

Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: M.Sc. N. Pilia
Tel: 0721 608-48035
Nicolas.Pilia@kit.edu

Tutorium Nr. 8: Bode-Diagramme

Empfohlen für das Tutorium: Aufgaben 30, 31
Empfohlen für Zuhause: Aufgabe 32

Die für das Tutorium empfohlenen Aufgaben dienen als Orientierung und sollen eine grobe Richtlinie darstellen, welche Aufgaben vom Umfang und Schwierigkeitsgrad her in der Zeit des Tutoriums zu schaffen sind. Letztendlich entscheidet der Tutor, welche Aufgaben im Tutorium behandelt werden.

Zusätzlich wird empfohlen, die nicht im Tutorium behandelten Aufgaben zur weiteren Übung zu Hause zu bearbeiten.

Die Studenten sollen die Aufgaben im Tutorium selbstständig in Gruppen bearbeiten und anschließend vorrechnen.

Der Tutor soll lediglich Fragen beantworten und Unklarheiten beseitigen.

Aufgabe 30

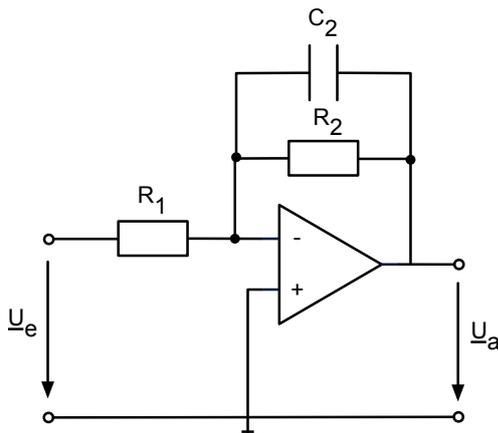


Abb. 1.1

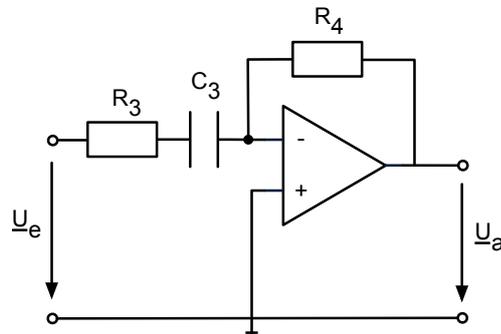


Abb. 1.2

- (a) Geben Sie die Übertragungsfunktion $\frac{U_a}{U_e}$ der idealen OP-Schaltung aus Abb. 1.1 an und bestimmen Sie eine geeignete Normierungsfrequenz Ω_1 für die Übertragungsfunktion.
- (b) Geben Sie die Übertragungsfunktion $\frac{U_a}{U_e}$ der idealen OP-Schaltung aus Abb. 1.2 an und bestimmen Sie eine geeignete Normierungsfrequenz Ω_2 für die Übertragungsfunktion.
- (c) Gegeben sind nun folgende Werte:
 $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 10 \text{ k}\Omega$, $C_2 = 1 \text{ pF}$, $C_3 = 1 \text{ nF}$.
 Zeichnen Sie jeweils ein Bodediagramm (Betrag und Phase) für die Schaltungen aus Abb. 1.1 und Abb. 1.2
 (Maßstäbe: $1 \text{ cm} \rightarrow 20 \text{ dB}$, $1 \text{ cm} \rightarrow 45^\circ = \frac{\pi}{4}$).

Im Folgenden sollen Sie die Frequenz $f = 10 \frac{\text{MHz}}{2\pi}$ verstärken und alle anderen Frequenzen nach Möglichkeit dämpfen. Die Normierungsfrequenz sei jetzt $f_N = 1 \frac{\text{kHz}}{2\pi}$.

- (d) Entwerfen Sie mit Hilfe der Schaltungen aus Abb. 1.1 und Abb. 1.2 und einem Spannungsfolger einen Filter, für den gilt:

$\log \Omega_N$	$a_V [\text{dB}]$
< 2	Steigung + 20 dB/Dekade
2	0
3	20
4	40
5	20
6	0
> 6	Steigung - 20 dB/Dekade

Zeichnen Sie die Schaltung und den **Amplitudengang**.

