Lösung Aufgabe 1

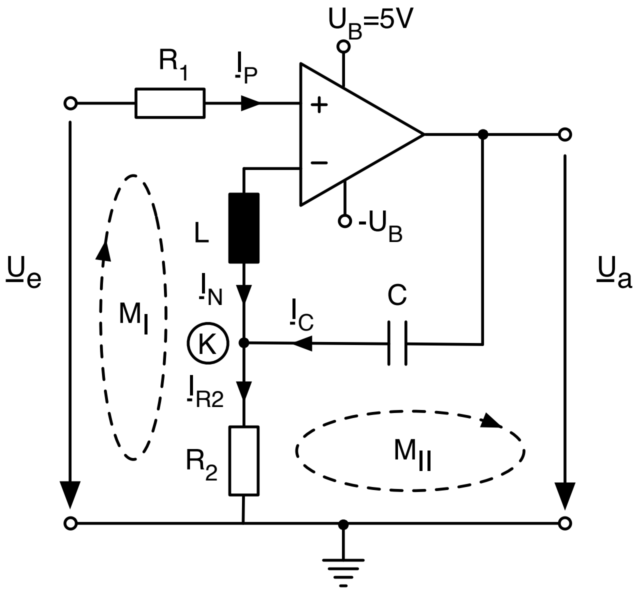
a) - keine Masche durch den OP
   - $U_d \approx 0$
   - keine Ströme in den OP

b) Die Knotengleichung für K lautet: $\underline{I}_C + \underline{I}_N - \underline{I}_{R2} = 0$
   Da keine Ströme in den OP fliessen (s. a)) ist $\underline{I}_N = 0$ und somit vereinfacht sich der Term zu

$$\begin{aligned} \underline{I}_C - \underline{I}_{R2} &= 0 \\ \underline{I}_C &= \underline{I}_{R2} \end{aligned}$$

c) Da $\underline{I}_N = 0$ ist, fällt über der Spule keine Spannung ab, d.h. $\underline{U}_L = 0$.
   Die Spannung über R_2 läßt sich über das Ohmsche Gesetz bestimmen:
   $\underline{U}_{R2} = \underline{I}_{R_2} \cdot R_2$

d) Für die Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Ein- und Ausgang können Maschen verwendet werden.



M_I: $\underline{U}_e = R_1\underline{I}_P + \underline{Z}_L\underline{I}_N + R_2\underline{I}_{R_2}$

M_{II}: $\underline{U}_a = R_2\underline{I}_{R_2} + \underline{Z}_C\underline{I}_C = R_2\underline{I}_{R_2} + \underline{Z}_C\underline{I}_{R_2} = (R_2 + \underline{Z}_C)\underline{I}_{R_2}$

Anwenden der Ergebnisse aus b) und Auflösen von M_I nach $\underline{I}_{R2}$:

$$\begin{aligned} \underline{U}_e &= R_1\underline{I}_P + \underline{Z}_L\underline{I}_N + R_2\underline{I}_{R_2} \\ &= R_2\underline{I}_{R_2} \;\; (= \underline{U}_{R_2}) \\ \underline{I}_{R_2} &= \frac{\underline{U}_e}{R_2} \end{aligned}$$

Setzt man dies in M_{II} ein, ergibt sich

$$\underline{U}_a = (R_2 + \underline{Z}_C)\underline{I}_{R_2} = (R_2 + \underline{Z}_C)\frac{\underline{U}_e}{R_2}$$

$$\underline{U}_a = \frac{R_2 + \underline{Z}_C}{R_2}\underline{U}_e = \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C}}{R_2}\underline{U}_e = \frac{j\omega C R_2 + 1}{j\omega C R_2}\underline{U}_e = \left(1 + \frac{1}{j\omega C R_2}\right)\underline{U}_e = \left(1 - j\frac{1}{\omega C R_2}\right)\underline{U}_e$$

Einsetzen der Zahlwerte

$$\underline{U}_a = \left(1 - j\frac{1}{2\pi \cdot 10\mathrm{kHz} \cdot 63\mathrm{nF} \cdot 250\Omega}\right)1\mathrm{mV} \approx (1 - j1)\,\mathrm{mV}$$

Der Winkel zwischen Real- und Imaginärteil von $\underline{U}_a$ beträgt somit -π/4 bzw. -45°.

