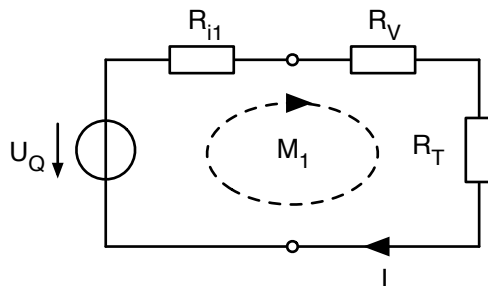


Aufgabe 1 (Lösung)

a) Die vom Widerstand R_T aufgenommene Leistung ist $P_{R_T} = U \cdot I = R_T \cdot I^2$

Den Strom I erhält man über der Maschengleichung für M_1 :



$$U_Q = (R_{i1} + R_V + R_T) \cdot I$$

$$\text{bzw. } I = \frac{U_Q}{R_{i1} + R_V + R_T}$$

Somit wird P_{R_T} zu

$$P_{R_T} = U_Q^2 \cdot \frac{R_T}{(R_{i1} + R_V + R_T)^2}$$

Ein Extremum der Leistung erhält man als Nullstelle der ersten Ableitung von P_{R_T} .

$$\begin{aligned} \frac{dP_{R_T}}{dR_T} \stackrel{!}{=} 0 &= U_Q^2 \left(\frac{1 \cdot (R_{i1} + R_V + R_T)^2 - 2R_T \cdot (R_{i1} + R_V + R_T)}{(R_{i1} + R_V + R_T)^4} \right) \\ &= U_Q^2 \left(\frac{R_{i1} + R_V + R_T - 2R_T}{(R_{i1} + R_V + R_T)^3} \right) \\ &= U_Q^2 \frac{R_{i1} + R_V - R_T}{(R_{i1} + R_V + R_T)^3} \end{aligned}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seiten wird zu Null für $R_T = R_{i1} + R_V$.

Da P_{R_T} positiv ist und aus dem Wissen, dass $P_{R_T}(R_T)$ für große wie kleine R_T gegen Null geht, schließen wir auf ein Maximum an dieser Stelle (hinreichende Bedingung).

Das Einsetzen der in der Aufgabenstellung angeführten Temperaturabhängigkeit liefert

$$\begin{aligned} R_0[1 + \alpha(T - T_0)] &= R_{i1} + R_V \\ \alpha(T - T_0) &= \frac{R_{i1} + R_V}{R_0} - 1 \\ T &= \frac{R_{i1} + R_V}{R_0 \alpha} - \frac{1}{\alpha} + T_0 \end{aligned}$$

Für die gegebenen Werte ergibt sich schliesslich das gesuchte T zu :

sowie

$$T = 150\text{K} - 100\text{K} + 300\text{K} = 350\text{K}$$

$$R_T(350\text{K}) = 40\Omega \left(1 + \frac{350 - 300}{100} \right) = 60\Omega$$

$$P_{R_T}(350\text{K}) = (50\text{V})^2 \frac{60\Omega}{(25\Omega + 35\Omega + 60\Omega)^2} \approx 10,42\text{W}$$

b) gesucht wird R_V so, dass P_{R_T} maximal 10W annimmt.

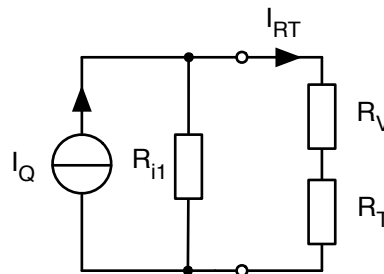
Aus a) folgt $P_{R_T} = U_Q^2 \cdot \frac{R_T}{(R_{i1} + R_V + R_T)^2} \leq 10W$

