $\underline{I}_1 = 0$:



$$\underline{Z}_{22} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \underline{Z}_4 + \underline{Z}_3 \| (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = \underline{Z}_4 + \frac{\underline{Z}_3 \cdot (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

$$\underline{Z}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \underline{Z}_{21} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}$$

Die Schaltung besteht aus passiven linearen Bauelementen. Deswegen ist sie umkehrbar ($\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21}$). Dieser Fakt ist unabhängig davon, dass $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_3$ und $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_4$. Allerdings ist diese Schaltung nicht symmetrisch. Im Allgemeinen gilt $\underline{Z}_{11} \neq \underline{Z}_{22}$.