Lösung Aufgabe 1

Hier kommt das nicht formalisierte Verfahren zum Einsatz.

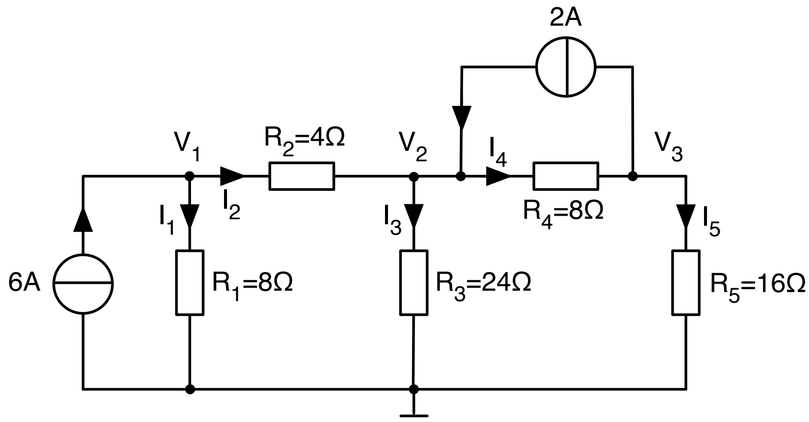


Abb. L1

Die Spannungen an den Widerständen lassen sich als Differenzen der Potentiale darstellen.

$$
\begin{aligned}
&U_{R_1} = V_1 && I_1 = \tfrac{1}{R_1} \cdot (V_1 - V_{ref}) = \tfrac{1}{R_1} \cdot V_1 \\
&U_{R_2} = V_1 - V_2 && I_2 = \tfrac{1}{R_2} \cdot (V_1 - V_2) \\
&U_{R_3} = V_2 && I_3 = \tfrac{1}{R_3} \cdot (V_2 - V_{ref}) = \tfrac{1}{R_2} \cdot V_2 \\
&U_{R_4} = V_2 - V_3 && I_4 = \tfrac{1}{R_4} \cdot (V_2 - V_3) \\
&U_{R_5} = V_3 && I_5 = \tfrac{1}{R_5} \cdot (V_3 - V_{ref}) = \tfrac{1}{R_5} \cdot V_3
\end{aligned}
$$

Die Ströme werden mit Hilfe der Knotenregel bestimmt

$$
\begin{aligned}
&V_1: & 6\mathrm{A} &= I_1 + I_2 & V_1: && 6\mathrm{A} &= \tfrac{1}{R_1}V_1 + \tfrac{1}{R_2}V_1 - \tfrac{1}{R_2}V_2 \\
&V_2: & 2\mathrm{A} + I_2 &= I_3 + I_4 & V_2: && 2\mathrm{A} + \tfrac{1}{R_2}V_1 - \tfrac{1}{R_2}V_2 &= \tfrac{1}{R_3}V_2 + \tfrac{1}{R_4}V_2 - \tfrac{1}{R_4}V_3 \\
&V_3: & -2\mathrm{A} + I_4 &= I_5 & V_3: && -2\mathrm{A} + \tfrac{1}{R_4}V_2 - \tfrac{1}{R_4}V_3 &= \tfrac{1}{R_5}V_3
\end{aligned}
$$

Zusammenfassen der Gleichungen auf der rechten Seite

$$
\begin{aligned}
&V_1: \quad 6\mathrm{A} = \left(\tfrac{1}{R_1} + \tfrac{1}{R_2}\right) V_1 - \tfrac{1}{R_2} V_2 \\
&V_2: \quad 2\mathrm{A} = -\tfrac{1}{R_2} V_1 + \left(\tfrac{1}{R_2} + \tfrac{1}{R_3} + \tfrac{1}{R_4}\right) V_2 - \tfrac{1}{R_4} V_3 \\
&V_3: \quad 2\mathrm{A} = \tfrac{1}{R_4} V_2 - \left(\tfrac{1}{R_4} + \tfrac{1}{R_5}\right) V_3
\end{aligned}
$$

1. Möglichkeit: konventionelles Lösen eines Linearen Gleichungssystems

$$\text{aus } V_1: \quad V_1 = \frac{6\text{A}}{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{R_2}{R_1}+1\right)}V_2$$

$$\text{aus } V_3: \quad V_3 = -\frac{2\text{A}}{\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{R_4}{R_5}+1\right)}V_2$$