Die maximale Leistung tritt bei Leistungsanpassung auf, d.h. $R_T = R_{i1} + R_V$

$$\begin{aligned} P_{R_T} &= U_Q^2 \frac{R_{i1} + R_V}{(2R_{i1} + 2R_V)^2} = U_Q^2 \frac{R_{i1} + R_V}{4(R_{i1} + R_V)^2} \\ &= U_Q^2 \frac{1}{4(R_{i1} + R_V)} \leq 10W \\ \frac{U_Q^2}{4 \cdot 10W} &\leq R_{i1} + R_V \\ R_V &\geq \frac{U_Q^2}{40W} - R_{i1} = 37,5\Omega \end{aligned}$$

c) I_Q ergibt sich über

$$I_Q = \frac{U_Q}{R_{i1}} = \frac{50V}{25\Omega} = 2A$$



d) Die Leistung an R_T kann durch

$$P_{R_T} = I_{R_T}^2 \cdot R_T$$

und das dazu nötige I_{R_T} wiederum über

$$\begin{aligned} U_{R_{i1}} &= U_{R_V} + U_{R_T} \\ (I_Q - I_{R_T}) \cdot R_{i1} &= I_{R_T} \cdot (R_V + R_T) \\ I_{R_T} &= I_Q \frac{R_{i1}}{R_V + R_T + R_{i1}} \\ &\stackrel{a) \ R_T = R_V + R_{i1}}{=} I_Q \frac{R_{i1}}{2R_V + 2R_{i1}} \\ &= 1,25A \end{aligned}$$

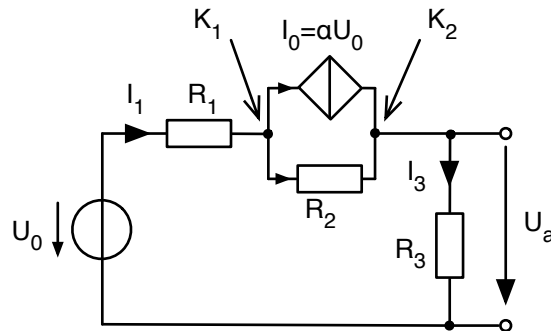
bestimmt werden, woraus schließlich das gesuchte P_{R_T} folgt

$$P_{R_T} = I_{R_T}^2 \cdot R_T = (1,25A)^2 \cdot (10\Omega + 25\Omega) = 54,69W$$

Aufgabe 2 (Lösung)

a) Die Lösung lässt sich auf zwei Wegen bestimmen. Einmal direkt, und einmal durch Umwandlung der gesteuerten Stromquelle in die zu ihr äquivalente Spannungsquelle.

Als erstes folgt die Berechnung anhand des vorliegenden Layouts.



Im Leerlauf ist U_a gleich der Spannung über dem Widerstand R_3 .

Am Knoten K_1 gilt $I_1 - I_0 - I_2 = 0$, an K_2 $I_0 + I_2 - I_3 = 0$.

Die dritte Gleichung lautet $U_0 = I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3$

Das Gleichsetzen der ersten beiden liefert $I_1 = I_3$

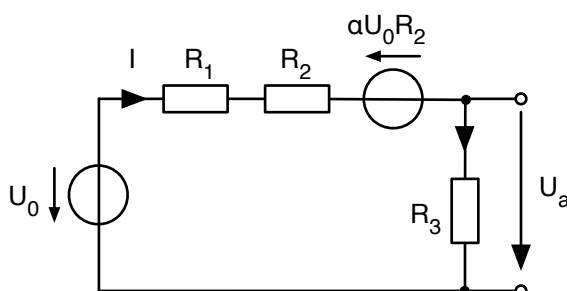
Löst man die zweite nach I_2 auf und setzt dies zusammen mit $I_1 = I_3$ in die dritte ein, erhält man

$$\begin{aligned} U_0 &= I_3 R_1 + (I_3 - I_0) R_2 + I_3 R_3 \\ U_0 + I_0 R_2 &= I_3 (R_1 + R_2 + R_3) \\ I_3 &= \frac{U_0 + I_0 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned}$$

Damit lässt sich nun das gesuchte U_a berechnen:

$$U_a = I_3 R_3 = \frac{(U_0 + I_0 R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} R_3 = \frac{U_0 + \alpha U_0 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} R_3 = \frac{(1 + \alpha R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3} U_0$$

Wesentlich schneller findet man die Lösung, wenn R_2 als Innenwiderstand der Quelle I_0 interpretiert wird und man diese zuerst in eine Spannungsquelle umwandelt, wobei der neue Spannungspfeil dem alten Strompfeil entgegengerichtet (vgl. Abb. 1.37). In der verbleibenden Masche gilt



$$\begin{aligned} U_0 &= I(R_1 + R_2 + R_3) - \alpha U_0 R_2 \\ I &= \frac{U_0 + \alpha U_0 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1 + \alpha R_2}{R_1 + R_2 + R_3} U_0 \\ U_a &= U_{R_3} = I R_3 \\ &= \frac{1 + \alpha R_2}{R_1 + R_2 + R_3} U_0 R_3 \end{aligned}$$

b) Durch den Kurzschluss am Ausgang wird R_3 wirkungslos und kann somit vernachlässigt werden.