Wie lautet die gesamte Übertragungsfunktion $\frac{U_a}{U_e}$?

- (e) Zur Dimensionierung, d.h. zur Anpassung an den geforderten Verlauf von a_V sollen nur die Werte für C_2 und C_3 verändert werden. Welche Werte müssen für C_2 und C_3 gewählt werden?

Lösung:

- (a) Übertragungsfunktion zu Abb. 1.1:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{R_2 \parallel \frac{1}{j\omega C_2}}{R_1} = -\frac{R_2 \frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_2}$$

mit $\Omega_1 = \omega R_2 C_2$ wird dies zu $\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\Omega_1}$

- (b) Übertragungsfunktion zu Abb. 1.2:

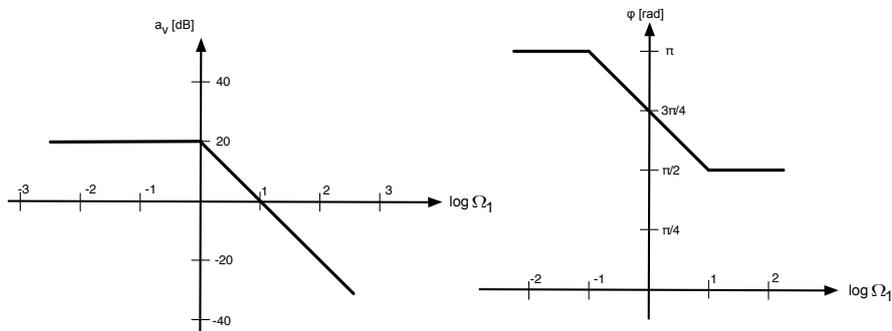
$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{R_4}{R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}} = -\frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{j\omega R_3 C_3}{1 + j\omega R_3 C_3}$$

mit $\Omega_2 = \omega R_3 C_3$ erhält man $\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -\frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{j\Omega_2}{1 + j\Omega_2}$

- (c) Einsetzen der Werte liefert für Abb. 1.1:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -10 \cdot \frac{1}{1 + j\Omega_1}$$

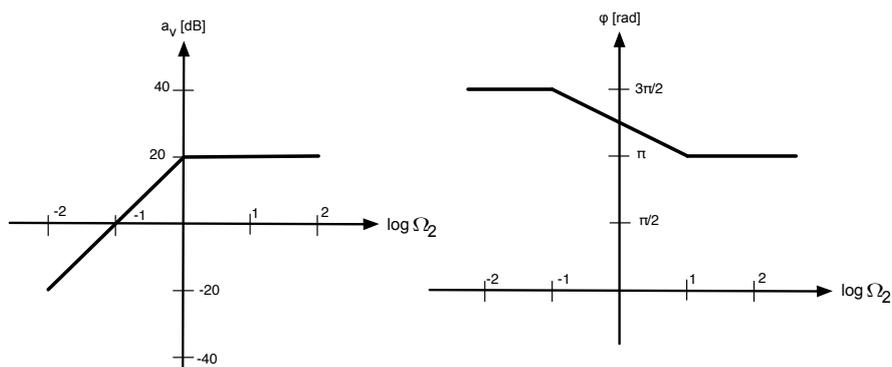
Die -10 im Zähler sorgt im Bodediagramm für einen konstanten Betrags-Offset von 20 dB ($20 \log(|-10|) = 20$ dB) und für eine Phasendrehung um 180° :