in V_2 einsetzen

$$\begin{aligned}
2\text{A} &= -\frac{6\text{A}}{\left(\frac{R_2}{R_1}+1\right)} - \frac{1}{\left(\frac{R_2}{R_1}+\right)R_2}V_2 + \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right)V_2 + \frac{2\text{A}}{\left(1+\frac{R_4}{R_5}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{R_4}{R_5}+1\right)R_4}V_2 \\
2\text{A} &= -\frac{6\text{A}}{1,5} - \frac{1}{6\Omega}V_2 + \frac{5}{12\Omega}V_2 + \frac{2\text{A}}{1,5} - \frac{1}{12\Omega}V_2 \\
\frac{14}{3}\text{A} &= \frac{1}{6\Omega}V_2 \\
V_2 &= 28\text{V} \\
V_1 &= \frac{6\text{A}}{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{R_2}{R_1}+1\right)} \cdot 28\text{V} = 16\text{V} + \frac{56}{3}\text{V} = 34,67\text{V} \\
V_3 &= -\frac{2\text{A}}{\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{R_4}{R_5}+1\right)} \cdot 28\text{V} = -\frac{32}{3}\text{V} + \frac{56}{3}\text{V} = 8\text{V}
\end{aligned}$$

2. Möglichkeit: Gaußsches Eliminationsverfahren

Zunächst Umformen in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{16} \end{pmatrix} \frac{1}{\Omega} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\text{A} \\ 2\text{A} \\ -2\text{A} \end{pmatrix} \iff \begin{array}{ccc|c} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 6 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{8} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{16} & -2 \end{array}$$

Gaußsches Eliminationsverfahren:
Ein lineares Gleichungssystem (LGS) wird durch elementare Umformungen in ein einfacher zu lösendes LGS umgeformt, das die gleich Lösung hat (s. auch: Repetitorium der Höheren Mathematik, Bronstein).
Um das Schema des Eliminationsverfahrens übersichtlich zu halten, wird hier ohne Einheiten gerechnet. Die Einheiten finden Sie wieder bei den Endergebnissen.

$$\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 6 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{8} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{16} & -2 \end{array}$$

Zeile 2 mit 3/2 multiplizieren und zu Zeile 3 addieren,

$$\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 6 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{8} & 2 \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}$$

Zeile 1 zu Zeile 3 addieren

$$\left.\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & 0 & 6 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{8} & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 7 \end{array}\right.$$

Zeile 3 zu Zeile 1 addieren

$$\left.\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{8} & 0 & 0 & 13 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{8} & 2 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 7 \end{array}\right.$$

Zeile 3 mit 5/3 multiplizieren und von Zeile 2 subtrahieren

$$\left.\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{8} & 0 & 0 & 13 \\ -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{29}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 7 \end{array}\right.$$

links die Brüche eliminieren

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{104}{3} \\ 2 & 0 & 1 & \frac{232}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 28 \end{array}\right.$$

Daraus lassen sich V_1 und V_2 direkt ablesen

$$V_1 = \frac{104}{3}V$$
$$V_2 = 28V$$

Für V_3 ist noch eine kurze Rechnung notwendig

$$2V_1 + V3 = \frac{232}{3}V$$
$$V_3 = \frac{232}{3}V - 2V_1 = \frac{232}{3}V - \frac{208}{3}V = 8V$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{104}{3}\mathrm{V} \\ 28\mathrm{V} \\ 8\mathrm{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \approx 34,67\mathrm{V} \\ 28\mathrm{V} \\ 8\mathrm{V} \end{pmatrix}$$

Lösung Aufgabe 2

Formalisiertes Maschenstromverfahren

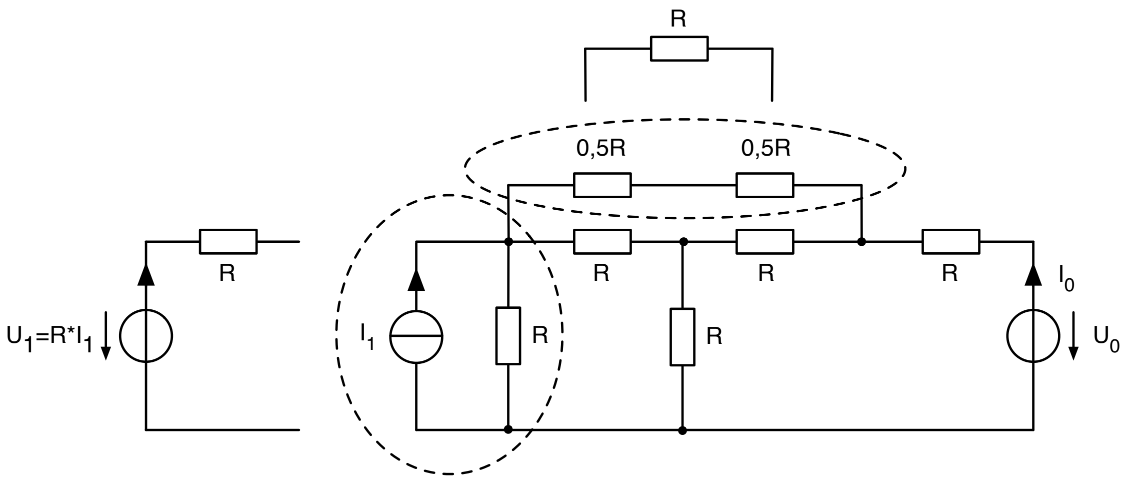
Aufstellen der Matrix:

***Hauptdiagonale*: Summe aller Widerstände in Masche i**

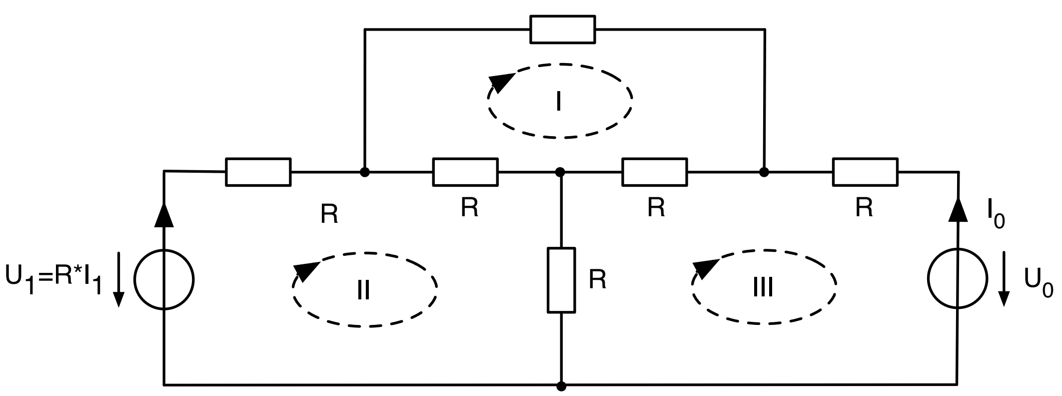
***Nebendiagonale*: Summe aller gemeinsamen Widerstände der Masche i und Masche j**
- *pos. Vorzeichen wenn Maschenströme I_i und I_j gleichsinnig*
- *neg. Vorzeichen wenn Maschenströme I_i und I_j gegensinnig*

***Vektor*: Summe aller Quellenspannungen**
- *neg. Vorzeichen wenn Zählpfeile von Quellenspannung U_i und Maschenstrom I_i gleichsinnig*
- *pos. Vorzeichen wenn Zählpfeile von Quellenspannung U_i und Maschenstrom I_i gegensinnig*

Vor dem Ablesen der Werte sollte die Schaltung so weit wie möglich vereinfacht werden.
Dazu werden im vorliegenden Fall zum einen Widerstände zusammengefasst und zum anderen die Stromquelle durch eine Spannungsquelle ersetzt.



Damit erhält man



Aus diesem Schaltplan können die Werte für die Widerstandsmatrix und den Quellenspannungs-Vektor abgelesen werden.

$$\begin{pmatrix} 3R & -R & -R \\ -R & 3R & -R \\ -R & -R & 3R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \cdot I_1 \\ -U_0 \end{pmatrix}$$

Die Bestimmung der Ströme erfolgt mittels der Cramerschen Regel

$$I_0 = -I_{III} \qquad I_{III} = \frac{\begin{vmatrix} 3R & -R & 0 \\ -R & 3R & RI_1 \\ -R & -R & -U_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3R & -R & -R \\ -R & 3R & -R \\ -R & -R & 3R \end{vmatrix}}$$

Das Minus vor I_{III} ist durch die Gegenläufigkeit von I_0 und I_{III} begründet.

Die obere Determinante:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3R & -R & 0 \\ -R & 3R & RI_1 \\ -R & -R & -U_0 \end{vmatrix} &= 3R \cdot (-3RU_0 + R^2 I_1) + R \cdot (RU_0) - R \cdot (-R^2 I_1) \\ &= -9R^2 U_0 + 3R^3 I_1 + R^2 U_0 + R^3 I_1 \\ &= 4R^3 I_1 - 8R^2 U_0 \end{aligned}$$

Die untere Determinante:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3R & -R & -R \\ -R & 3R & -R \\ -R & -R & 3R \end{vmatrix} &= 3R \cdot \begin{vmatrix} 3R & -R \\ -R & 3R \end{vmatrix} + R \cdot \begin{vmatrix} -R & -R \\ -R & 3R \end{vmatrix} - R \cdot \begin{vmatrix} -R & 3R \\ -R & -R \end{vmatrix} \\ &= 3R \cdot (9R^2 - R^2) + R \cdot (-3R^2 - R^2) - R \cdot (R^2 + 3R^2) \\ &= 27R^3 - 3R^3 - 3R^3 - R^3 - R^3 - 3R^3 \\ &= 16R^3 \end{aligned}$$

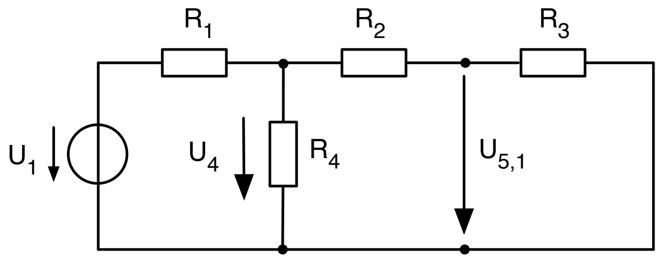
Und damit

$$I_0 = -I_{III} = \frac{8R^2 U_0 - 4R^3 I_1}{16R^3} = \frac{2U_0 - RI_1}{4R}$$

Lösung Aufgabe 3

Die Spannnung U_5 erhalten wir mittels Superposition.

