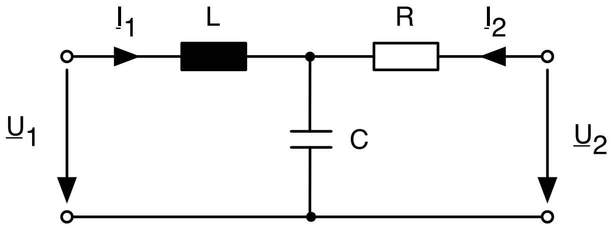
Lösung Aufgabe 1

a)



Aufstellen der Impedanzmatrix:

$$\underline{Z}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$ (Eingangs-Leerlaufimpedanz)

$$\underline{Z}_{22} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = R + \frac{1}{j\omega C}$$ (Ausgangs-Leerlaufimpedanz)

$$\underline{Z}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0} = \frac{1}{j\omega C}$$ (Leerlauf-Kernimpedanz, rückwärts)

$$\underline{Z}_{21} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0} = \frac{1}{j\omega C}$$ (Leerlauf-Kernimpedanz, vorwärts)

und als ganzes:

$$[\underline{Z}] = \begin{bmatrix} j\omega L + \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & R + \frac{1}{j\omega C} \end{bmatrix}$$

b) Die Admittanzmatrix kann auf zwei Arten bestimmt werden: zum einen erhält man sie als Inverse der Impedanzmatrix:

$$[\underline{Y}] \;=\; [\underline{Z}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\underline{Z}_{22}}{detZ} & -\frac{\underline{Z}_{12}}{detZ} \\ -\frac{\underline{Z}_{21}}{detZ} & \frac{\underline{Z}_{11}}{detZ} \end{bmatrix}$$

die dafür benötigte Determinante von [Z] ist

$$\begin{aligned} det[\underline{Z}] &= \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) - \left(\frac{1}{j\omega C}\cdot\frac{1}{j\omega C}\right) \\ &= j\omega LR + \frac{L}{C} - j\frac{R}{\omega C} + \frac{1}{(j\omega C)^2} - \frac{1}{(j\omega C)^2} \\ &= \frac{L}{C} + j\left(\omega LR - \frac{R}{\omega C}\right) = \frac{\omega L + j\omega^2 LCR - jR}{\omega C} \end{aligned}$$

und somit

$$[\underline{Y}] = \begin{bmatrix} \frac{R+\frac{1}{j\omega C}}{detZ} & -\frac{\frac{1}{j\omega C}}{detZ} \\ -\frac{\frac{1}{j\omega C}}{detZ} & \frac{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}{detZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R+\frac{1}{j\omega C}}{detZ} & \frac{j\frac{1}{\omega C}}{detZ} \\ \frac{j\frac{1}{\omega C}}{detZ} & \frac{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}{detZ} \end{bmatrix}$$

Der andere Weg führt wie in a) über eine Analyse der Schaltung. Am Beispiel von $\underline{Y}_{11}$ soll dies einmal vorgestellt werden:

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_{11} &= \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} = \left(j\omega L + R \parallel \frac{1}{j\omega C}\right)^{-1} = \left(j\omega L + \frac{R\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}\right)^{-1} \\
&= \left(j\omega L + \frac{R}{1+j\omega CR}\right)^{-1} = \left(\frac{j\omega L(1+j\omega CR)+R}{1+j\omega CR}\right)^{-1} \\
&= \frac{1+j\omega CR}{j\omega L - \omega^2 LCR + R} = \frac{-j+\omega CR}{\omega L + j\omega^2 LCR - jR}
\end{aligned}$$

Das ist genau das gleiche Ergebnis, das man auch aus $\frac{R+\frac{1}{j\omega C}}{det[\underline{Z}]}$ erhält.

Zur weiteren Übung:

$\underline{Y}_{12}$ ergibt sich durch Kurzschließen von $\underline{U}_1$. Die Betrachtung von R in Reihe zu $L||C$ ergibt einen Spannungsteiler, über dessen Parallelschaltung $L||C$ die Spannung $\underline{I}_1$ jωL abfällt.

$$\frac{-\underline{I}_1 j\omega L}{\underline{U}_2} = \frac{j\omega L||\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L||\frac{1}{j\omega C}+R}$$

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_{12} = \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} &= -\frac{1}{j\omega L}\frac{j\omega L||\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L||\frac{1}{j\omega C}+R} = -\frac{1}{j\omega L}\frac{\frac{j\omega L\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}}{\frac{j\omega L\frac{1}{j\omega C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}+R} = -\frac{1}{j\omega L}\frac{\frac{\frac{L}{C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}}{\frac{\frac{L}{C}}{j\omega L+\frac{1}{j\omega C}}+R} \\
&= -\frac{1}{j\omega L}\frac{1}{1+R(j\omega L+\frac{1}{j\omega C})\frac{C}{L}} = -\frac{1}{j\omega CL}\frac{\omega C}{\omega + R(j\omega^2 L - \frac{j}{C})\frac{C}{L}} = -\frac{1}{j\omega C}\frac{\omega C}{\omega L + j\omega^2 LCR - jR}
\end{aligned}$$

Auch dieses Ergebnis entspricht dem Eintrag in der Admittanzmatrix $-\frac{\frac{1}{j\omega C}}{det\underline{Z}}$.