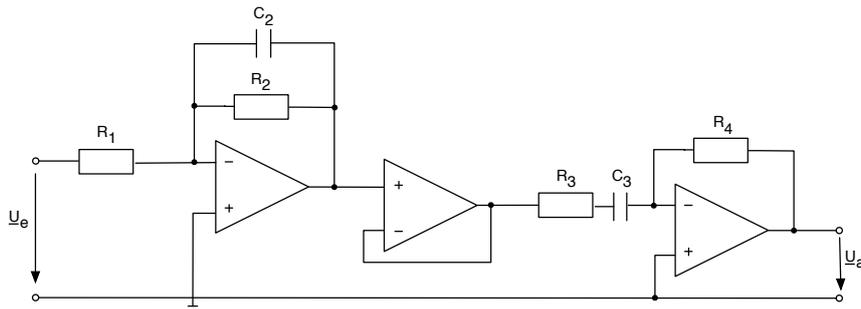
Für Abb. 1.2 wird die Übertragungsfunktion zu:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = -10 \cdot \frac{j\Omega_2}{1 + j\Omega_2}$$

Das zugehörige Bodediagramm sieht folgendermaßen aus:



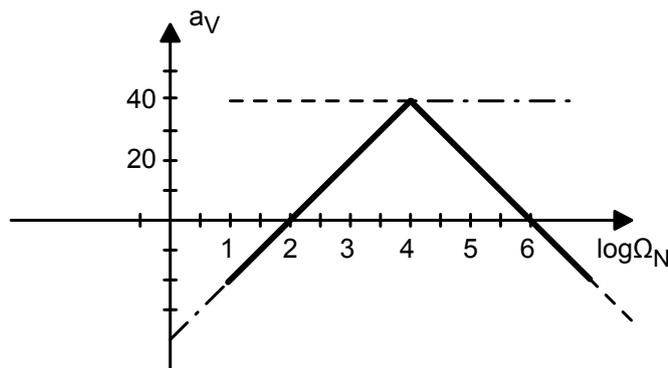
- (d) Die Kombination der Schaltungen aus Abb. 1.1 und Abb. 1.2, verbunden über einen Spannungsfollower, ergibt:



Die Übertragungsfunktionen des Gesamtsystems lässt sich als Kombination der beiden einzelnen Übertragungsfunktionen gewinnen.

$$\begin{aligned} \frac{U_a}{U_e} &= \left(-\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_2} \right) \cdot \left(-\frac{R_4}{R_3} \cdot \frac{j\omega R_3 C_3}{1 + j\omega R_3 C_3} \right) \\ &= \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \cdot \frac{j\omega R_3 C_3}{(1 + j\omega R_2 C_2) \cdot (1 + j\omega R_3 C_3)} \end{aligned}$$

Die im Aufgabentext abgedruckten Werte als Graph:



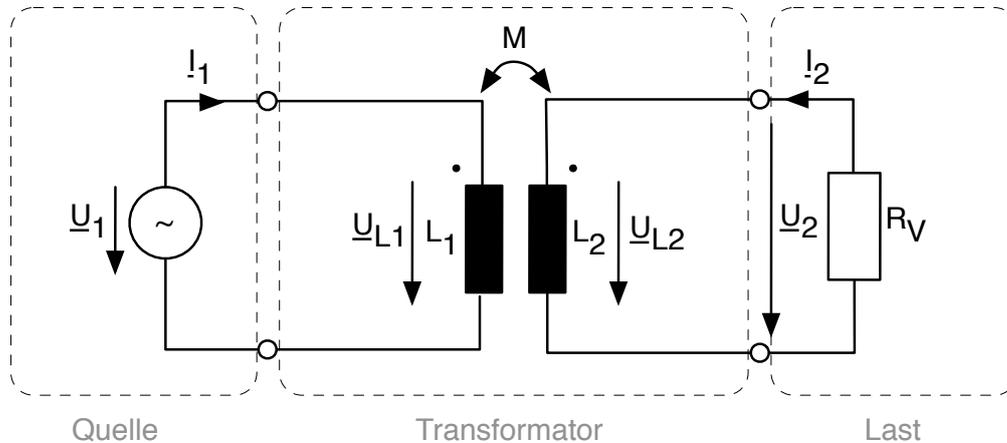
- (e) Die Verschiebung um 20 dB nach oben wird durch die Widerstände bereits realisiert: $\frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} = \frac{100 \text{ k}\Omega \cdot 10 \text{ k}\Omega}{10 \text{ k}\Omega \cdot 1 \text{ k}\Omega} = 100$ bzw. $20 \log(100) = 40 \text{ dB}$. Für die laterale Verschiebung nach rechts müssen C_2 und/oder C_3 angepasst werden:

Mit unverändertem C_2 ist $\omega_1 = \frac{1}{R_2 C_2} = \frac{1}{100 \text{ k}\Omega \cdot 1 \text{ pF}} = 10^7 \text{ s}^{-1}$.

C_3 muss daher 0.1 nF sein, damit $\omega_2 = \frac{1}{R_3 C_3} = \frac{1}{1 \text{ k}\Omega \cdot 0.1 \text{ nF}} = 10^7 \text{ s}^{-1}$.

Aufgabe 31

Gegeben sei folgende Transformator-Schaltung mit $R_V = 200 \Omega$, $L_1 = 120 \text{ mH}$, $L_2 = 480 \text{ mH}$, $M = 180 \text{ mH}$, $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$, $\underline{I}_2 = (-18 + j9) \text{ A}$



Berücksichtigen Sie die magnetische Kopplung zwischen den zwei Spulen. Die Spannungen \underline{U}_{L1} und \underline{U}_{L2} in der magnetischen Kopplung werden durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{L1} &= j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ \underline{U}_{L2} &= j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1.\end{aligned}$$

- (a) Stellen Sie die Maschengleichungen für die Spannungen \underline{U}_1 und \underline{U}_2 sowie die Gleichung für den Spannungsabfall über dem Verbraucher \underline{U}_2 allgemein in Abhängigkeit der Bauteile, Ströme sowie der Kreisfrequenz ω auf.
- (b) Berechnen Sie mithilfe der Lösung aus Aufgabenteil a):
- die Spannung \underline{U}_2 .
 - den Strom \underline{I}_1 .
 - die Spannung \underline{U}_1 .
- (c) Bestimmen Sie die von der Quelle abgegebene komplexe Leistung \underline{S}_{in} und die an den Verbraucher übertragene Leistung \underline{S}_{out} . Berechnen Sie anschließend den Wirkungsgrad $\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}}$.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{U}_{L1} = j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= \underline{U}_{L2} = j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 \\ \underline{U}_2 &= -R_V \cdot \underline{I}_2\end{aligned}$$

(b) (i)

$$\underline{U}_2 = -R_V \cdot \underline{I}_2 = -200 \Omega \cdot (-18 + j9) \text{ A} = (3600 - j1800) \text{ V}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 \underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_2 - j\omega L_2 \underline{I}_2}{j\omega M} \\
 &= \frac{(3600 - j1800) \text{ V} - j100 \text{ s}^{-1} \cdot 480 \cdot 10^{-3} \text{ H} \cdot (-18 + j9) \text{ A}}{j100 \text{ s}^{-1} \cdot 180 \cdot 10^{-3} \text{ H}} \\
 &= (-52 - j224) \text{ A}
 \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_1 &= j\omega L_1 \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\
 &= j100 \text{ s}^{-1} \cdot 120 \cdot 10^{-3} \text{ H} \cdot (-52 - j224) \text{ A} \\
 &\quad + j100 \text{ s}^{-1} \cdot 180 \cdot 10^{-3} \text{ H} \cdot (-18 + j9) \text{ A} \\
 &= (2526 - j948) \text{ V}
 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
 \underline{S}_{in} &= \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* = (2526 - j948) \text{ V} \cdot (-52 + j224) \text{ A} \\
 &= (81000 + j615120) \text{ VA} \\
 \underline{S}_{out} &= \underline{U}_2 \cdot (-\underline{I}_2)^* = (3600 - j1800) \text{ V} \cdot (18 + j9) \text{ A} \\
 &= 81000 \text{ VA} \\
 \eta &= \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{\text{Re}\{\underline{S}_{out}\}}{\text{Re}\{\underline{S}_{in}\}} = \frac{81000 \text{ W}}{81000 \text{ W}} = 1
 \end{aligned}$$