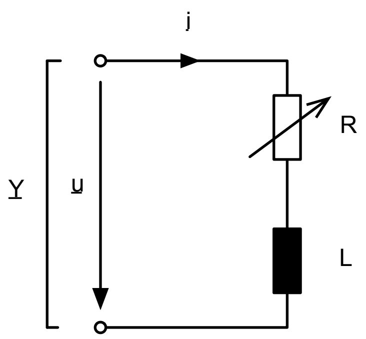
e) Dieser Aufgabenteil läßt sich mit Hilfe des Zwischenergebnisses aus d) beantworten:

$$\underline{U}_a = \left(1 - j\frac{1}{\omega C R_2}\right)\underline{U}_e$$

In diesem Term geht der Imaginärteil für $\omega \to 0$ gegen minus Unendlich und die Phase daher gegen -90°.

f) Die maximale Ausgangsspannung des OPs wird durch die Versorgungsspannung limitiert, in diesem Fall (s. Schaltbild) also 5V.

Lösung Aufgabe 2



a) Für R = 0Ω verbleibt nur noch die komplexe Impedanz $\underline{Z} = j\omega_0 L = j10\Omega$ im Stromkreis. Die komplexe Amplitude des Stroms $\underline{i}$ berechnet sich über den Ohmschen Zusammenhang von Spannung und Impedanz:

$$\hat{\underline{I}} = \frac{\hat{\underline{U}}}{\underline{Z}} = \frac{10\mathrm{V} \cdot e^{j\pi}}{j10\Omega} = -j1\mathrm{A}e^{j\pi} = e^{-j\frac{\pi}{2}}1\mathrm{A}e^{j\pi} = 1\mathrm{A}e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Daraus können Betrag und Phasenwinkel direkt abgelesen werden:
$|\hat{\underline{I}}| = 1\mathrm{A}$ bzw. $arg(\hat{\underline{I}}) = \frac{\pi}{2}$

b) Die Impedanz der Gesamtschaltung besteht aus der Reihenschaltung von Spule und Widerstand:

$\underline{Z} = R + j\omega L$ und somit $\underline{Y} = \frac{1}{R + j\omega L}$. Für die Bestimmung von Real- und Imaginärteil muss der Bruch konjugiert-komplex erweitert werden:

$$\underline{Y} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$Re\{\underline{Y}\} = \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2}$ (Wirkleitwert)

$Im\{\underline{Y}\} = -\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$ (Blindleitwert)

c) Die Scheinleistung ist definiert durch die komplexen Amplituden (=Zeigerlängen) oder durch Effektivwerte. Letztere lassen aus den Amplituden der sinusförmigen Wechselgrößen durch eine Division durch $\sqrt{2}$ gewinnen: $U_{eff} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$.

Das ist auch der Wert, den ein Messinstrument bei einer Wechselstrommessung anzeigt.

$$\begin{aligned}
\underline{S} &= \underline{U}\underline{I}^* \\
&= \frac{\hat{\underline{U}}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{\underline{I}}^*}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\hat{\underline{U}}\hat{\underline{I}}^* = \frac{1}{2}\hat{\underline{U}}\left(\frac{\hat{\underline{U}}}{\underline{Z}}\right)^* = \frac{1}{2}|\hat{\underline{U}}|^2\underline{Y}^* \\
&= \frac{1}{2}|\hat{\underline{U}}|^2\frac{R + j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}
\end{aligned}$$

Die Wirkleistung *P* ist der Realteil von ***S***: $P = \frac{|\hat{\underline{U}}|^2 \cdot R}{2[R^2 + (\omega L)^2]}$,

(die Blindleistung Q der Imaginärteil: $Q = \frac{|\hat{\underline{U}}|^2 \cdot j\omega L}{2[R^2 + (\omega L)^2]}$)

Die Wirkleistung ist also eine Funktion von R. Das Maximum läßt sich daher durch die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmen.