Lösung Aufgabe 2

a) den gesuchten Strom kann man mit Hilfe einer Knotengleichung für (b) bestimmen:

$$\frac{U_{bd}}{R_4} + \frac{U_{bd} - U_e}{R_2} + \frac{U_{bd}}{R_3} = 0$$

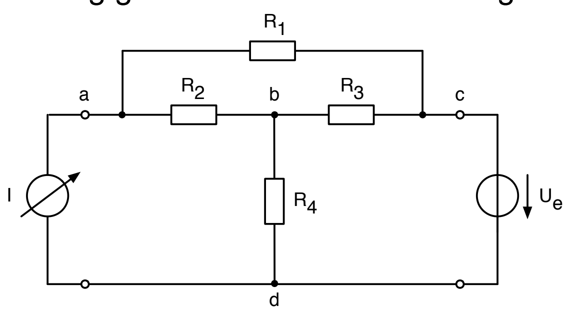
Über dem Amperemeter fällt keine Spannung ab (unendlich kleiner Innenwiderstand), daher liegt über *R_3* ebenfalls *U_{bd}* an.

$$\begin{aligned} U_{bd}\left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) &= \frac{U_e}{R_2} \\ U_{bd}\left(\frac{R_2R_3 + R_4R_3 + R_4R_2}{R_2R_3R_4}\right) &= \frac{U_e}{R_2} \\ U_{bd} &= U_e\left(\frac{1}{R_2} \cdot \frac{R_2R_3R_4}{R_2R_3 + R_4R_3 + R_4R_2}\right) \\ &= U_e\frac{R_3R_4}{R_2R_3 + R_4R_3 + R_4R_2} \\ &= 15\mathrm{V}\frac{20 \cdot 60}{30 \cdot 20 + 60 \cdot 20 + 60 \cdot 30} = 15\mathrm{V}\frac{1}{3} = 5\mathrm{V} \end{aligned}$$

Der Strom *I_a* setzt sich folgendermassen zusammen:

$$\begin{aligned} I_a &= I_{R1} + I_{R3} = \frac{U_e}{R_1} + \frac{U_{bd}}{R_3} \\ &= \frac{15}{10}\mathrm{A} + \frac{5}{20}\mathrm{A} = \frac{7}{4}\mathrm{A} = 1,75\mathrm{A} \end{aligned}$$

b) die in der Aufgabenstellung geforderte Umstrukturierung führt zu



Der Strom am Knoten (b) wird somit zu

$$\frac{U_{bd}}{R_4} + \frac{U_{bd}}{R_2} + \frac{U_{bd} - U_e}{R_3} = 0$$

und daraus folgt

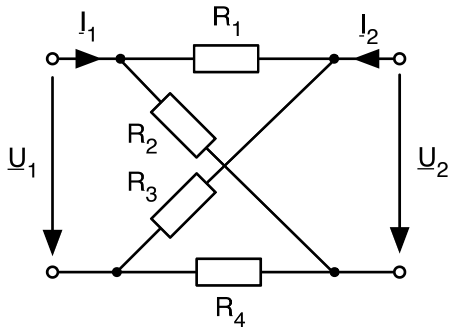
$$\begin{aligned} U_{bd}\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) &= \frac{U_e}{R_3} \\ U_{bd} &= U_e\left(\frac{1}{R_3}\cdot\frac{R_2R_3R_4}{R_2R_3+R_4R_3+R_4R_2}\right) \\ &= U_e\frac{R_2R_4}{R_2R_3+R_4R_3+R_4R_2} = 15\mathrm{V}\frac{1}{2} = 7,5\mathrm{V} \end{aligned}$$

Damit läßt sich analog zu a) der Strom I_b berechnen:

$$\begin{aligned} I_b &= I_{R1}+I_{R2} = \frac{U_e}{R_1}+\frac{U_{bd}}{R_2} \\ &= \frac{15}{10}\mathrm{A}+\frac{7,5}{30}\mathrm{A} = \frac{7}{4}\mathrm{A} = 1,75\mathrm{A} \end{aligned}$$

Ein solcher Vierpol wird als „reziprok“ bezeichnet. Er weist, egal von welcher Seite her man ihn betrachtet, die gleichen Kernadmittanzen $\underline{Y}_{21}=\underline{Y}_{12}$ auf (vgl. Kap. 11.6).