Aufgabe 32

Gegeben sei die folgende Filterschaltung bestehend aus zwei Teilschaltungen verbunden über einen Spannungsfolger:

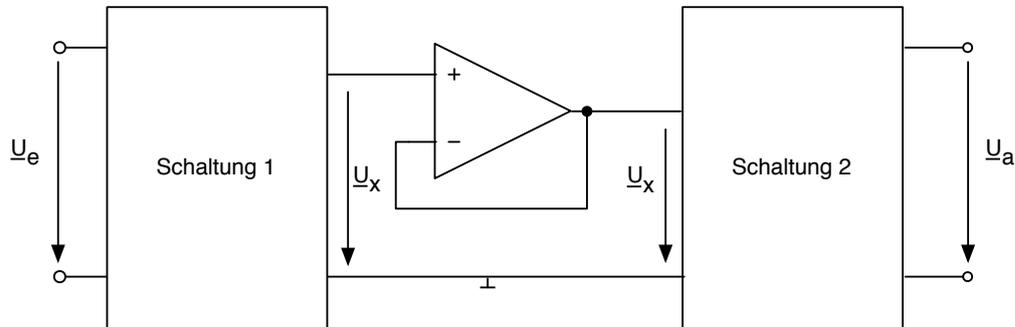


Abb. 1.1: Schaltung

sowie das zugehörige Bodediagramm (Betrag und Phase):

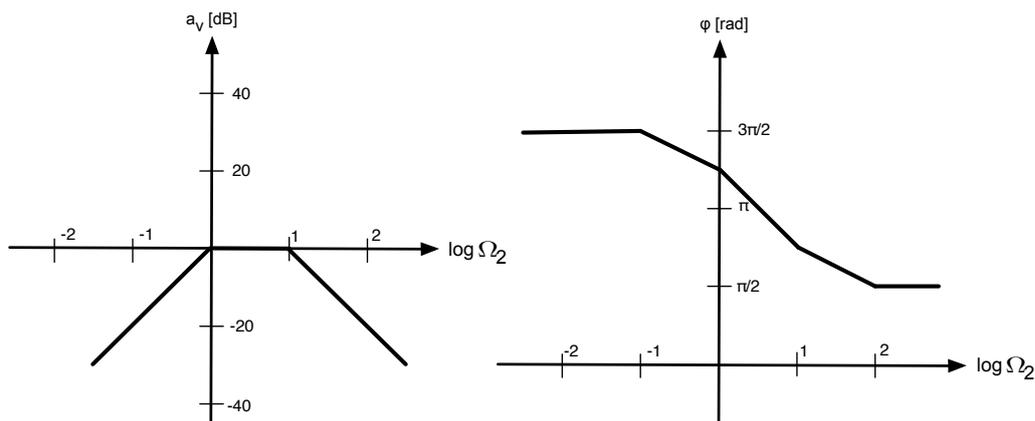


Abb. 1.2: Bodediagramm

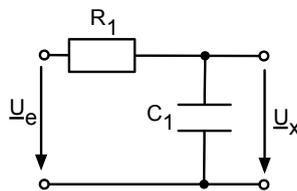
Die Schaltung 1 habe die Übertragungsfunktion $\frac{U_x}{U_e} = \frac{1}{1+j\Omega_1}$ mit der Normierungsfrequenz Ω_1 .

