

Institut für Biomedizinische Technik,
Karlsruher Institut für Technologie

Fritz-Haber-Weg 1
76131 Karlsruhe
Tel.: 0721/608-42650

Lineare Elektrische Netze

Leiter: Prof. Dr. rer. nat. Olaf Dössel
Tel: 0721 608-42650
Olaf.Doessel@kit.edu

Übungsleiter: Dipl.-Ing. G. Lenis
Tel: 0721 608-45478
Gustavo.Lenis@kit.edu

Übungsblatt Nr. 0: Differential- und Integralrechnung, Lineare Algebra,
Komplexe Zahlen und Analyse einfacher Widerstandsnetzwerke

Aufgabe 1

(a) Gegeben seien die folgenden reellwertigen Funktionen

- $f_1(x) = \frac{2}{4 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$
- $f_2(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} - x\right)}{4 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$

Bestimmen Sie die folgenden Werte für die zwei Funktionen ($i \in \{1, 2\}$):

-

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_i(x)$$

-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_i(x)$$

- Alle Nullstellen von $f_i(x)$
- Alle Extremwerte (Maxima/Minima) von $f_i(x)$

(b) Der mittlere Funktionswert einer reell wertigen Funktion im Intervall $(x_0; x_0 + T)$ ist folgendermaßen definiert:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) dx$$

Bestimmen Sie den mittleren Funktionswert der folgenden Funktionen:

- $f(x) = A \cdot \cos(x) \cdot \cos(x + \varphi)$; $T = 2\pi$; x_0, φ beliebig aber fest
- $f(x) = a \cdot x + b$; T, x_0, a, b beliebig aber fest
- $f(x) = e^{-a \cdot x}$; $x_0 = 0$; $T \rightarrow \infty$; $a > 0$ beliebig aber fest

Lösung:

(a) Für $f_1(x)$ gilt

-

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0$$

-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_1(x) = 0$$

- Nullstellen: $x_1 = 0 \Rightarrow f(x_1) = 0$
- Maxima: $x_1 = 1 \Rightarrow f(x_1) = \frac{1}{2}$; $x_2 = -1 \Rightarrow f(x_2) = \frac{1}{2}$
- Minima: $x_1 = 0 \Rightarrow f(x_1) = 0$

Für $f_2(x)$ gilt:

-

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = 0$$

-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_2(x) = 0$$

- Nullstellen: $x_1 = 0 \Rightarrow f(x_1) = 0$; $x_2 = 1 \Rightarrow f(x_2) = 0$;
 $x_3 = -1 \Rightarrow f(x_3) = 0$
- Maxima: $x_1 = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow f(x_1) = \frac{1}{4}$; $x_2 = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow f(x_2) = \frac{1}{4}$
- Minima: $x_1 = \sqrt{2} + 1 \Rightarrow f(x_1) = -\frac{1}{4}$; $x_2 = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow f(x_2) = -\frac{1}{4}$

(b) Für die mittleren Funktionswerte gilt:

- $\bar{f} = \frac{1}{2} \cos(\varphi)$
- $\bar{f} = a(\frac{1}{2}T + x_0) + b$
- $\bar{f} = 0$

Aufgabe 2

- (a) Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}x + 3y + 5z &= 2 \\ -x - 2y + 4z &= 5 \\ 2x - 3y + z &= 13\end{aligned}$$

Finden Sie die Lösung des Gleichungssystems

- (b) Nun soll für ein ähnliches Problem lieber die Vektor-Matrix-Notation verwendet werden:

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

mit

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $\underline{A}$.

Besitzt dann das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung?

Finden Sie die Lösung des Gleichungssystems $\underline{x}$ über die Inverse der Matrix $\underline{A}$.

Lösung:

- (a) Die Lösung des linearen Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned}x &= 3 \\ y &= -2 \\ z &= 1\end{aligned}$$

- (b) Für die Determinante der Matrix $\underline{A}$ gilt:

$$\det(\underline{A}) = 1$$

Dadurch existiert die inverse der Matrix $\underline{A}$ und eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems auch.