Zuerst wird die Spannungsquelle U_2 durch einen Kurzschluss ersetzt.



$U_{5,1}$ kann über die Spannungsteilerregel ermittelt werden.

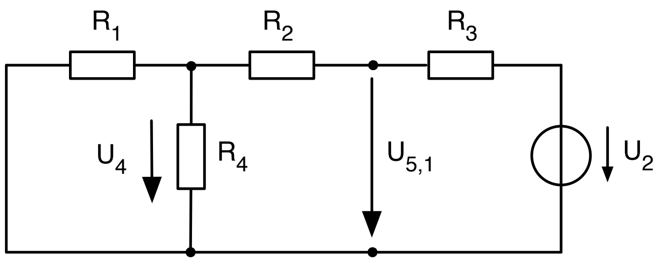
$$U_{5,1} = U_4 \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$\begin{aligned}
U_4 &= U_1 \frac{R_4 \parallel (R_2 + R_3)}{R_1 + R_4 \parallel (R_2 + R_3)} \\
&= U_1 \frac{\frac{R_4(R_2+R_3)}{R_2+R_3+R_4}}{R_1 + \frac{R_4(R_2+R_3)}{R_2+R_3+R_4}} \\
&= U_1 \frac{R_4(R_2 + R_3)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_4(R_2 + R_3)}
\end{aligned}$$

Einsetzen von U_4 in die Gleichung für $U_{5,1}$ liefert

$$\begin{aligned}
U_{5,1} &= U_1 \frac{R_4(R_2 + R_3)}{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_4(R_2 + R_3)} \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} \\
&= 40\mathrm{V} \frac{\frac{1}{2}(1+1)}{\frac{2}{5}(1 + 1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(1+1)} \cdot \frac{1}{1+1} \\
&= 40 \frac{1}{\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} + 1} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{V} = \frac{40}{4}\mathrm{V} = 10\mathrm{V}
\end{aligned}$$

Nun wird U_1 durch einen Kurzschluss ersetzt.

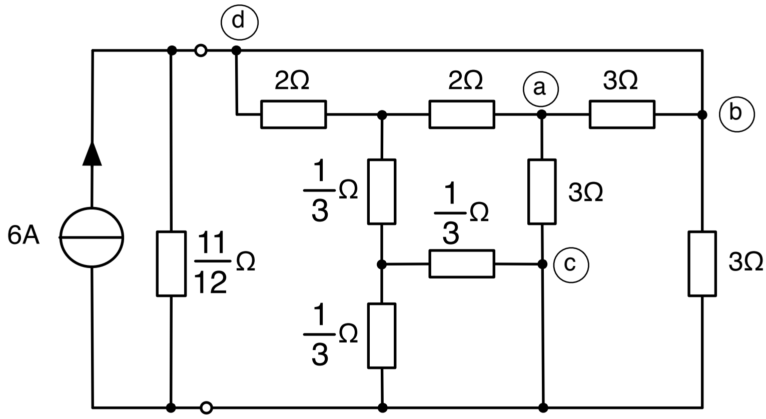


$$\begin{aligned}
U_{5,2} &= U_2 \frac{R_2 + R_1 \parallel R_4}{R_3 + R_2 + R_1 \parallel R_4} = U_2 \frac{R_2 + \frac{R_1 R_4}{R_1+R_4}}{R_3 + R_2 + \frac{R_1 R_4}{R_1+R_4}} \\
&= U_2 \frac{R_2(R_1+R_4) + R_1 R_4}{(R_2+R_3)(R_1+R_4) + R_1 R_4} \\
&= \frac{40}{11} \cdot \frac{1\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5}\frac{1}{2}}{(1+1)\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5}\frac{1}{2}} \mathrm{V} \\
&= \frac{40}{11} \cdot \frac{\frac{9}{10}+\frac{2}{10}}{2\frac{9}{10}+\frac{2}{10}} \mathrm{V} = \frac{40}{11} \cdot \frac{11}{20} \mathrm{V} = 2\mathrm{V}
\end{aligned}$$

Das gesuchte U_5 kann schließlich durch Superposition (hier: Addition) gewonnen werden.