Lösung Aufgabe 3

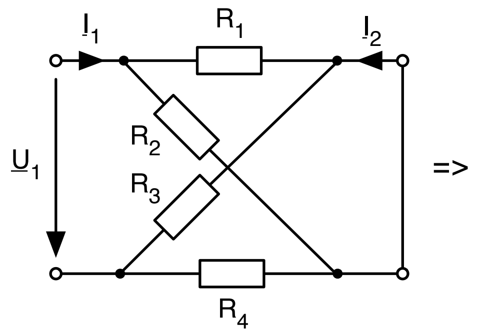


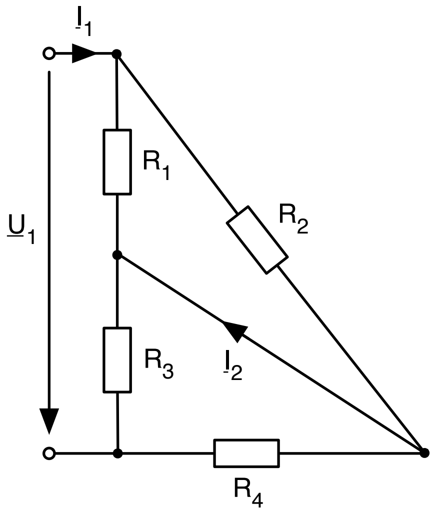
$$\begin{aligned} \underline{Y}_{11} &= \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right|_{U_2=0} = \frac{1}{(R_1 \parallel R_2)+(R_3 \parallel R_4)} = \frac{1}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}} \\ &= \frac{1}{\frac{R_1R_2(R_3+R_4)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}+\frac{R_3R_4(R_1+R_2)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}} \\ &= \frac{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)} = \frac{21}{250}\mathrm{S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{22} &= \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right|_{U_1=0} = \frac{1}{(R_1 \parallel R_3)+(R_2 \parallel R_4)} = \frac{1}{\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}} \\ &= \frac{1}{\frac{R_1R_3(R_2+R_4)}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}+\frac{R_2R_4(R_1+R_3)}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}} \\ &= \frac{(R_1+R_3)(R_2+R_4)}{R_1R_3(R_2+R_4)+R_2R_4(R_1+R_3)} = \frac{12}{125}\mathrm{S} \end{aligned}$$

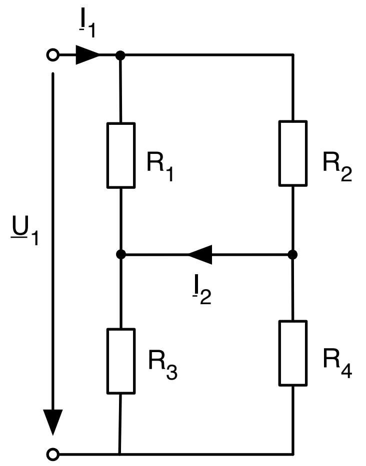
Für $\underline{Y}_{21}$ wird $\underline{U}_2$ zu Null gesetzt. Ein Zusammenziehen auf einen Punkt wie bei $\underline{Y}_{11}$ ist hier nicht sinnvoll, da dadurch der Strompfad für $\underline{I}_2$ verschwinden würde.

Ein Umzeichnen des Schaltplans für den Fall $\underline{U}_2 = 0$ liefert folgendes:





bzw.



Es handelt sich also um die aus Kap. 1.3 bekannte Brückenschaltung. Für den Spezialfall der abgeglichenen Brücke, wenn

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$$

gilt, wird $\underline{I}_2$ zu Null. Für alle anderen Fälle lässt sich $\underline{I}_2$ mit Hilfe von Maschen- und Knotengleichungen bestimmen. Der folgende $\underline{Y}_{21}$-Parameter wird für diese Aufgabe ermittelt:

$$\begin{aligned}\underline{Y}_{21} &= \left.\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right|_{\underline{U}_2=0} \\ &= \left(\frac{R_4}{R_3+R_4} - \frac{R_2}{R_1+R_2}\right) \cdot \underline{Y}_{11} \\ &= -\frac{1}{125} S\end{aligned}$$

Für $\underline{Y}_{12}$ wird $\underline{U}_1$ zu Null gesetzt. Die Vorgehensweise ist völlig analog zu $\underline{Y}_{21}$, auch hier ergibt sich eine Brückenschaltung, die für den abgeglichenen Fall auf ein $\underline{I}_1$ von Null führt. Allerdings gilt hier mit $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$ eine andere Widerstandsbeziehung. Der folgende $\underline{Y}_{12}$-Parameter wird für diese Aufgabe ermittelt:

$$
\begin{aligned}
\underline{Y}_{12} &= \left.\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right|_{\underline{U}_1=0} \\
&= \left(\frac{R_4}{R_2+R_4} - \frac{R_3}{R_1+R_3}\right) \cdot \underline{Y}_{22} \\
&= -\frac{1}{125} S
\end{aligned}
$$