Für die Inverse von $\underline{A}$ gilt:

$$\underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Für den Lösungsvektor $\underline{x}$ gilt:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die imaginäre Einheit j . Für die imaginäre Einheit j gilt: $j^2 = -1$. Man kann mit dieser imaginären Einheit j ganz normal rechnen, als ob sie eine Variable so wie x oder y wäre. Man muss nur beachten, wenn der Term j^2 auftritt, so muss man ihn durch eine -1 ersetzen und dann weiter rechnen.

Beispiel:

$$\begin{aligned}(2 + 3j) \cdot (2 - 3j) &= 4 - 6j + 6j - 9j^2 \\ &= 4 + 0 - 9(-1) \\ &= 13\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie die folgenden Korrespondenzen

- $j^3 = -j$
- $\frac{1}{1+j} = \frac{1}{2}(1-j)$
- Die Gleichung $x^2 - 2x + 26 = 0$ hat die zwei Lösungen:
 $x_1 = 1 + 5j$; $x_2 = 1 - 5j$

(b) Bringen Sie die folgende Terme in die Form $x + jy$:

- i) $(a + jb)(c + jd)$
- ii) $\frac{1}{a+jb}$
- iii) $\frac{(a+jb)}{c+jd}$

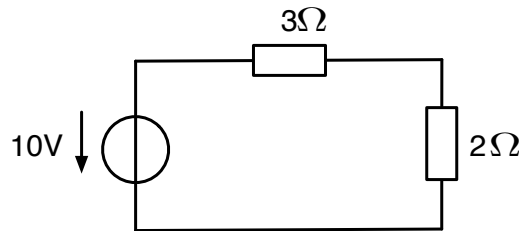
Lösung:

(b) Für die vorgegebenen Terme gilt:

- i) $(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(ad + bc)$
- ii) $\frac{1}{a+jb} = \frac{a}{a^2+b^2} + j\frac{-b}{a^2+b^2}$
- iii) $\frac{(a+jb)}{(c+jd)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + j\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$

Aufgabe 4

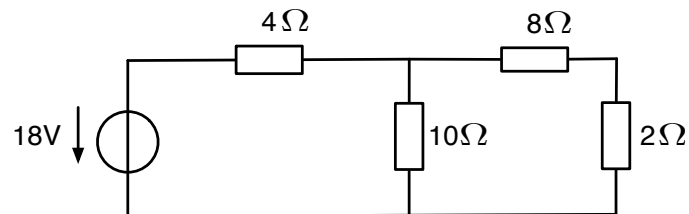
(a) Gegeben sei die folgende Schaltung:



Bestimmen Sie Folgendes:

- Den aus der Quelle fließenden Strom I .
- Die von der Quelle abgegebene Leistung P .
- Die am 2Ω -Widerstand abfallende Spannung U_2 .

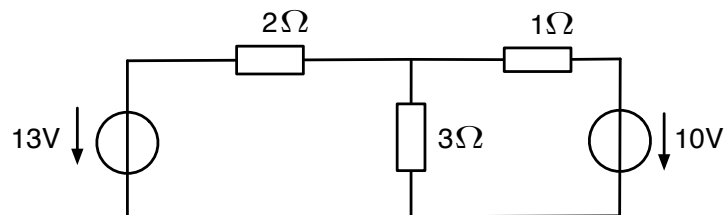
(b) Gegeben sei die folgende Schaltung:



Bestimmen Sie Folgendes:

- Den durch den 2Ω -Widerstand fließenden Strom I_2 und die dort umgesetzte Leistung P_2 .
- Die am 4Ω -Widerstand abfallende Spannung U_4 .

(c) Gegeben sei die folgende Schaltung:



Bestimmen Sie den durch der 3Ω -Widerstand fließenden Strom I_3 .

Lösung:

(a) Für die Schaltung gilt Folgendes:

- $I = 2A$
- $P = 20W$
- $U_2 = 4V$

(b) Für die Schaltung gilt Folgendes:

- $I_2 = 1A$
- $P_2 = 2W$
- $U_4 = 8V$

(c) Für die Schaltung gilt:

- $I_3 = 3A$