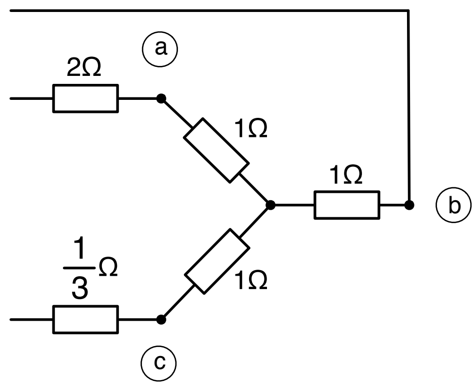
$$U_5 = U_{5,1} + U_{5,2} = (10+2)\mathrm{V} = 12\mathrm{V}$$

Lösung Aufgabe 4



Zuerst wird das Dreieck an den Knoten *a*,*b*,*c* in einen Stern umgewandelt.
Da alle drei Widerstände gleich groß sind, genügt eine Rechnung

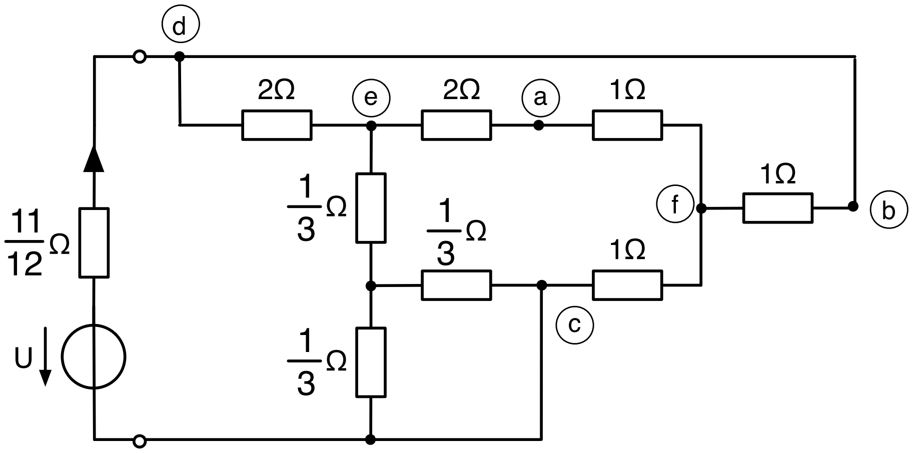
$$R_{a,b,c} = \frac{3\Omega \cdot 3\Omega}{3\Omega + 3\Omega + 3\Omega} = 1\Omega$$



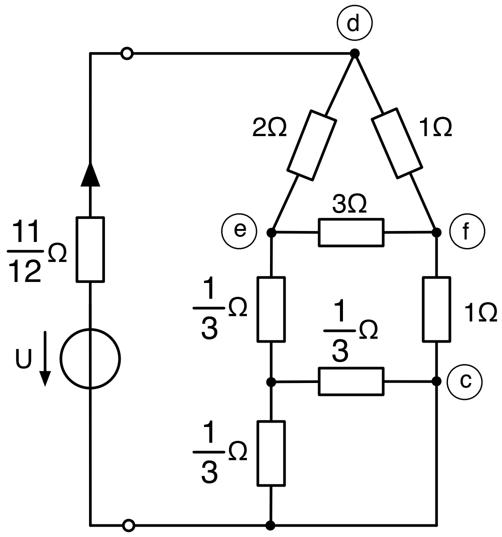
Für das folgende Bild wurden folgende Umformungen durchgeführt:

a) Einsetzen des oben berechneten Sterns
b) Die Umwandlung der Strom- in eine Spannungsquelle mit dem Widerstand R = 11/12Ω

$$U = R \cdot I = \frac{11}{12}\Omega \cdot 6\mathrm{A} = \frac{11}{2}\mathrm{V} = 5,5\mathrm{V}$$