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dR} \stackrel{!}{=} 0 &= \frac{|\hat{\underline{U}}|^2 \cdot 2[R^2 + (\omega_0 L)^2] - |\hat{\underline{U}}|^2 R \cdot 2(2R)}{4[R^2 + (\omega_0 L)^2]^2} \\
&= \frac{|\hat{\underline{U}}|^2 \cdot [R^2 + (\omega_0 L)^2] - |\hat{\underline{U}}|^2 R \cdot (2R)}{2[R^2 + (\omega_0 L)^2]^2}
\end{aligned}$$

Nullstelle(n) des Zählers:

$$\begin{aligned} 0 &= |\hat{\underline{U}}|^2 \cdot [R^2 + (\omega_0 L)^2] - |\hat{\underline{U}}|^2 R \cdot (2R) \\ &= [R^2 + (\omega_0 L)^2] - R \cdot (2R) = -R^2 + (\omega_0 L)^2 \\ R^2 &= (\omega_0 L)^2 \\ R &= \omega_0 L \end{aligned}$$

Substituieren von $\omega_0 L$ in der Gleichung von P und einsetzen der gegebenen Zahlenwerte:

$$P_{max} = \frac{100\mathrm{V}^2 \cdot 10\Omega}{2(200\Omega^2)} = \frac{1000}{400}\mathrm{W} = 2,5\mathrm{W}$$

Lösung Aufgabe 3

a) Berechnen der Real- und Imaginärteile der Bauteilimpedanzen und der Stromquelle:

- Stromquelle: $i(t) = 8cos(\omega t)\mathrm{A} \Rightarrow \underline{i}(t) = 8e^{j\omega t}\mathrm{A}$

(wir nehmen an: rein reell, d.h. der Imaginärteil wird nicht beachtet).

- Widerstände: ebenfalls rein reell, d.h. Imaginärteil und Phase gleich null
- Induktivität/Spule: $\underline{Z}_L = j\omega L = j200.000s^{-1} \cdot 40\mu H = j8\Omega$

($Re\{\underline{Z}\}$ = 0Ω, $Im\{\underline{Z}\}$ = 8Ω => Phase: 90°)

- Kondensator: $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{200.000s^{-1} \cdot 1\mu F} = -j5\Omega$

($Re\{\underline{Z}\}$ = 0Ω, $Im\{\underline{Z}\}$ = -5Ω => Phase: -90°)

b) Der Ersatzwiderstand der Gesamtschaltung:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R_1 \parallel (R_2 + \underline{Z}_L) \parallel \underline{Z}_C \\ &= \frac{R_1(R_2 + \underline{Z}_L)\underline{Z}_C}{R_1(R_2 + \underline{Z}_L) + R_1\underline{Z}_C + (R_2 + \underline{Z}_L)\underline{Z}_C} \\ &= \frac{10(6 + j8)(-j5)}{10(6 + j8) + 10(-j5) + (6 + j8)(-j5)}\Omega \\ &= \frac{400 - j300}{100}\Omega = (4 - j3)\Omega \end{aligned}$$

$$arg(\underline{Z}) = -arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx -36,87_{deg}$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= \underline{Z} \cdot \underline{i}(t) = 5e^{-j36,87_{deg}} \cdot 8e^{j\omega t}\mathrm{V} \\ &= 40e^{j(\omega t - 36,87_{deg})}\mathrm{V} = 40e^{j(\omega t - 0,64_{rad})}\mathrm{V} \\ u(t) &= Re\{\underline{u}(t)\} = Re\{40e^{j(\omega t - 0,64_{rad})}\}\mathrm{V} = 40cos(\omega t - 0,64_{rad})\mathrm{V} \end{aligned}$$

Ströme:

$$i_1(t) = \frac{u(t)}{R_1} = \frac{40cos(\omega t - 0,64_{rad})}{10}\mathrm{A} = 4cos(\omega t - 0,64_{rad})\mathrm{A}$$

$$\begin{aligned}\underline{i}_2(t) &= \frac{\underline{u}(t)}{R_2 + \underline{Z}_L} = \frac{40e^{j(\omega t - 0,64_{rad})}}{6+j8}\mathrm{A} = \frac{40e^{j(\omega t - 0,64_{rad})}}{10e^{j0,93_{rad}}}\mathrm{A} \\ &= 4e^{j(\omega t - 1,57_{rad})}\mathrm{A} = 4e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}\mathrm{A}\end{aligned}$$

$$i_2(t) = Re\{\underline{i}_2(t)\} = 4cos(\omega t - \frac{\pi}{2})\mathrm{A}$$

$$\begin{aligned}\underline{i}_3(t)\} &= \frac{\underline{u}(t)}{\underline{Z}_C} = \frac{40e^{j(\omega t - 0,64_{rad})}}{-j5}\mathrm{A} = \frac{40e^{j(\omega t - 0,64_{rad})}}{5e^{-j\frac{\pi}{2}}}\mathrm{A} \\ &= \frac{40e^{j(\omega t - 0,64_{rad})}}{5e^{-j\frac{\pi}{2}}}\mathrm{A} = 8e^{j(\omega t + 0,93_{rad})}\mathrm{A}\end{aligned}$$

$$i_3(t) = Re\{\underline{i}_3(t)\}\} = 8cos(\omega t + 0,93_{rad})\mathrm{A}$$

Lösung Aufgabe 4

a) Berechnen des Gesamtwiderstandes:

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \underline{Z}_C + (R \parallel \underline{Z}_L) = \frac{1}{j\omega C} + \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{1}{j\omega C} + \frac{j\omega L R(R - j\omega L)}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} \\ &= -j\frac{1}{\omega C} + \frac{j\omega L R(R - j\omega L)}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{R(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\frac{\omega L R^2}{R^2 + (\omega L)^2} - \frac{1}{\omega C}\right)\end{aligned}$$

b) Betrag und Phase des Stromes können auf zwei Arten bestimmt werden.

$$\begin{aligned}\underline{\hat{I}} &= \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{Z}} = \frac{\sqrt{2}(6 - j2)\mathrm{V}}{(3 + j2)\Omega} \\ &= \left(\sqrt{2}\frac{(6 - j2)(3 - j2)}{(3 + j2)(3 - j2)}\mathrm{A} = \sqrt{2}\frac{18 - j12 - j6 - 4}{9 + 4}\mathrm{A} = \frac{\sqrt{2}}{13}(14 - j18)\mathrm{A}\right)\end{aligned}$$

i) erweitern des Bruches mit dem konjugiert-komplexen des Nenners. Daraus lassen sich dann direkt Betrag und Phase ableiten:

$$\begin{aligned}|\underline{\hat{I}}| &= \frac{\sqrt{2}}{13}\sqrt{14^2 + 18^2}\mathrm{A} = \frac{\sqrt{2}}{13}\sqrt{520}\mathrm{A} \approx 2,48\mathrm{A} \\ arg(\underline{\hat{I}}) &= -arctan\left(\frac{18}{14}\right) \approx -0,91_{rad}\end{aligned}$$

ii) Umwandeln von Zähler und Nenner in Polardarstellung, dann Rechenregeln für die Division von komplexen Zahlen anwenden:

$$\begin{aligned}\underline{\hat{I}} &= \frac{\underline{\hat{U}}}{\underline{Z}} = \frac{\sqrt{2}(6 - j2)\mathrm{V}}{(3 + j2)\Omega} \\ &= \sqrt{2}\frac{\sqrt{6^2 + 2^2}e^{j(-arctan\left(\frac{2}{6}\right))}}{\sqrt{3^2 + 2^2}e^{j(arctan\left(\frac{2}{3}\right))}}\mathrm{A} \\ &\approx \sqrt{2}\frac{\sqrt{40}e^{-j0,32_{rad}}}{\sqrt{13}e^{j0,59_{rad}}}\mathrm{A} = \sqrt{\frac{80}{13}}e^{j(-0,32_{rad} - 0,59_{rad})}\mathrm{A} = 2,48e^{-j0,91_{rad}}\mathrm{A}\end{aligned}$$

c) Aus der komplexen Leistung $\underline{S}$ lassen sich Wirkleistung *P* und Blindleistung *Q* ablesen, daher zuerst die Berechnung von $\underline{S}$:

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \frac{1}{2}\underline{\hat{U}}\,\underline{\hat{I}}^* = \frac{1}{2}\sqrt{2}\underline{U}\cdot\sqrt{2}\underline{I}^* = \underline{U}\,\underline{I}^* = \frac{|\underline{U}|^2}{\underline{Z}^*} \\ &= \frac{(6^2+2^2)}{3-j2}\mathrm{VA} = \frac{40(3+j2)}{(3-j2)(3+j2)}\mathrm{VA} = \frac{40}{13}(3+j2)\mathrm{VA} \\ &= \left(\frac{120}{13}+j\frac{80}{13}\right)\mathrm{VA}\end{aligned}$$

Die Scheinleistung ist ihr Betrag:

$|\underline{S}| = \sqrt{\frac{120^2+80^2}{169}}\mathrm{VA} \approx 11.1\mathrm{VA}$

Die Wirkleistung *P* ist der Realteil von $\underline{S}$: $P = \frac{120}{13}\mathrm{W} \approx 9,23\mathrm{W}$,

die Blindleistung Q der Imaginärteil: $Q = \frac{80}{13}\mathrm{var} \approx 6,15\mathrm{var}$