Unter Verwendung des zweiten Weges aus a) ergibt sich

$$\begin{aligned} U_0 &= I_K(R_1 + R_2) - \alpha U_0 R_2 \\ I_K &= \frac{U_0 + \alpha U_0 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1 + \alpha R_2}{R_1 + R_2} U_0 \end{aligned}$$

c) Die im Kurzschlussfall in R_1 verbrauchte Leistung ist $P_{R_1} = I_K^2 R_1$

aus b) erhält man

$$P_{R_1} = \left(\frac{1 + \alpha R_2}{R_1 + R_2} U_0 \right)^2 R_1 \stackrel{!}{=} 0$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn $1 + \alpha R_2 = 0$, und damit folgt

$$\alpha = -\frac{1}{R_2}$$

d) Der Innenwiderstand der Schaltung lässt sich als Quotient von Leerlaufspannung und Kurzschlussstrom berechnen:

$$\begin{aligned} R_i &= \frac{U_L}{I_K} \\ &= \frac{\frac{1 + \alpha R_2}{R_1 + R_2 + R_3} U_0 R_3}{\frac{1 + \alpha R_2}{R_1 + R_2} U_0} \\ &= \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} R_3 \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Lösung)

Die linke Schaltung lässt sich folgendermaßen zusammenfassen

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_a} &= \frac{2}{R_1} + \frac{4}{R_2} = \frac{2R_2 + 4R_1}{R_1 R_2} \\ R_a &= \frac{U_1}{I_1} \rightarrow \frac{1}{R_a} = \frac{I_1}{U_1} \\ \frac{2R_2 + 4R_1}{R_1 R_2} &= \frac{4\text{A}}{100\text{V}} \\ 2R_2 + 4R_1 &= \frac{R_1 R_2}{25\Omega} \\ R_1 &= \frac{R_1 R_2}{100\Omega} - \frac{1}{2}R_2\end{aligned}$$

Analog dazu die rechte Schaltung

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_b} &= \frac{4}{R_1} + \frac{2}{R_2} = \frac{4R_2 + 2R_1}{R_1 R_2} \\ R_b &= \frac{U_2}{I_2} \rightarrow \frac{1}{R_b} = \frac{I_2}{U_2} \\ \frac{4R_2 + 2R_1}{R_1 R_2} &= \frac{3,2\text{A}}{100\text{V}} \\ 4R_2 + 2R_1 &= \frac{R_1 R_2}{31,25\Omega} \\ R_1 &= \frac{R_1 R_2}{62,5\Omega} - 2R_2\end{aligned}$$

Setz man beide gleich, folgt

$$\begin{aligned}\frac{R_1 R_2}{100\Omega} - \frac{1}{2}R_2 &= \frac{R_1 R_2}{62,5\Omega} - 2R_2 \\ \frac{R_1}{100\Omega} - \frac{1}{2} &= \frac{R_1}{62,5\Omega} - 2 \\ \left(\frac{1}{100\Omega} - \frac{1}{62,5\Omega}\right) R_1 &= -\frac{3}{2} \\ R_1 &= -\frac{3}{2} \cdot -\frac{500\Omega}{3} = 250\Omega\end{aligned}$$

und Rückeinsetzen in die allererste Gleichung liefert schließlich

$$\begin{aligned}\frac{I_1}{U_1} &= \frac{2}{R_1} + \frac{4}{R_2} \\ \frac{4}{R_2} &= \frac{I_1}{U_1} - \frac{2}{R_1} \\ &= \frac{4\text{A}}{100\text{V}} - \frac{2}{250\Omega} \\ &= \frac{4}{125\Omega} \\ R_2 &= 125\Omega\end{aligned}$$