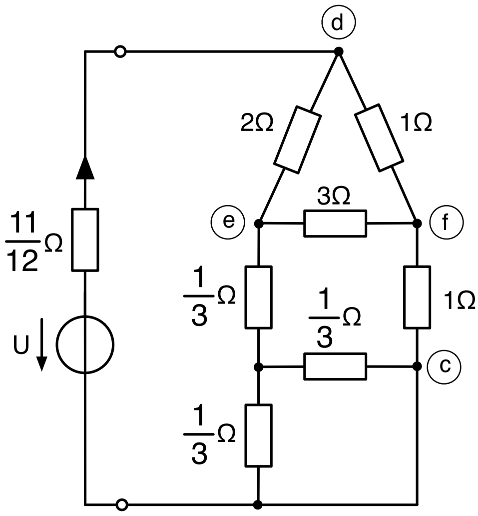


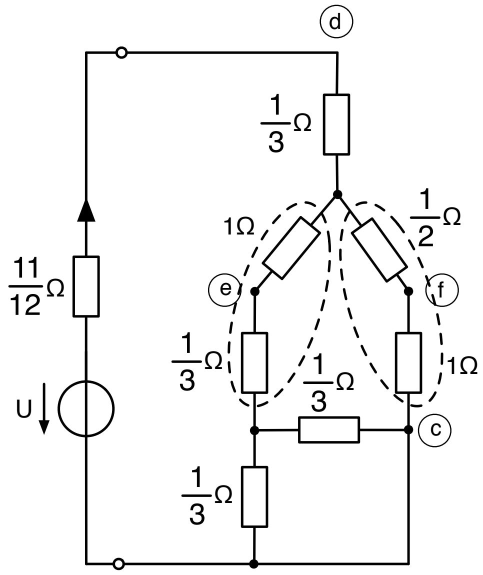
Als Nächstes kann man
a) die Widerstände zwischen e und f zusammenfassen
b) die Schaltung unter Berücksichtigung des langen Kabels zwischen b und d umstellen (d.h. b=d)



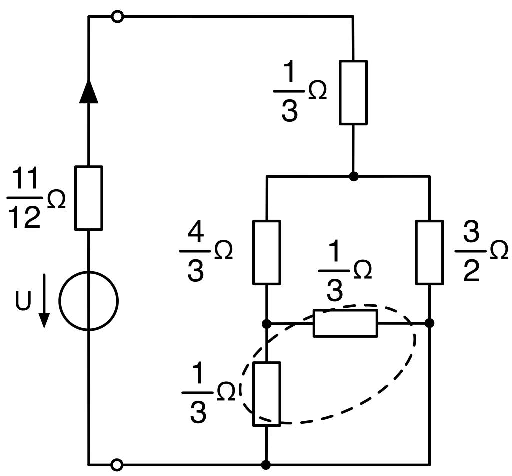
Eine erneute Stern-Dreickstransformation, dieses Mal an den Knoten d,e,f

$$
\begin{aligned}
R_d &= \frac{2\Omega \cdot 1\Omega}{2\Omega + 3\Omega + 1\Omega} = \frac{2}{6}\Omega = \frac{1}{3}\Omega \\
R_e &= \frac{2\Omega \cdot 3\Omega}{2\Omega + 3\Omega + 1\Omega} = \frac{6}{6}\Omega = 1\Omega \\
R_f &= \frac{3\Omega \cdot 1\Omega}{2\Omega + 3\Omega + 1\Omega} = \frac{3}{6}\Omega = \frac{1}{2}\Omega
\end{aligned}
$$



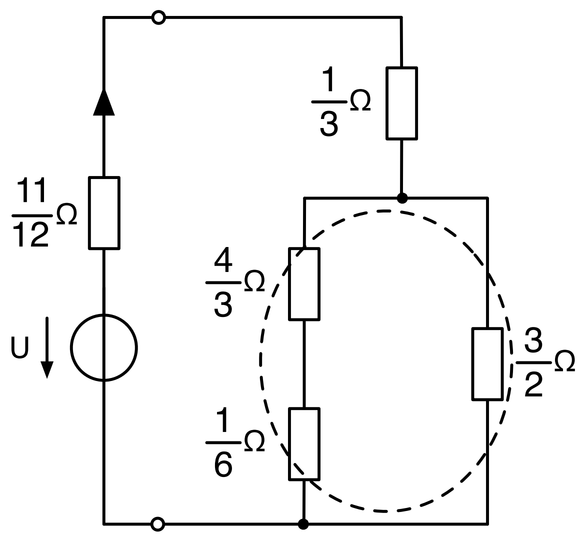


Auch hier lassen sich wieder Widerstände zusammenfassen, was zu folgendem Schaltbild führt:



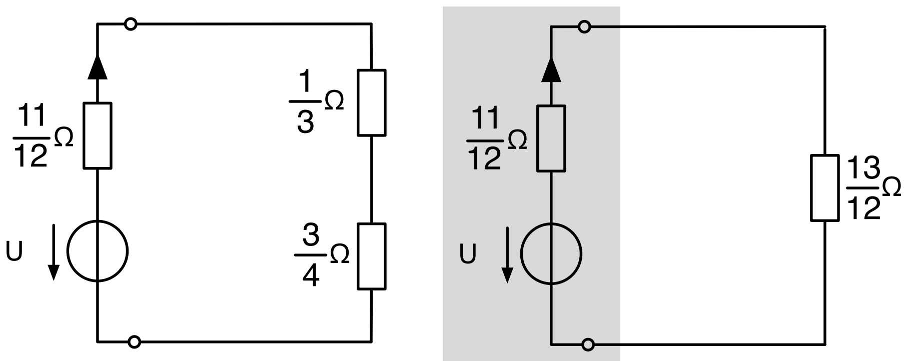
$$\frac{1}{3}\Omega || \frac{1}{3}\Omega = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}\Omega = \frac{1}{6}\Omega$$