- (a) (i) Zeichnen Sie die Schaltung 1, welche die Übertragungsfunktion $\frac{U_x}{U_e}$ besitzt. Die Schaltung soll passiv und möglichst einfach sein (Bauteile: R_1 und C_1).
- (ii) Geben Sie die Normierungsfrequenz Ω_1 an.
- (iii) Zeichnen Sie das Bodediagramm (Betrag und Phase) mit der Normierungsfrequenz Ω_1 für diese Schaltung.
- (iv) Geben Sie das Verhältnis $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ an.
- (b) (i) Zeichnen Sie mithilfe von Aufgabenteil a) das Bodediagramm (Betrag und Phase) mit der Normierungsfrequenz Ω_2 für die Schaltung 2.
- (ii) Zeichnen Sie die Schaltung 2. Die Schaltung soll aktiv und möglichst einfach sein (Bauteile: R_2, R_3 und C_2).

- (iii) Geben Sie die Übertragungsfunktion $\frac{U_a}{U_x}$ von Schaltung 2 an.
 (iv) Geben Sie die Normierungsfrequenz Ω_2 an.
 (v) Bestimmen Sie mithilfe des Bodediagramms zu Schaltung 2 den konstanten Faktor in der Übertragungsfunktion der Schaltung 2.
- (c) (i) Zeichnen Sie die Gesamtschaltung.
 (ii) Geben Sie die Übertragungsfunktion $\frac{U_a}{U_e}$ der Gesamtschaltung an.
 (iii) Bestimmen Sie mithilfe der Aufgabenteile a) iv) und b) v) die Kapazität C_2 für $R_1 = 100 \Omega$, $R_3 = 50 \Omega$, $C_1 = 10 \text{ nF}$.

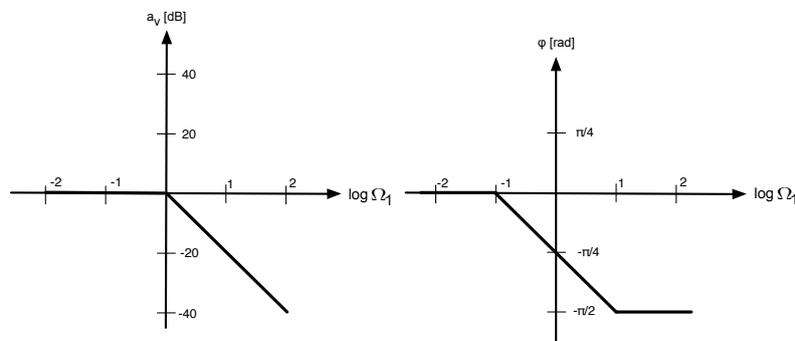
Lösung:

- (a) (i) Schaltung 1:



$$\frac{U_x}{U_e} = \frac{\frac{1}{j\omega C_1}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1} = \frac{1}{1 + j\Omega_1}$$

- (ii) Normierungsfrequenz: $\Omega_1 = \omega R_1 C_1$
 (iii) Bodediagramm zu Schaltung 1:

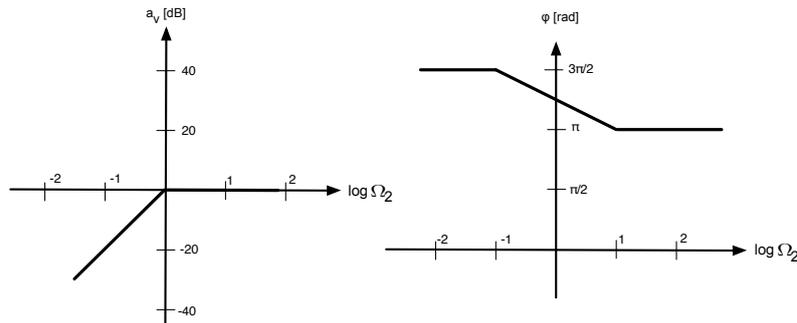


- (iv) Vergleicht man das Betrags-Bodediagramm aus Abb. 1.2 mit dem Betrags-Bodediagramm aus Aufgabenteil a) iii), so stellt man fest, dass die normierende Frequenz ω_2 zu einem "früheren" Knick im Bodediagramm führt. Dadurch muss ω_2 kleiner als ω_1 sein. Für das Verhältnis gilt dann: $\frac{\omega_2}{\omega_1} = 0.1$. Allerdings muss man an dieser Stelle sehr vorsichtig sein. Die normierenden Frequenzen haben das vorgegebene Verhältnis. Allerdings haben die normierten Frequenzen den Kehrwert des Verhältnisses:

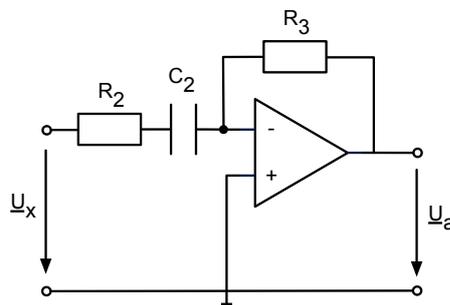
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 0.1 \Rightarrow \frac{\frac{1}{\omega_1}}{\frac{1}{\omega_2}} = 0.1 \Rightarrow \frac{\frac{\omega}{\omega_1}}{\frac{\omega}{\omega_2}} = 0.1$$

$$\frac{\Omega_1}{\Omega_2} = 0.1 \Rightarrow \frac{\Omega_2}{\Omega_1} = 10$$

- (b) (i) Subtrahiert man das Bodediagramm von Schaltung 1 vom Bodediagramm der Gesamtschaltung, folgt für das Bodediagramm von Schaltung 2:



- (ii) Schaltung 2:



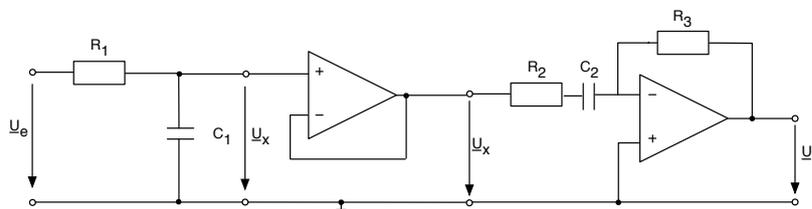
- (iii) Für die Übertragungsfunktion $\frac{U_a}{U_x}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{U_a}{U_x} &= -\frac{R_3}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}} = -\frac{R_3 \cdot j\omega C_2}{1 + j\omega R_2 C_2} \\ &= -\frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega R_2 C_2} = -\frac{R_3}{R_2} \cdot \frac{j\Omega_2}{1 + j\Omega_2} \end{aligned}$$

- (iv) Normierungsfrequenz: $\Omega_2 = \omega R_2 C_2$

- (v) Kein Offset im Betrags-Bodediagramm von Schaltung 2, daher folgt für den konstanten Faktor: $\frac{R_3}{R_2} = 1$

- (c) (i) Gesamtschaltung:



- (ii) Für die Gesamtübertragungsfunktion $\frac{U_a}{U_e}$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{U_a}{U_e} &= \frac{U_x}{U_e} \cdot \frac{U_a}{U_x} = \frac{1}{1 + j\Omega_1} \cdot \left(-\frac{R_3}{R_2}\right) \cdot \frac{j\Omega_2}{1 + j\Omega_2} \\ &= \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1} \cdot \left(-\frac{R_3}{R_2}\right) \cdot \frac{j\omega R_2 C_2}{1 + j\omega R_2 C_2} \end{aligned}$$

(iii) Es gilt:

$$\text{Mit b) v):} \quad \frac{R_3}{R_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad R_2 = R_3$$

$$\begin{aligned} \text{Mit a) iv):} \quad \frac{\Omega_2}{\Omega_1} &= 10 = \frac{\omega R_2 C_2}{\omega R_1 C_1} = \frac{R_2 C_2}{R_1 C_1} \\ \Rightarrow C_2 &= 10 \cdot \frac{R_1 C_1}{R_2} \stackrel{R_2=R_3}{=} 10 \cdot \frac{R_1 C_1}{R_3} \\ &= 10 \cdot \frac{100 \Omega \cdot 10 \cdot 10^{-9} \text{ F}}{50 \Omega} = 200 \text{ nF} \end{aligned}$$