Dadurch entsteht

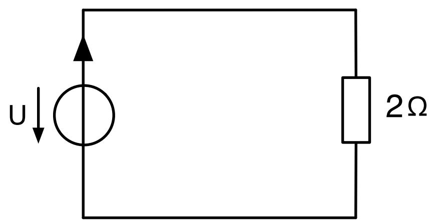


$$
\begin{aligned}
\left(\frac{4}{3}\Omega + \frac{1}{6}\Omega\right) \parallel \frac{3}{2}\Omega &= \frac{3}{2}\Omega \parallel \frac{3}{2}\Omega \\
&= \frac{3}{4}\Omega
\end{aligned}
$$

und schließlich



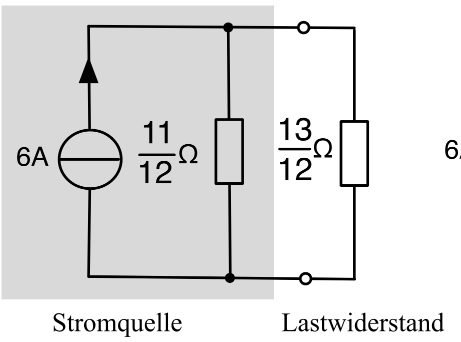
Nun haben wir nur noch eine Spannungsquelle und einen Lastwiderstand.
Bestimmung der Leistung der Gesamtschaltung mit Spannungsquelle:

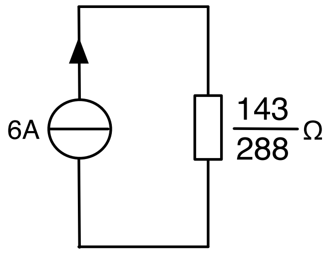


$$I = \frac{U}{R} = \frac{\frac{11}{2}V}{2\Omega} = \frac{11}{4}A$$

$$P = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = \frac{121}{8}W$$

Bestimmung der Leistung der Gesamtschaltung mit Stromquelle:



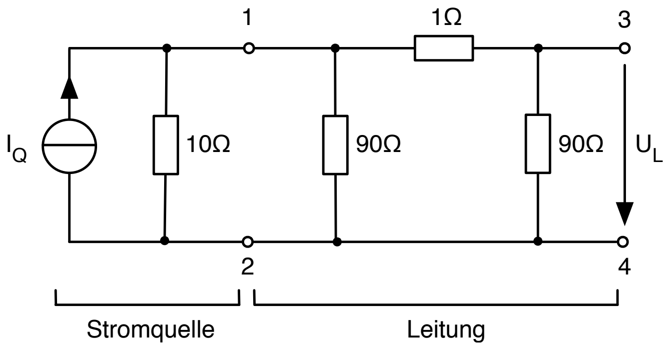


$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{143}{8} W$$

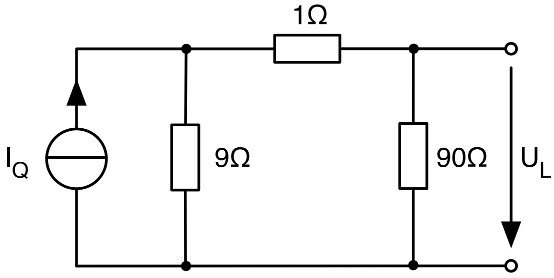
Es ergeben sich unterschiedliche Leistungen für die Gesamtschaltung je nach dem ob man mit einer Strom- oder einer Spannungsquelle rechnet.
Bei der äquivalenten Umwandlung einer Quelle bleibt im Allgemeinen die Leistung der Gesamtschaltung nicht erhalten.
Die Leistung über dem Lastwiderstand bleibt jedoch für beide Quellen gleich, da die Klemmenspannungen an beiden Quellen gleich ist --> Äquivalente Quellen!

Lösung Aufgabe 5

1. Weg: Netzumformung

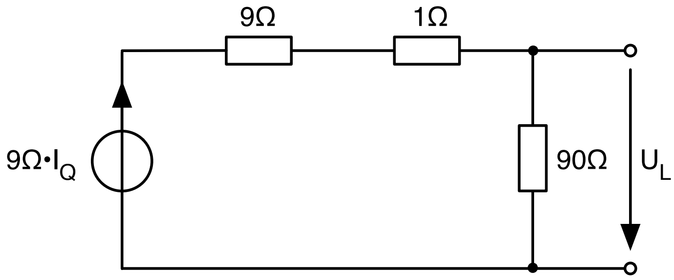


Zuerst die Parallelschaltung ganz links auflösen:

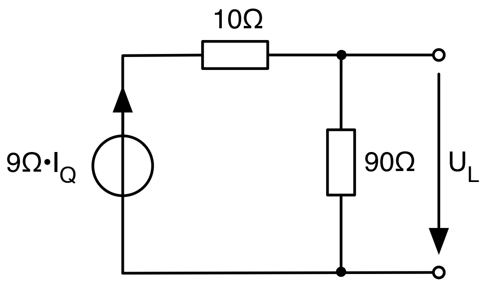


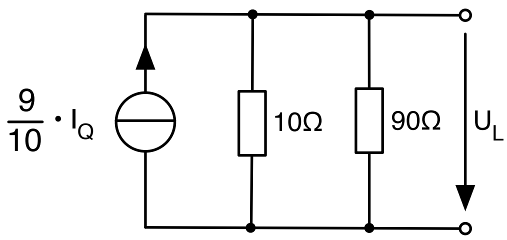
$$10\Omega \parallel 90\Omega = \frac{10\Omega \cdot 90\Omega}{10\Omega + 90\Omega} = 9\Omega$$

Dann die Strom in eine Spannungsquelle umwandeln

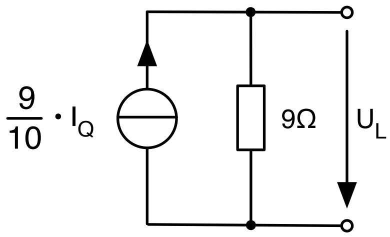


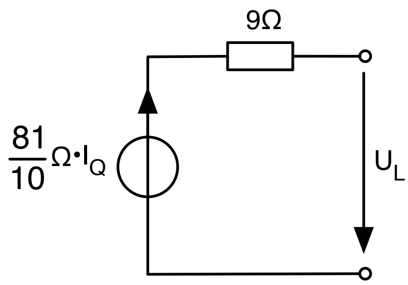
Die beiden Widerstände zusammenfassen und wieder in eine Stromquelle transformieren





Nun noch die Parallelschaltung auflösen, wieder eine Spannungsquelle bilden und man erhält die gesuchte Anordnung



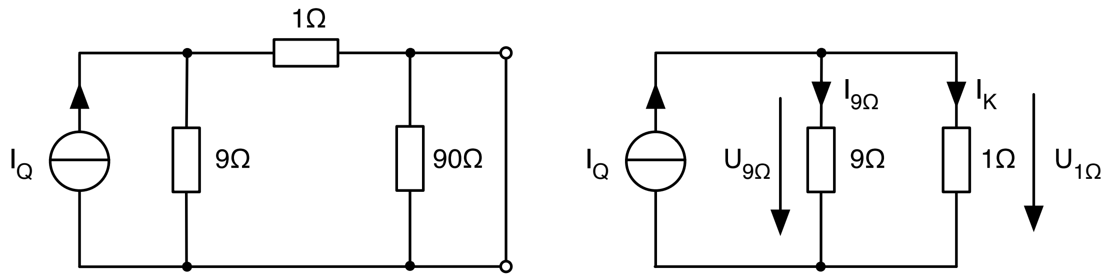


2. Weg: Ersatzquelle direkt berechnen.

Der Innenwiderstand (Stromquelle durch Unterbrechung ersetzen!):

$$\begin{aligned} R_i &= [90 \parallel (1 + 90 \parallel 10)]\Omega = \frac{90(1 + 90 \parallel 10)}{90 + 1 + 90 \parallel 10}\Omega \\ &= \frac{90\left(1 + \frac{90\cdot 10}{90+10}\right)}{90 + 1 + \frac{90\cdot 10}{90+10}}\Omega = \frac{90 \cdot 10}{100}\Omega = 9\Omega \end{aligned}$$

Der Kurzschlussstrom:
- Kurzschluss zwischen den Klemmen 3 und 4
- I_K ist also der Strom durch den oberen 1Ω-Widerstand



I_K läßt sich mit Hilfe Stromteilerregel bestimmen.

$$\begin{aligned} I_Q &= I_{9\Omega} + I_K \\ I_{9\Omega} &= I_Q - I_K \end{aligned} \qquad \begin{aligned} U_{9\Omega} &= U_{1\Omega} \\ 9\Omega I_{9\Omega} &= 1\Omega I_K \\ I_{9\Omega} &= \frac{1}{9} I_K \end{aligned}$$

Ersetzt man nun in der linken Gleichung $I_{9\Omega}$ durch die rechts bestimmte Beziehung von I_K und $I_{9\Omega}$ folgt.

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} I_K &= I_Q - I_K \\ \left(\frac{1}{9} + 1\right) I_K &= I_Q \\ I_K &= \frac{9}{10} I_Q \end{aligned}$$

Die gesuchte Ersatzquelle kann mit Hilfe des Zusammenhangs $U_L = R_i \cdot I_K$ von Innenwiderstand und Kurzschlussstrom bestimmt werden. Das gesuchte U_L ist somit

$$U_L = R_i \cdot I_K = 9\Omega \frac{9}{10} I_Q = \frac{81}{10}\Omega \cdot I_Q$$